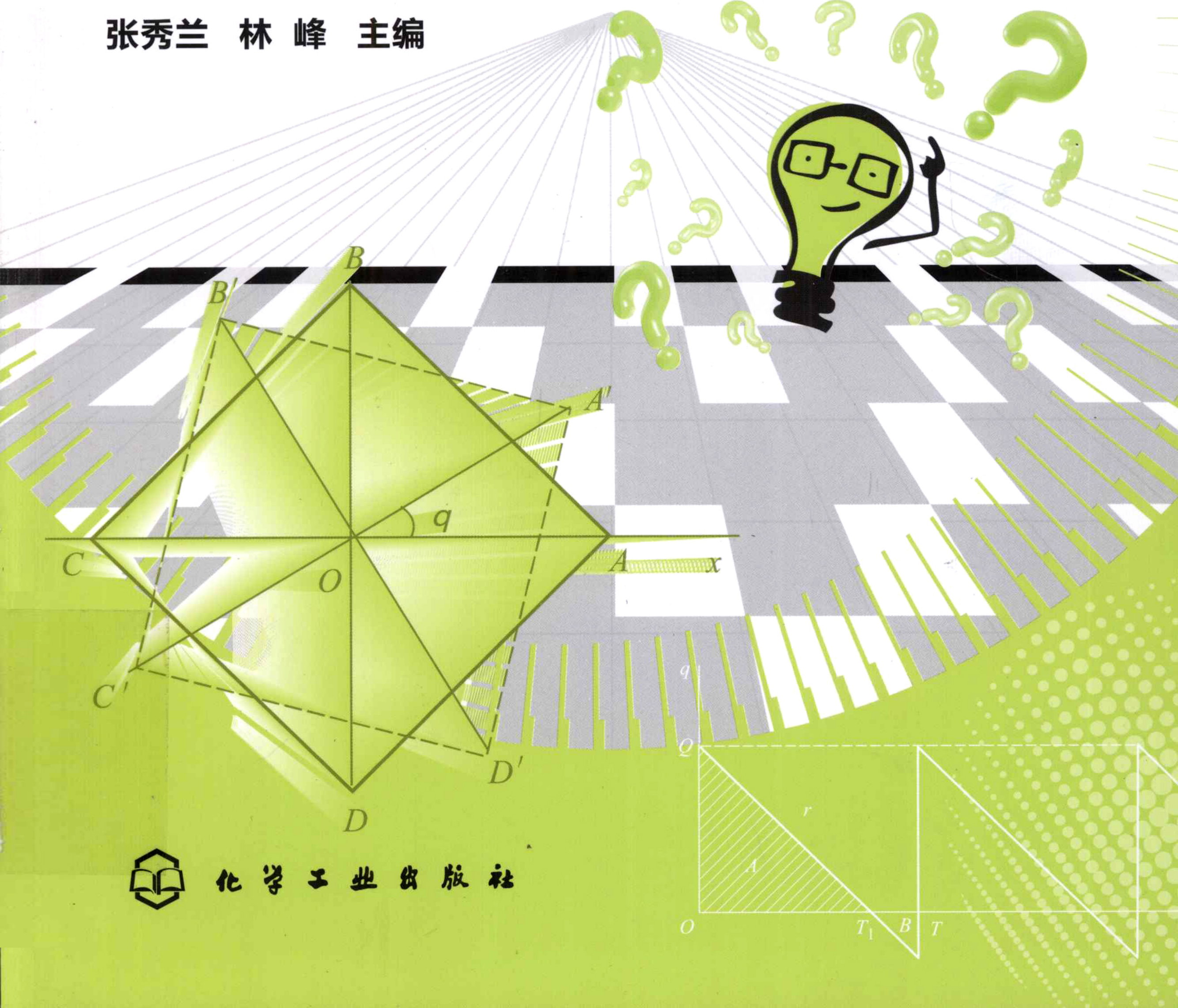
SHUXUE JIANMO
YU SHIYAN

数学建模与实验

张秀兰 林 峰 主编



化学工业出版社

SHUXUE JIANMO
YU SHIYAN

数学建模与实验

张秀兰　林　峰　主编

杨金远　审

化学工业出版社

·北京·

本书由长期从事应用数学和数学建模教学并有着丰富教学经验的教师完成，这些案例有的来自他们的实际课题，有的根据他们了解的实际背景资料和现成的数学模型做了精心改编，内容涉及工程、管理、信息、医疗、经济、社会等领域的实际问题.

