工科研究生用书·数学系列

模糊数学原理及应用

MOHU SHUXUE YUANLI JI YINGYONG

MOHU SHUXUE YUANLI JI YINGYONG

第四版

■ 杨纶标 高英仪 编著

MOHU SHUXUE YUANLI JI YINGYONG

华南理工大学出版社

工科研究生用书·数学系列

模糊数学原理及应用

（第四版）

杨纶标　高英仪　编著

华南理工大学出版社
·广州·

内 容 简 介

本书是工科硕士研究生教材，简明地阐述了模糊数学的基本理论和基本方法。全书共11章，内容包括：F集合、F模式识别、F关系与聚类分析、F映射与综合评判、扩张原理与F数、F逻辑、F语言与F推理、F控制、F积分与可能性理论、F概率和F规划，书后附录介绍了集合及其运算、映射、关系与格等预备知识。根据工科院校的特点，还介绍了应用于各专业领域中较成熟的实例。各章配有习题，书后附有部分答案及提示。

本书也可作为本科高年级教材，或供工程技术人员自学参考。

图书在版编目(CIP)数据

模糊数学原理及应用/杨纶标，高英仪编著. —4版. —广州：华南理工大学出版社，2005.6

(工科研究生用书·数学系列)

ISBN 7-5623-0440-8

Ⅰ.模… Ⅱ.①杨…②高… Ⅲ.模糊数学-研究生-教材 Ⅳ.O159

中国版本图书馆CIP数据核字（2005）第024278号

总 发 行：华南理工大学出版社（广州五山华南理工大学17号楼，邮编510640）

发行部电话：020-87113487 87111048（传真）

E-mail：scut202@scut.edu.cn http://www.scutpress.com.cn

责任编辑：胡 元

印 刷 者：广东省阳江市教育印务公司

开 本：787×960 1/16 **印张**：18 **字数**：411千

版 次：2005年6月第4版第11次印刷

印 数：42 001～47 000册

定 价：25.00元

第四版前言

本书作为研究生教材，多年来深受师生欢迎，至今已重印 10 次。为了使教材内容更加完善、更方便教学，故决定修订再版。

本次修订主要做了如下工作：

(1)基于教学方法上的考虑，根据实践经验，补充或修改了 F 集的概念、手写文字的隶属函数、F 变换、扩张 F 集、区间数及 F 命题变量等部分内容。

(2)考虑到学时和篇幅的关系，删去一些偏难(烦)且又不会影响系统的内容，如测度贴近度、有界 F 数定理的证明、F 数的表现定理、目标函数 F 化及 F 线性规划等内容。

(3)有的内容虽然重要，但不必在第一次学习时就完全掌握，或者是理论性、专业性较强的部分，加上 * 号供读者参考选用。

(4)增加了 F 推理和作用关系理论的内容。

本次修订参考了一些文献，衷心感谢有关作者。此外，再次感谢使用本书的师生，并欢迎批评指正。

作　者

2005 年 3 月

前　言

模糊数学是一门新兴学科，自1965年发表第一篇模糊集论文开始，20多年来发展非常迅速，它已被用到国民经济和科学技术各个领域，许多高等院校把它作为研究生必修或选修课程。本书就是在我校研究生处的关心和大力支持下，由使用多年的打印教材改编而成的。

本书结合编者多年在教学实践中的经验和体会，较简明扼要地介绍了该门学科的基本理论和基本方法，并根据工科院校的特点，注意介绍应用于各领域中较成熟的实例，尽量做到内容全面、叙述清楚、说理通俗。各章都配有适量的例题和习题，书后附有部分习题答案及较详细的提示，便于具备"高等数学"和"工程数学"基础知识的读者使用。因此，该书既可作为研究生和本科高年级学生的教材，也可供工程技术人员自学参考之用。书中带有*号的章节内容较难或专业性较强，可灵活选读。

本书在编写过程中，曾得到"广州模糊系统与知识工程研究所"程里春副教授的热情帮助，并为本书提供了部分资料。华南理工大学数学系原系主任张正寅教授及有关同志，对本书的出版给予极大鼓励和支持，并提出了许多宝贵意见；自动化系毛宗源教授为本书提供了模糊控制的应用实例。在此一并致谢。

由于编者水平有限，书中一定存在不少缺点，恳请广大读者批评指正。

编　者

1992年8月

目　录

1 F集合

模糊数学是描述模糊现象的数学.而模糊集是模糊数学的理论基础.本章首先简述了模糊数学与经典数学的区别,特别是与概率、数理统计的区别;然后,介绍模糊集的基本概念、运算法则及其分解定理和表现定理,从而揭示模糊与普通集的联系.为了度量模糊性的程度,本章末给出了模糊度的概念和计算公式.

