线性代数

XIANXING DAISHU

许 彪 谢 巍 兰恒友 主编

西南交通大学出版社
Http://press.swjtu.edu.cn

线性代数

许 彪　谢 巍　兰恒友　主编

西南交通大学出版社

·成　都·

图书在版编目（CIP）数据

线性代数 / 许彪，谢巍，兰恒友主编. —成都：西南交通大学出版社，2012.8
ISBN 978-7-5643-1847-5

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①许… ②谢… ③兰… Ⅲ. ①线性代数－高等学校－教材 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 176168 号

线性代数

许 彪　谢 巍　兰恒友　主编

责任编辑	张宝华
封面设计	墨创文化
出版发行	西南交通大学出版社 （成都二环路北一段 111 号）
发行部电话	028-87600564　028-87600533
邮政编码	610031
网　　址	http: //press.swjtu.edu.cn
印　　刷	成都勤德印务有限公司
成品尺寸	170 mm × 230 mm
印　　张	10.375
字　　数	186 千字
版　　次	2012 年 8 月第 1 版
印　　次	2012 年 8 月第 1 次
书　　号	ISBN 978-7-5643-1847-5
定　　价	19.50 元

前　言

本书是在已有的线性代数教科书的基础上，结合作者多年的教学实践和经验，认真调查国内外数学教育的改革动态，力求化枯燥为生动，化繁琐为简洁，这样既保持了线性代数逻辑性强的特点，又增加了理论和实际相结合的实例，使学生的数学能力及应用能力得到了培养和提高.

线性代数作为一门数学基础课，其本身理论性强，计算繁杂，知识枯燥而抽象. 为使学生在学习过程中易学好懂，我们在内容编排上，作了部分调整，全书共分为五章，行列式、矩阵、向量组及其线性相关性、线性方程组、相似矩阵与二次型，其中行列式的定义采用 Laplace 展开递推来定义，矩阵的秩与矩阵的初等变换调整到第二章，这样可使线性代数的几个主要内容：行列式、矩阵、向量组、线性方程组更加清晰突出。课后习题分为 A、B 两类，以方便教师和学生根据自身要求进行取舍.

本书可作为大学理工类（非数学专业）和经管类各专业线性代数教材和教学参考书.

本书由许彪担任主编，具体分工如下：第一章（黄彦华、许彪）、第二章（谢巍），第三章（王帮容）、第四章（付宇、兰恒友）、第五章（唐建芳），许彪、谢巍、兰恒友负责全书的结构安排和统筹.

黎克麟教授，李作安教授对本书的编写提出了宝贵意见，在此表示衷心的感谢！

限于编者水平有限，书中难免有不妥之处，恳请广大读者批评指正.

编　者

2012 年 5 月

目　录

第一章　n阶行列式

在线性代数中，行列式是一个基本工具，它在数学学科乃至自然科学的许多领域都有广泛的应用. 本章将讨论行列式的概念、性质及计算方法.

第一节　行列式的定义

一、二阶与三阶行列式

引例　对于二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{1-1}$$

通过消元可得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2,$$
$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1.$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$时，方程组（1-1）的解为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \end{cases} \tag{1-2}$$

（1-2）式中的分子、分母都是 4 个数分两对相乘再相减而得，其中分母是由方程组的 4 个系数决定的.

定义 1.1　将 $4(=2^2)$ 个数排成两行两列（横排称行，竖排称列）的数表：

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}. \tag{1-3}$$

表达式 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 称为数表（1-3）所确定的**二阶行列式**，并记作：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}. \tag{1-4}$$

（1-4）式中数 $a_{ij}\ (i=1,2;j=1,2)$ 称为二阶行列式的**元素**，i,j 分别表示 a_{ij} 的行标和列标，表明该元素位于行列式的第 i 行第 j 列.

为了便于记忆，（1-4）式可看成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

即实线连接的两个元素的乘积减去虚线连接的两个元素的乘积. 实连线称为**主对角线**，虚连线称为**副对角线**.

利用二阶行列式的概念，（1-2）式中的 x_1,x_2 的分子可以写成二阶行列式，即

$$a_{22}b_1-a_{12}b_2=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$a_{11}b_2-a_{21}b_1=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

若记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则（1-2）式可写成

$$x_1=\frac{D_1}{D},\qquad x_2=\frac{D_2}{D}.$$

定义 1.2 设有 $9(=3^2)$ 个数排成的三行三列的数表：

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}, \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \tag{1-5}$$

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}. \tag{1-6}$$

（1-6）式称为数表（1-5）所确定的**三阶行列式**.

（1-6）式右端可按便于记忆的对角线法则计算，如图 1.1 所示.