本书可作为工科院校理、工、农、林、医、经管等类专业数学建模课程的教材，也可作为数学建模竞赛的辅导材料，还可作为应用数学方面的参考书.

图书在版编目（CIP）数据

数学建模与实验 / 张秀兰，林峰主编. —北京：化学工业出版社，2013.1

ISBN 978-7-122-16122-2

Ⅰ. 数… Ⅱ. ①张… ②林… Ⅲ. ①数学模型-高等学校-教材②高等数学-实验-高等学校-教材 Ⅳ. ①O141.4②O13-33

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 304494 号

责任编辑：曾照华　　文字编辑：谢蓉蓉

责任校对：吴　静　　装帧设计：王晓宇

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街 13 号　邮政编码 100011）

印　　装：三河市延风印装厂

787mm×1092mm　1/16　印张 13¾　字数 375 千字　2013 年 1 月北京第 1 版第 1 次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899

网　　址：http: // www. cip. com. cn

凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：32.00 元

前言
FOREWORD

“没有数学建模的广泛应用就不可能设想会有现代科学，数学建模方法的本质就是把原来的对象用它的‘像’——数学模型来替代，并在计算-逻辑算法的帮助下深入研究该模型. 不是对对象本身而是对它的模型进行研究就能使我们容易和快速地在任何可以想象到的情景下研究模型的性质和行为（这是理论的优势）. 同时也要感谢现代计算方法的威力，对模型的数值实验就能得到纯理论的方法不能得到的有关对象的仔细和深入的研究（这是实验的优势）. 数学建模的方法在覆盖着从技术系统的研制及其控制到复杂的经济和社会发展过程的分析的新领域得到广泛的研究是不足为奇的.”“把对外部世界各种现象或事件的研究归为数学问题的数学建模的方法在各种研究方法，特别是与电子计算机的出现有关的研究方法中，占有主导地位. 数学建模的方法能使人们在解决复杂的科学技术问题时设计出在最佳情势下可行的新的技术手段，并且能预测新的现实.”——摘自《数学百科全书》.

数学建模课程可以搭建起从数学到工程技术等领域的桥梁. 它也是培养学生解决复杂问题能力的重要课程. 编者基于多年的数学建模教学与数学建模竞赛培训、指导工作，参考了国内外各类数学建模教材，编写了本书. 本书在介绍各种数学建模方法的基础上，着重介绍MATLAB、LINGO、Excel 等常用数学模型求解工具，力求通俗易懂、简单实用.

本书由张秀兰、林峰主编，书中第 1 章、第 9 章由张秀兰编写，第 2 章、第 4 章、第 5 章、第 10 章由林峰编写，第 3 章由潘淑平编写，第 6 章、第 8 章由温宇鹏编写，第 7 章由王威娜编写.

杨金远教授对本书做了认真审阅，李泽国教授、赵树魁教授、陈巨龙教授、孙王杰教授等同事提出了宝贵的意见，在编写过程中得到了教务处和教材科同事的大力支持和帮助，在此一并表示感谢.

由于成书比较仓促，难免有疏漏之处，望各位同行和读者指正.

编者

2013 年 1 月

目录
CONTENTS

第1章 建模简介

1.1 数学模型和数学建模

数学模型（mathematical model）和数学建模（mathematical modeling）这两个名词（术语），虽然不能说无人不晓，但是至少可以说，他们已经是无处不在了.