1.1 引　言

随着科学研究的不断深入,人们需要研究的关系越来越复杂,对系统的判别和推理的精确性要求也越来越高.为了精确地描述复杂的现实对象,各类新的数学分支不断地产生和发展起来.迄今为止,处理现实对象的数学模型可分为三大类:

一类是确定性数学模型.这类模型的背景对象具有确定性或固定性,对象间具有必然的关系.

二类是随机性数学模型.这类模型的背景对象具有或然性或随机性.

三类是模糊性数学模型.这类模型的背景对象及其关系均具有模糊性.

前两类模型的共同特点是所描述的事物本身的含义是确定的,它们赖以存在的基石——集合论,它满足互补律,就是非此即彼的清晰概念的抽象.

模糊性的数学模型所描述的事物本身的含义是不确定的,例如:

(1)所有远远大于1的实数的集合.(25是这集合的一员吗?)

(2)健康人的集合.(我是这集合的一员吗?)

(3)动物的集合.(细菌是这集合的成员吗?)

事实上,现实世界中遇到的对象很多是这种模糊的、不能精确定义的类型,它们的成员没有精确定义的判别准则.模糊集正反映了这类"亦此亦彼"的模糊性.它是不满足互补律的.

应当指出,随机性与模糊性的数学模型,虽然都具有不确定性,但它们是有区别的:

随机性,是针对事件的某种结果的机会而言,由于条件不充分而导致各种可能的结果.这是因果律的破缺而造成的不确定性.概率与统计数学就是处理这类随机现象的数学.

模糊性,是指存在于现实中的不分明现象.如"稳定"与"不稳定"、"健康"与"不健康"之间找不到明确的边界.从差异的一方到另一方,中间经历了一个从量变到质变的连续过渡过程.这是因排中律的破缺而造成的不确定性.于是,作为研究模糊现象的定量处理方法——模糊数学便出现了.

可见,如果说概率与统计数学将数学的应用范围从必然现象扩大到随机现象的领域,那么模糊数学则将数学的应用范围从清晰现象扩大到模糊现象的领域.

1.2 F 集的基本概念

人们所熟悉的普通集(为了与模糊集相区别,故称之为普通集)论要求:论域 U 中每个元 u,对于子集 $A \subset U$ 来说,要么 $u \in A$,要么 $u \overline{\in} A$,二者必居其一,且仅居其一,决不允许模棱两可.因而,子集 A 可用 0 和 1 两个数来刻画。

关于普通集,还有其他表示法,因为后面经常应用,所以这里举一个简单例子说明。

设 A 表示“所有小于 5 的自然数集”.

(1)列举法:$A = \{1,2,3,4\}$

(2)描述法:$A = \{u \mid u < 5, u \text{ 为自然数}\}$

(3)特征函数法:设论域 U 为自然数集,映射为

$$C_A : U \longrightarrow \{0,1\}$$

$$u \longrightarrow C_A(u)$$

其中
$$C_A(u) = \begin{cases} 1 & u \in A \quad (\text{即 } u = 1,2,3,4) \\ 0 & u \overline{\in} A \quad (\text{即 } u \neq 1,2,3,4) \end{cases}$$

可见,给定了论域 U 上的一个子集,就等于给定了特征函数,反之亦然.因此,特征函数与集合之间有一一对应关系,利用这一对应关系,可以研究模糊现象的问题,即用函数来研究模糊集.由于普通集的特征函数仅取两个值,只能表达“非此即彼”现象,不能表达“亦此亦彼”现象,即不能表达现实中普遍存在的模糊现象.