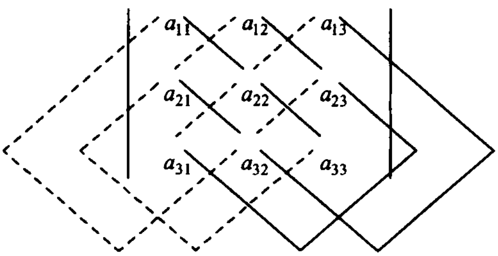

图 1.1

图 1.1 中三条实线可看做是平行于主对角线的连线，三条虚线可看做是平行于副对角线的连线，实线上三个元素的乘积冠正号，虚线上三个元素的乘积冠负号.

例 1 计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & -1 \\ 4 & -3 & 1 \end{vmatrix}.$$

解 按对角线法则，有

$$\begin{aligned} D &=1\times5\times1+3\times(-1)\times4+2\times(-2)\times(-3)- \\ &\quad 1\times(-1)\times(-3)-3\times(-2)\times1-2\times5\times4 \\ &=5-12+12-3+6-40=-32. \end{aligned}$$

如果三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0,$$

用消元法求解该方程组，可得

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}, \tag{1-7}$$

其中 $D_i(i=1,2,3)$ 是用常数项 b_1,b_2,b_3 分别替换 D 中的第 i 列元素所得到的三阶行列式，即

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

但是，当 $n>3$ 时，n 阶行列式不能用对角线法则来定义. 否则，它将与二、三阶行列式没有统一的运算性质，而且对 n 元线性方程组来讲也得不到类似于（1-7）式的求解公式. 在代数中，它可以用三种不同的方法来定义，下面我们采用递推法来定义 n 阶行列式.

二、n 阶行列式的定义

在给出 n 阶行列式的定义之前，先来研究二、三阶行列式的展开式特点. 不难发现，二、三阶行列式有一个共同规律——可以按第一行展开，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = a_{11}|a_{22}| - a_{12}|a_{21}|,$$

和

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

其中 $|a_{21}|$ 为一阶行列式，勿与绝对值符号混淆.

由此易知，可以用低阶行列式来定义高一阶的行列式，推广到一般，即得到 n 阶行列式的递推定义.

定义 1.3　由 n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 组成的 **n 阶行列式**

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

是一个算式. 当 $n=1$ 时，定义

$$D=|a_{11}|=a_{11};$$

当 $n\geqslant 2$ 时，定义

$$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}, \tag{1-8}$$

其中 $A_{1j}=(-1)^{1+j}M_{1j}$，而 M_{1j} 是 D 中去掉第 1 行第 j 列的所有元素后，按原顺序排成的 $n-1$ 阶行列式，即

$$M_{1j}=\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (j=1,2,\cdots,n),$$

并且称 M_{1j} 为元素 a_{1j} 的**余子式**，A_{1j} 为元素 a_{1j} 的**代数余子式**.

例 2　证明行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n;$$

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n,$$

其中未写出的元素都是 0.

证 按 n 阶行列式的定义依次降低其阶数，可得第一个行列式（又称**对角行列式**）

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} \lambda_2 & & & \\ & \lambda_3 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix}$$

$$= \lambda_1\lambda_2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} \lambda_3 & & & \\ & \lambda_4 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix}$$

$$= \cdots = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

对于第二个行列式，注意到降低阶数时，元素 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 依次在第 $n,n-1,\cdots,2,1$ 列，所以

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = \lambda_1(-1)^{1+n}\begin{vmatrix} & & & \lambda_2 \\ & & \lambda_3 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}$$

$$= \lambda_1(-1)^{1+n}\lambda_2(-1)^{1+(n-1)}\begin{vmatrix} & & & \lambda_3 \\ & & \lambda_4 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix}$$

$$= \cdots = (-1)^{1+n}\cdot(-1)^{1+(n-1)}\cdots(-1)^{1+2}\cdot(-1)^{1+1}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

$$= (-1)^{n+\frac{n(n+1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

例 3 证明 n 阶下三角行列式（当 $i<j$ 时，$a_{ij}=0$，即主对角线以上的元素全为 0）

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

证 用数学归纳法证明. 当$n=2$时，结论成立.
假设结论对$n-1$阶下三角行列式成立，则由定义可知

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^{1+1}a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
$$=a_{11}(a_{22}a_{33}\cdots a_{nn})=a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}.$$

第二节 行列式的性质

一、行列式的基本性质

将行列式D的行与列互换后所得行列式,称为D的**转置行列式**,记为D^{T}. 即若

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 1 行列式与它的转置行列式相等.
对于二阶行列式，由行列式的定义知

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$$
$$=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=D.$$

对于三阶行列式

$$
\begin{aligned}
D^{\mathrm{T}} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}) \\
&= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\
&= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = D.
\end{aligned}
$$

对于 n 阶行列式，可用数学归纳法证明.（从略）

由性质 1 可知，行列式中行列式的行与列具有同等的地位，凡是对行成立的性质对列也同样成立；反之亦然.