数学模型是对一类实际问题或实际系统发生的现象用数学符号体系表示的一种（近似的）描述. 数学模型是认识外部世界与预测和控制的一个有力工具. 数学模型的分析能够深入了解被研究对象的本质. 而数学建模则是获得该模型、求解该模型并得到结论以及验证结论是否正确的全过程. 数学建模不仅是借助于数学模型对实际问题进行研究的有力工具，而且从应用的观点来看，它是预测和控制所建模系统的行为的强有力的工具. 数学建模本身并不是什么新发现. 自古以来，数学建模的思想和方法是天文学家、物理学家、数学家等用数学作为工具来解决各种实际问题的主要方法. 数学建模这个术语的出现和频繁使用是 20 世纪 60 年代以后的事情. 很重要的原因是由于计算的速度、精度和可视化手段等长期没有解决，以及其他种种原因，导致有了数学模型，但是解不出来，或者算不出来，或者不能及时地算出来，更不能形象地展示出来，从而无法验证数学建模全过程的正确性和可用性. 20 世纪 60 年代，计算机、计算速度和精度，并行计算、网络计算等计算技术以及其他技术突飞猛进地飞速发展，不仅给了数学建模这一技术以极大的推动，更加显示了数学建模的强大威力. 而且，通过数学建模也极大地扩大了数学的应用领域. 甚至在抵押贷款和商业谈判等日常生活中都要用到数学建模的思想和方法. 人们越来越认识到数学和数学建模的重要性. 学习和初步应用数学建模的思想和方法已经成为当代大学生，甚至生活在现代社会的每一个人，应该学习的重要内容.

1.2 数学建模的具体步骤

数学建模一般分成以下四个阶段.

第一阶段是说明与模型的基本对象有关的规律. 这个阶段需要对与实际问题有关的事实具有广泛的认识并深入了解其内部联系. 这个阶段的完成在于用数学术语定性地描述该模型各对象之间的关系.

第二阶段是研究数学模型所引出的数学问题. 这里的问题是解正问题（direct problem），即作为模型分析的结果得到的数据（理论上的结果），然后再将它们与实际问题的观察结果相比较.

在这个阶段，分析数学模型所必需的数学工具以及计算技术——为求解复杂的数学问题而得到定量输出信息的有力手段——起着主要作用. 基于各种不同数学模型而产生的数学问题往往是相同的[例如，线性规划（linear programming）的基本问题反映了性质是各不相同的情形]，这就为把这些典型的数学问题作为由现象中抽象出来的独立对象来考虑提供了依据.

第三阶段是阐明所采用的（假设的）模型是否满足实践标准，即观测结果与此模型的理论推断在观测精度范围内是否相符合. 如果该模型是完全确定的，它的所有参数已被给定，则确定理论推断与观测的偏差给出了正问题的带有偏差后验估计的解. 如果偏差在观测的精度范围之外，则该模型不能被接受. 通常，在构造模型时，某些特征尚未确定，有些问题中模型的特征(参数的、函数的)是确定的，因而输出信息在观测精度范围内与现象的观测结果是可比的，这些问题称为反问题(inverse problem). 如果一个数学模型是这样的，即无论怎样选取特征均不能满足这些条件，则这个模型对该现象的研究是无用的. 应用一个实践标准去评估数学模型，使得人们在构成所研究(假设的)模型的基础的、假设有效的条件下去引出结论. 这是研究不能直接进入的宏观和微观世界的现象的有效方法.

第四阶段是与现象的观测数据相联系对模型的事后分析，以及更新模型. 在科学技术发展过程中，现象的数据变得越来越精确，而根据一个已被公认的数学模型得到的输出不符合对现象的认识的时候已经来临，因此产生了构造新的、更精确的数学模型的必要性.

建立数学模型没有固定的模式，通常与实际问题的性质和建模目的有关. 下面按照一般采用的建模基本过程给出建模的一般步骤.

1. 调查研究（模型准备）

为了对问题的实际背景和内在机理有深刻的了解，在建模前首先应深入生产、科研、社会生活实际进行全面、深入细致的调查和研究. 通过调查研究掌握有关的第一手资料并进一步明确所解决问题的目的，弄清实际对象的特征，按解决问题的目的要求更合理地收集数据，并注意数据精度的要求. 在对实际问题作深入了解时，还应向有关专家或从事实际工作的人员请教，与熟悉具体情况的人进行讨论，这将使我们对问题的了解更快、更便捷.

2. 模型假设

现实问题错综复杂，涉及面广. 一般来说，一个实际问题不经过简化假设，就很难转化成数学问题，即使可能，也很难求解，因此要建立一个数学模型没有必要对现实问题面面俱到，无所不包，只要能反映我们所需要的某一个侧面就可以了. 作假设时既要运用与问题相关的物理、化学、生物、经济、工程等方面的知识，又要充分发挥想象力、洞察力和判断力. 但是，对问题的抽象、简化也不是无条件的，必须按照假设的合理性原则进行. 假设合理性原则有以下几点.