例 1 从图 1-1 的 30 条线段中,选出“长的线段”.

这就要逐条考虑它是否能成为“长线段”的成员.显然,从左数起,第 1 条是属于“长线段”.那么第 2 条、第 3 条呢? ……继续下去就会觉得,越靠右的线段作为“长线段”成员的资格就越低.至于第 29 条,尤其是第 30 条线段根本不能作为“长线段”的成员,即应属于“短线段”.

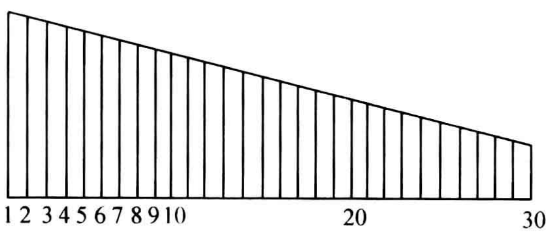

图 1-1

例 2 在标志年龄(0～100)的数轴上,标出"年老"、"年轻"的区间.

这就要求考虑:…,40 岁,…,50 岁,…,60 岁,…等年龄是属于"年轻"还是"年老"呢?

在上面的问题里,由于"长线段"与"短线段"之间、"年轻"与"年老"之间,都不存在明确的边界,由"长"到"短",由"年轻"到"年老",中间经历了一个从量变到质变的连续过渡过程.所以,对于"长的线段"、"年轻"、"年老"的集合不能用普通集合论里仅取 0 或 1 两个值的特征函数来刻画.为了体现类似问题中的这种连续过渡过程的共性,美国控制论专家查德于 1965 年将普通集合论里特征函数的取值范围由{0,1}推广到闭区间[0,1],于是便得到模糊集的定义.

定义 1 设在论域 U 上给定了一个映射

$$A: U \longrightarrow [0,1]$$

$$u \longmapsto A(u)$$

则称 A 为 U 上的模糊(Fuzzy)集,$A(u)$称为 A 的隶属函数(或称为 u 对 A 的隶属度).

为简便计,"模糊(Fuzzy)"记为"F",即"模糊集",写为"F 集".

在例 1 中,论域 U 为图 1－1 中 30 条线段的集.设 u_i 表示第 $i(i=1,2,\cdots,30)$条线段,则 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_{30}\}$.若 A 为"长线段"的集,那么,诸线段作为集 A 的成员资格,就是该线段对 A 的隶属度.下面求 A 的隶属函数.

因为线段越长,属于"长线段集"的隶属度就越大,所以线段长短程度可作为 A 的隶属度.由于线段长度按线性递减(见图 1－1),因此 F 集"长线段"的隶属函数$A(u_i)$是条数 i 的线性函数.选 $A(u_1)=1, A(u_{30})=0$,作直线(见图 1－2),按两点式,有

$$\frac{A(u_i)-0}{i-30}=\frac{1-0}{1-30}$$

于是得第 i 条线段 u_i 相对属于"长线段"集 A 的隶属函数

$$A(u_i)=\frac{1}{29}(30-i), i=1,2,\cdots,30$$

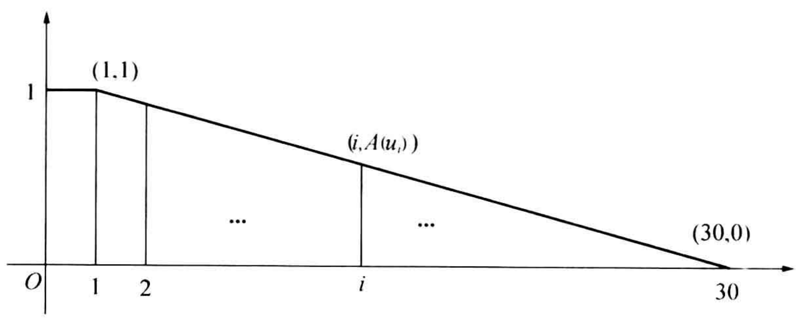

图 1－2

在例 2 中,取论域 $U=[0,100]$,集合 A 和 B 分别表示"年老"和"年轻".查德给出它们

的隶属函数分别为：

$$A(u)=\begin{cases}0 & 0\leqslant u\leqslant 50\\ \left[1+\left(\dfrac{u-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1} & 50< u\leqslant 100\end{cases}$$

$$B(u)=\begin{cases}1 & 0\leqslant u\leqslant 25\\ \left[1+\left(\dfrac{u-25}{5}\right)^{2}\right]^{-1} & 25< u\leqslant 100\end{cases}$$