性质 2 互换行列式的两行（列），行列式变号.（证明从略）

行列式互换两行两列分别记作：$r_i \leftrightarrow r_j$，$c_i \leftrightarrow c_j$.

推论 如果行列式有两行（列）完全相同，则此行列式为零.

性质 3 行列式等于它的任一行（列）的各元素与与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}, \quad i = 1,2,\cdots,n\,,$$

或

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}, \quad j = 1,2,\cdots,n.$$

推论 行列式某一行（列）的元素与另一行（列）的对应元素乘积之和等于零，即

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0\,, \quad i \neq j\,,$$

或

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0\,, \quad i \neq j\,.$$

证 把行列式 D 按第 j 行展开，得

$$a_{j1}A_{j1}+a_{j2}A_{j2}+\cdots+a_{jn}A_{jn}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

在上式中把 a_{jk} 换成 a_{ik} $(k=1,2,\cdots,n)$，可得

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

当 $i\neq j$ 时，上式右端行列式中有两行对应元素相同，故行列式等于零，即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0\ (i\neq j).$$

上述证法如按列进行，可得

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0\ (i\neq j).$$

综合性质 3 及推论，得到关于代数余子式的重要性质：

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ki}A_{kj}=D\delta_{ij}=\begin{cases} D, & 当 i=j, \\ 0, & 当 i\neq j, \end{cases}$$

或

$$\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{jk}=D\delta_{ij}=\begin{cases} D, & 当 i=j, \\ 0, & 当 i\neq j. \end{cases}$$

其中 $\delta_{ij}=\begin{cases} 1, & 当 i=j, \\ 0, & 当 i\neq j. \end{cases}$

性质 4 行列式的某一行（列）的所有元素都乘以同一数 k，等于以数 k 乘此行列式.

第 i 行（或列）乘以 k，记作 $r_i \times k$（或 $c_i \times k$）.

证　设 D 中第 i 行的所有元素都乘以 k，则由性质 3 将 D 按第 i 行展开，得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} ka_{ij}A_{ij} = k\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = kD, \quad i = 1,2,\cdots,n.$$

推论 1　行列式中某一行（列）的所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

推论 2　行列式中如果有一行（列）的元素全为零，则此行列式等于零.

性质 5　行列式中如果有两行（列）元素成比例，则此行列式等于零.

性质 6　若行列式的某一行（列）的元素都是两数之和，例如，第 j 列的元素都是两数之和：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1j}+a'_{1j}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2j}+a'_{2j}) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{nj}+a'_{nj}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则 D 等于下列两个行列式之和：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a'_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a'_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a'_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证　由性质 3，将行列式按第 j 列展开，得

$$D = \sum_{i=1}^{n}(a_{ij}+a'_{ij})A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} + \sum_{i=1}^{n} a'_{ij}A_{ij} = D_1 + D_2,$$

其中 D_1, D_2 分别为结论中的两个行列式.

性质 7　把行列式某一行（列）的各元素乘以同一数，然后加到另一行（列）对应的元素上去，行列式不变.

证　不妨设以数 k 乘 D 的第 j 列后加到第 i 列上（记作 $c_i + kc_j$），则由性质 5 和性质 6 得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & (a_{1i}+ka_{1j}) & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & (a_{2i}+ka_{2j}) & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & (a_{ni}+ka_{nj}) & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & ka_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & ka_{2j} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & ka_{nj} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=D+0=D.$$

二、行列式的计算

例 4　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 11 \\ 3 & 0 & 9 & 2 \end{vmatrix}.$$

解　（解法 1）利用行列式性质将 D 化为上三角行列式，则

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 11 \\ 3 & 0 & 9 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1\leftrightarrow r_2} -\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 3 & 11 \\ 3 & 0 & 9 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{r_3-4r_1 \\ r_4-3r_1}]{r_2-2r_1} -\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & 4 \\ 0 & -7 & 6 & -5 \\ 0 & -14 & 7 & -5 \\ 0 & -12 & 12 & -10 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3-2r_2} -\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & 4 \\ 0 & -7 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & -12 & 12 & -10 \end{vmatrix}$$

$$=-2\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & 4 \\ 0 & -7 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & -6 & 6 & -5 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-6r_2]{r_2-r_4} -2\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & -5 \end{vmatrix}$$

$$=-2\times5\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & -5 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4+6r_3} -10\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =-10.$$