① 目的性原则：根据对象的特征和建模的目的，简化掉那些与建立模型无关或关系不大的因素.

② 简明性原则：所给出的假设条件要简单、准确，有利于构造模型.

③ 真实性原则：假设条件要符合情理，简化带来的误差应满足实际问题所能允许的误差范围. 不合理或过于简单的假设会导致模型失败.

总之，要善于抓住问题的本质因素，忽略次要因素，尽量将问题理想化、简单化、线性化、均匀化. 所作的假设不一定一次完成，如果假设合理，则模型与实际问题比较吻合；如果假设与实际问题不吻合，就要修改假设，修改模型，进一步完善模型.

3. 模型构成

根据所作的假设，首先区分哪些是常量，哪些是变量，哪些是已知的量，哪些是未知的量，然后查明各种量所处的地位、作用和它们之间的关系，利用适当的数学工具刻画各变量

之间的关系，建立相应的数学结构. 在建立模型时究竟采用什么数学工具要根据问题的特征、建模的目的及建模者的数学特长而定. 数学的任一分支都能应用到建模过程中，而同一实际问题也可采用不同数学方法建立起不同的模型. 但应遵循这样一个原则，尽量采用简单的数学工具，以便得到的模型让更多的人了解和应用.

4. 模型求解

构造数学模型之后，根据已知条件和数据，分析模型的特征和模型的结构特点，可以采用解方程、画图形、证明定理、逻辑运算、数值计算等各种传统的和现代的数学方法，特别是计算机技术和数学软件的使用使得解决问题既省力又快速、准确.

5. 模型分析

对模型求解的结果进行数学上的分析，有时是根据问题的性质，分析各变量之间的依赖关系或对解的结果稳定性进行分析，有时是根据所得结果给出对实际问题的发展趋势进行预测，有时给出数学上的最优决策或控制. 除此之外，常常需要进行误差分析、模型对数据的灵敏度分析等.

6. 模型检验和修改

将模型分析和结果“翻译”回到实际对象中，用实际现象、数据等检验模型的合理性和适用性，即验证模型的正确性. 如果由模型计算出来的理论数值与实际数值比较吻合，则模型是成功的（至少是在过去的一段时间里），如果理论数值与实际数值差别太大，则模型是失败的. 通常，一个较成功的模型不仅能解释已知现象，还应能预测一些未知的现象，并能被实践所证明. 如牛顿创立的万有引力定律就经受了对哈雷彗星的研究、海王星的发现等大量事实的考验，才被证明是完全正确的. 应该说，模型的检验对于模型的成败至关重要，必不可少. 当然，如核战争模型就不可能要求接受实际的检验了.

如果检验结果与实际不符或部分不符，并且能肯定建模和求解过程无误的话，一般来讲，问题出在模型假设上. 实际问题比较复杂，但由于理想化后抛弃了一些因素，因此，建立的模型与实际问题就不完全吻合了. 此时，就应该修改或补充假设，对实际问题中的主次因素再次分析，如果某一因素因被忽略而使模型失败或部分失败，则再建立模型时把它考虑进去. 修改时可能去掉或增加一些变量，有时还要改变一些变量的性质，如把变量看成常量，常量看成变量，连续变量看成离散变量，离散变量看成连续变量等，或者调整参数，或者改换数学方法，通常一个模型要经过反复修改才能成功.

7. 模型应用

数学模型应用非常广泛，可以说已经应用到各个领域，而且越来越渗透到社会学科、生命学科、环境学科等. 由于建模是预测的基础，而预测又是决策与控制的前提，因此，用数学模型可对许多部门的实际工作进行指导，如节省开支、减少浪费、增加收入、特别是对未来可以预测和估计，这对促进科学技术和工农业生产的发展具有更大的意义.

归纳起来，建立模型的主要步骤可用图 1.1 来表示.