从图 1-3 可见，当 u 取 50 岁以下诸值时，$A(u)=0$，即 50 岁以下不属“年老”；当 u 取值超过 50 岁，并逐渐增大时，对于“年老”的隶属度也愈来愈大，如 $A(70)=0.94$，说明年龄为 70 岁时属于“年老”的隶属程度已达 94%. 对于函数 $B(u)$ 也可类似地分析所取值的含义.

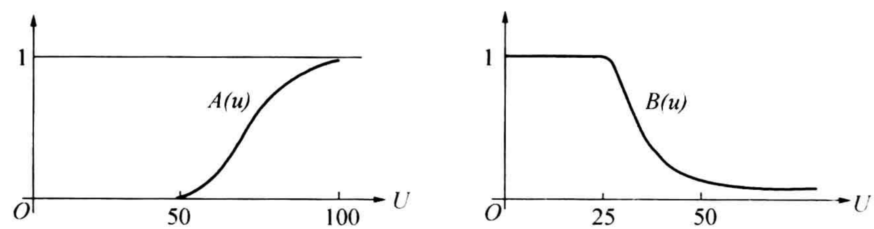

图 1-3

由定义 1 不难看出，对于某 F 集 A，若 $A(u)$ 仅取 0 和 1 两个数时，A 就蜕化为普通集合. 所以，普通集合是模糊集的特殊情形. 若 $A(u)\equiv 0$，则 A 称为空集 $\varnothing$；若 $A(u)\equiv 1$，则 A 称为全集 U，即 $A=U$.

注意：给出 F 集，就是要对论域 U 上的每个元素均要给出隶属度.

在给定的论域 U 上可以有多个 F 集，记 U 上的 F 集的全体为 $\mathscr{F}(U)$，即

$$\mathscr{F}(U)=\{A\mid A:U\longrightarrow[0,1]\}$$

显然，$\mathscr{F}(U)$ 是一个普通集，且

$$\mathscr{P}(U)\subseteq\mathscr{F}(U)$$

其中，$\mathscr{P}(U)$ 是以普通集为元素的集. 即

$$\mathscr{P}(U)=\{A\mid A:U\longrightarrow\{0,1\}\}$$

F 集合 A 有各种不同的表示法：

一般情形下，可表示为

$$A=\{(u,A(u))\mid u\in U,0\leqslant A(u)\leqslant 1\}$$

如果 U 是有限集或可数集，可表示为

$$A=\sum A(u_i)/u_i$$

或表示为向量(称为 F 向量)

$$A=(A(u_1),A(u_2),\cdots,A(u_n))$$

如果 U 是无限不可数集,可表示为

$$A=\int A(u)/u$$

式中"/"不是通常的分数线,只是一种记号,它表示论域 U 上的元素 u 与隶属度 $A(u)$ 之间的对应关系;符号"$\sum$"及"$\int$"也不是通常意义下的求和与积分,都只是表示 U 上的元素 u 与其隶属度 $A(u)$ 的对应关系的一个总括.

例 3 设 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$,A 表示"靠近 4"的数集,则 $A\in\mathscr{F}(U)$,各数属于 A 的程度 $A(u_i)$ 如表 1-1 所示.

表 1-1

u	1	2	3	4	5	6
$A(u)$	0	0.2	0.8	1	0.8	0.2

则 A 可用不同方式表示为

(1) $A=\{(1,0),(2,0.2),(3,0.8),(4,1),(5,0.8),(6,0.2)\}$,或舍弃隶属度为 0 的项,而记为

$$A=\{(2,0.2),(3,0.8),(4,1),(5,0.8),(6,0.2)\};$$

(2) $A=\dfrac{0}{1}+\dfrac{0.2}{2}+\dfrac{0.8}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{0.8}{5}+\dfrac{0.2}{6}=\dfrac{0.2}{2}+\dfrac{0.8}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{0.8}{5}+\dfrac{0.2}{6}$;

(3) $A=(0,0.2,0.8,1,0.8,0.2)$.

注意:在(3)式中,没有直接写明元素 u_i,故隶属度为 0 的项不能舍弃,且相应的元素 u_i 的次序也不能随意调换.

例 4 设论域为实数域 $\mathbf{R}$,A 表示"靠近 4 的数集",则 $A\in\mathscr{F}(R)$.它的隶属函数是

$$A(x)=\begin{cases}e^{-k(x-4)^2} & |x-4|<\delta\\ 0 & |x-4|\geqslant\delta\end{cases}$$

参数 $\delta>0$,$k>0$,见图 1-4.

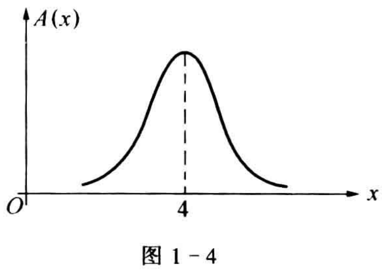

图 1-4

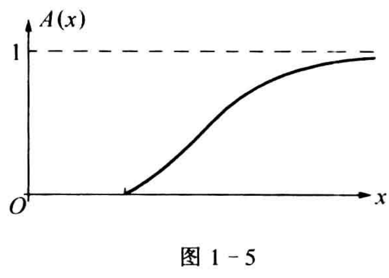

图 1-5

例 5 设论域为实数域 R, A 是“比 4 大得多的数集”. 它的隶属函数是

$$A(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant 4\\ \dfrac{1}{1+\dfrac{100}{(x-4)^2}} & x>4\end{cases}$$

见图 1－5.

对一个 F 集来说,最关键的问题是隶属函数的确定. 怎样的隶属函数合适,这个问题既重要又比较复杂,留待后面对 F 集有进一步的认识时再来讨论.

1.3 F 集的运算

两个 F 子集间的运算,实际上就是逐点对隶属函数作相应运算. 为了方便,用符号“$\forall$”表示“对任意”.

定义 1 设 $A,B\in\mathscr{F}(U)$,若

$$\forall u\in U,\quad B(u)\leqslant A(u)$$

则称 A 包含 B,记为 $B\subseteq A$(见图 1－6).

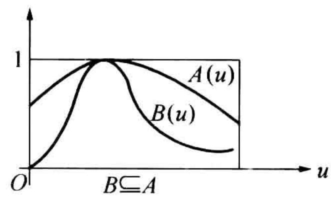

图 1－6

如果 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$,则称 A 与 B 相等,记作 $A=B$.

显然,包含关系“$\subseteq$”是 $\mathscr{F}(U)$ 上的二元关系,具有如下性质:

① 自反性 $\forall A\in\mathscr{F}(U)$, $A\subseteq A$;

② 反对称性 若 $A\subseteq B$, $B\subseteq A$,则 $A=B$;

③ 传递性 若 $A\subseteq B$, $B\subseteq C$,则 $A\subseteq C$.

因此,$(\mathscr{F}(U),\subseteq)$是半序集.

定义 2 设 $A,B\in\mathscr{F}(U)$,分别称运算 $A\cup B$、$A\cap B$ 为 A 与 B 的并集、交集. 称 A^c 为 A 的补集,也称为余集. 它们的隶属函数分别为

$$(A\cup B)(u)=A(u)\vee B(u)=\max(A(u),B(u))$$

$$(A\cap B)(u)=A(u)\wedge B(u)=\min(A(u),B(u))$$

$$A^c(u)=1-A(u)$$

任给 $a,b\in[0,1]$,由于

$$0\leqslant a\vee b\leqslant 1,\ 0\leqslant a\wedge b\leqslant 1,\ 0\leqslant 1-a\leqslant 1$$

故对任意 $A,B\in\mathscr{F}(U)$,有 $A\cup B$, $A\cap B$, $A^c\in\mathscr{F}(U)$.

以上各运算可用图 1－7 至图 1－11 表示 .

例 1 设 $$U=\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5\}$$

$$A=\frac{0.2}{u_1}+\frac{0.7}{u_2}+\frac{1}{u_3}+\frac{0.5}{u_5},\quad B=\frac{0.5}{u_1}+\frac{0.3}{u_2}+\frac{0.1}{u_4}+\frac{0.7}{u_5}$$

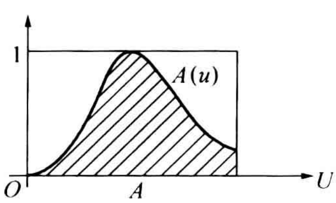

图 1－7

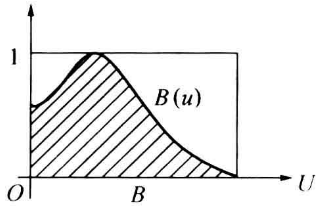

图 1－8

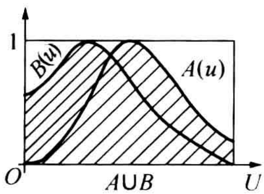

图 1－9

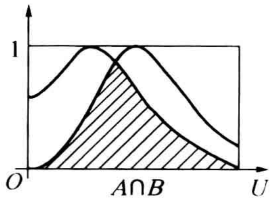

图 1－10

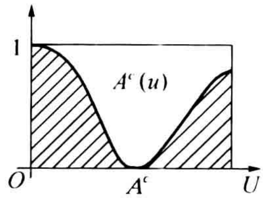

图 1－11

则按以上运算定义可得

$$A\cup B=\frac{0.2\vee 0.5}{u_1}+\frac{0.7\vee 0.3}{u_2}+\frac{1\vee 0}{u_3}+\frac{0\vee 0.1}{u_4}+\frac{0.5\vee 0.7}{u_5}$$

$$=\frac{0.5}{u_1}+\frac{0.7}{u_2}+\frac{1}{u_3}+\frac{0.1}{u_4}+\frac{0.7}{u_5}$$

$$A\cap B=\frac{0.2\wedge 0.5}{u_1}+\frac{0.7\wedge 0.3}{u_2}+\frac{1\wedge 0}{u_3}+\frac{0\wedge 0.1}{u_4}+\frac{0.5\wedge 0.7}{u_5}$$

$$=\frac{0.2}{u_1}+\frac{0.3}{u_2}+\frac{0.5}{u_5}$$

$$A^c=\frac{1-0.2}{u_1}+\frac{1-0.7}{u_2}+\frac{1-1}{u_3}+\frac{1-0}{u_4}+\frac{1-0.5}{u_5}$$

$$=\frac{0.8}{u_1}+\frac{0.3}{u_2}+\frac{1}{u_4}+\frac{0.5}{u_5}$$

一般地，F 集 A 与 B 的并、交和余的计算，按论域 U 的有限和无限，分为以下两种情况表示：

① 设论域 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$，且 F 集

$$A=\sum_{i=1}^{n}\frac{A(u_i)}{u_i},\quad B=\sum_{i=1}^{n}\frac{B(u_i)}{u_i}$$

则

$$A\cup B=\sum_{i=1}^{n}\frac{A(u_i)\vee B(u_i)}{u_i}$$

$$A\cap B=\sum_{i=1}^{n}\frac{A(u_i)\wedge B(u_i)}{u_i}$$

$$A^c = \sum_{i=1}^{n} \frac{1 - A(u_i)}{u_i}$$

② 设论域 U 为无限集,且 F 集

$$A = \int_{u \in U} \frac{A(u)}{u}, \quad B = \int_{u \in U} \frac{B(u)}{u}$$

则

$$A \cup B = \int_{u \in U} \frac{A(u) \vee B(u)}{u}$$

$$A \cap B = \int_{u \in U} \frac{A(u) \wedge B(u)}{u}$$

$$A^c = \int_{u \in U} \frac{1 - A(u)}{u}$$

例 2 设 F 集 A 和 B 的隶属函数为

$$A(u) = \begin{cases} 0 & 0 \leqslant u \leqslant 50 \\ \left[1 + \left(\dfrac{u-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1} & 50 < u \leqslant 100 \end{cases}$$

$$B(u) = \begin{cases} 1 & 0 \leqslant u \leqslant 25 \\ \left[1 + \left(\dfrac{u-25}{5}\right)^{2}\right]^{-1} & 25 < u \leqslant 100 \end{cases}$$

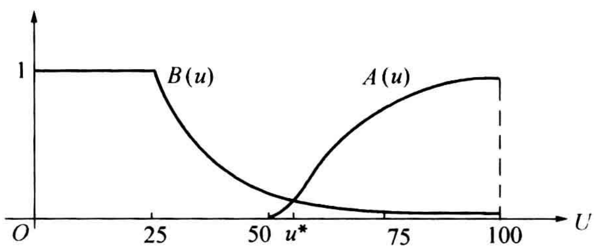

图 1 - 12

令 u^* 为曲线 $A(u)$ 与 $B(u)$ 的交点坐标(见图 1 - 12),则

$$A \cup B = \int_{u \in U} A(u) \vee B(u) / u$$

$$= \int_{0 \leqslant u \leqslant 25} 1/u + \int_{25 < u \leqslant u^*} \left[1 + \left(\frac{u-25}{5}\right)^2\right]^{-1} \Big/ u + \int_{u^* < u \leqslant 100} \left[1 + \left(\frac{u-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1} \Big/ u$$

$$A \cap B = \int_{u \in U} A(u) \wedge B(u) / u$$

$$= \int_{50 < u \leqslant u^*} \left[1 + \left(\frac{u-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1} \Big/ u + \int_{u^* < u \leqslant 100} \left[1 + \left(\frac{u-25}{5}\right)^{2}\right]^{-1} \Big/ u$$

$$A^c = \int_{0\leqslant u\leqslant 50} 1/u + \int_{50<u\leqslant 100} 1-\left[1+\left(\frac{u-50}{5}\right)^{-2}\right]^{-1}\Big/ u$$

两个 F 集上的并、交运算还可推广到任意多个 F 集上去.

定义 3 设 $A_t \in \mathscr{F}(U)$, $t\in T$, T 为指标集.

对任意 $u\in U$ 规定:"$\vee$"表示"取最大"或"取上确界 sup",且

$$(\bigcup_{t\in T} A_t)(u) = \bigvee_{t\in T} A_t(u) = \sup_{t\in T} A_t(u)$$

$$(\bigcap_{t\in T} A_t)(u) = \bigwedge_{t\in T} A_t(u) = \inf_{t\in T} A_t(u)$$

称 $\bigcup\limits_{t\in T} A_t$ 为 $\{A_t\}_{t\in T}$ 的并集, $\bigcap\limits_{t\in T} A_t$ 为 $\{A_t\}_{t\in T}$ 的交集.

显然, $\bigcup\limits_{t\in T} A_t$, $\bigcap\limits_{t\in T} A_t \in \mathscr{F}(U)$.

定理 $(\mathscr{F}(U), \cup, \cap, c)$具有如下性质:

① 幂等律 $A\cup A = A$, $A\cap A = A$.

② 交换律 $A\cup B = B\cup A$, $A\cap B = B\cap A$.

③ 结合律 $(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$, $(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$.

④ 吸收律 $(A\cup B)\cap A = A$, $(A\cap B)\cup A = A$.

⑤ 分配律 $(A\cup B)\cap C = (A\cap C)\cup(B\cap C)$, $(A\cap B)\cup C = (A\cup C)\cap(B\cup C)$.

⑥ 零-壹律 $A\cup\varnothing = A$, $A\cap\varnothing = \varnothing$; $A\cup U = U$, $A\cap U = A$.

⑦ 复原律 $(A^c)^c = A$.

⑧ 对偶律 $(A\cup B)^c = A^c\cap B^c$, $(A\cap B)^c = A^c\cup B^c$.

下面仅以性质②、⑦为例加以证明,其余由读者完成.

证 ② $\forall u\in U$,都有

$$(A\cup B)(u) = A(u)\vee B(u) = B(u)\vee A(u) = (B\cup A)(u)$$

故有
$$A\cup B = B\cup A$$

同理可证
$$A\cap B = B\cap A$$

⑦ $\forall u\in U$,有

$$(A^c)^c(u) = 1 - A^c(u) = 1 - [1 - A(u)] = A(u)$$

即
$$(A^c)^c = A$$

若 $B_t\in\mathscr{F}(U)(t\in T)$,则定理中的性质⑤和⑧具有更一般的形式:

⑤′ $$(\bigcup_{t\in T} B_t)\cap C = \bigcup_{t\in T}(B_t\cap C), \quad (\bigcap_{t\in T} B_t)\cup C = \bigcap_{t\in T}(B_t\cup C)$$

⑧′ $$(\bigcup_{t\in T} B_t)^c = \bigcap_{t\in T} B_t^c, \quad (\bigcap_{t\in T} B_t)^c = \bigcup_{t\in T} B_t^c$$

由于 $\varnothing$, $U\in\mathscr{F}(U)$, 故 $\mathscr{F}(U)$ 具有最大元 U 及最小元 $\varnothing$, 因此定理说明 $(\mathscr{F}(U), \cup, \cap, c)$是软代数而不是布尔代数,因为$(\mathscr{F}(U), \cup, \cap, c)$不满足互补律.这是 F 集与普通集的一个显著不同之处.

F 集上的补运算不满足互补律,其原因是 F 集没有明确的边界. $A\cap A^c\neq\varnothing$ 说明 A 和 A^c 相交,但是

$$\forall A \in \mathscr{F}(U),\ A(u) \wedge A^c(u) \leqslant \frac{1}{2} \quad (\forall u \in U)$$

同样,$A \cup A^c \neq U$ 说明 $A \cup A^c$ 不一定完全覆盖 U,但有下述结论:

$$\forall A \in \mathscr{F}(U),\ A(u) \vee A^c(u) \geqslant \frac{1}{2} \quad (\forall u \in U)$$

由于 F 集的运算不满足互补律,所以它比普通集合更能客观地反映实际中大量存在着的模棱两可的情况.

例 3 设 $U=[0,1]$, $A(u)=u$, 则 $A^c(u)=1-u$,

$$(A \cup A^c)(u)=\begin{cases} 1-u & u \leqslant \dfrac{1}{2} \\ u & u > \dfrac{1}{2} \end{cases}, \quad (A \cap A^c)(u)=\begin{cases} u & u \leqslant \dfrac{1}{2} \\ 1-u & u > \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

特别地,

$$(A \cup A^c)\left(\frac{1}{2}\right)=(A \cap A^c)\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$$

1.4* F 集运算的其他定义

为了使 F 集适合于各种不同的模糊现象,相继提出了不少与 $\vee$、$\wedge$ 相应的新算子,统称为模糊算子.它们各有自己的优缺点,人们可根据具体问题的特性,选择使用.

定义 1 设 $A, B \in \mathscr{F}(U)$,对 $\forall u \in U$,规定:

$$(A \cup B)(u)=A(u) \vee^* B(u), \quad (A \cap B)(u)=A(u) \wedge^* B(u)$$

式中 $\vee^*$、$\wedge^*$ 是$[0,1]$中的二元运算,简称为模糊算子.算子 $\vee^*$、$\wedge^*$ 的定义见表 1-2.

表 1-2 算子 $\vee^*$、$\wedge^*$ 的定义

	算子名称	$\vee^*$	$\wedge^*$
1	Zadeh	$\vee$	$\wedge$
2	最大、乘积	$\vee$	$\cdot$
3	代数和与积	$\hat{+}$	$\cdot$
4	Einstein	$\overset{+}{\varepsilon}$	$\overset{\cdot}{\varepsilon}$
5	有界和与积	$\oplus$	$\odot$
6	Hamacher	$\overset{+}{\gamma}$	$\overset{\cdot}{\gamma}$
7	Yager	$\curlyvee_a$	$\curlywedge_a$

说明:令 $a=A(u)$, $b=B(u)$,相应有

(1) $a \vee b=\max(a,b)$, $a \wedge b=\min(a,b)$.

(2) $a \hat{+} b \triangleq a+b-ab$, $a \cdot b$ 表示普通实数乘法.(“$\triangleq$”表示规定)