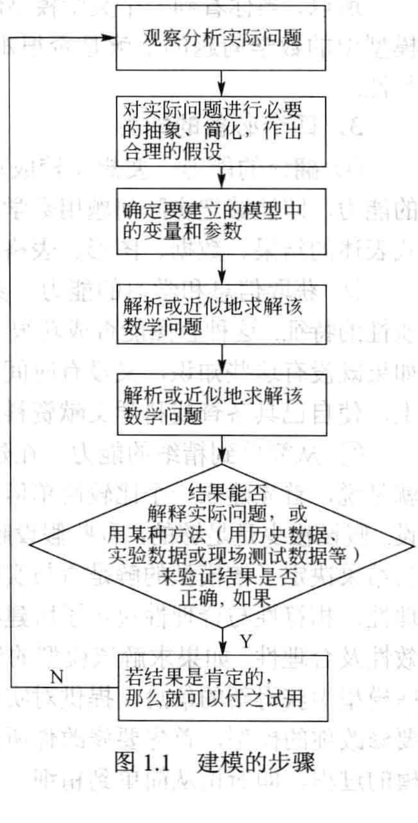


图 1.1 建模的步骤

1.3 数学建模的方法

1. 建立数学模型的方法

把对外部世界各种现象或事件的研究归为数学问题的数学建模的方法在各种研究方法，特别是与电子计算机的出现有关的研究方法中，占有主导地位. 数学建模的方法能使人们在解决复杂的科学技术问题时设计出在最佳情势下可行的新的技术手段，并且能预测新的现象. 数学模型已经显示出是一种重要的控制方法. 它们被应用于多种多样的知识领域且已成为经济计划中的一个必要工具和自动控制系统中的一个重要因素.

现实世界的各种现象和实际问题往往是非常复杂的，因而要解释或求解它们也可能是很不容易的. 要解释或求解它们往往是通过定量或者由图形（形象）来做到的，这就和数学有关. 有时候，甚至必须用数学的思想和方法来解决. 为此，首先要用数学的语言把它们表示出来，成为一个明确的数学问题. 要把极其复杂的现象和实际问题的所有方面都用数学的语言表示，往往是很难的，甚至是根本不可能的，只能是近似地表示为一个数学问题，这就要做合理的简化和假设，然后看看这个解能否解释或解决所提出的数学问题，这就是数学建模的过程. 所以说，数学建模是用数学来解决实际问题的桥梁. 自古以来，天文学家、物理学家和工程技术人员用数学来解决实际问题都是这样做的.

2. 三个最大的难点

① 怎样从实际情况出发作出合理的假设，从而得到可以执行的、合理的数学模型.

② 怎样简明、合理、快捷地求解模型中出现的数学问题，它可能是非常困难的问题.

③ 怎样验证模型是合理、正确、可行的.

所以，当你看到一个数学模型时，就一定要问问或者想一想它的假设是什么，是否合理，模型中的数学问题的求解是否很难，数学上是否已经解决，怎样验证该模型的正确性与可行性.

3. 四个必备的能力

① 翻译的能力　要想比较成功地运用数学建模去解决真正的实际问题，还要具备翻译的能力，即能够把实际问题用数学的语言表述出来，而且能够把通过数学建模得到的数学形式表述的结果、数据、图形、表格，用非专业人士能够读懂的语言表述出来，阐述清楚.

② 获取信息和学习的能力　数学模型就是企图通过抽象的形式来抓住所观察现象的本质性的特征. 这种企图能否成功很大程度上取决于建模者对那些现象的经验知识及数学能力. 如果既没有这些知识，又没有时间来获得这些知识的话，还可以借鉴，学会站在巨人的肩膀上，使自己具备查找科学文献资料的能力，具备学习即用知识的能力.

③ 从简单到精细的能力　在建模过程中还有一条不成文的原则："从简单到精细". 也就是说，首先建立一个比较简单但尽可能合理的模型，模型的粗细取决于你所作出的若干假设. 假设极少是足够的，有些假设超出了合理的范围，用数学模型的解与实际观测数据比较，其结果决定了该模型的解是否与实际情况相符合。与此同时，还要用数学方法检验模型的合理性。相符性与合理性决定了所建模型的价值。同时表示你所作的一个（或多个）假设的有效性及合理性. 如果求解该模型的结果不合理，甚至完全错误，那么它也有可能让我们从这些模型中获得新的信息，提供对实际现象某些方面的洞察，可能告诉改进的方向，于是你就要修改你的模型，首先要修改你所作的假设，建模的步骤就要再执行一遍，多次反复循环建模的过程，即所谓从简单到精细.

④ 数学软件的应用能力　不论是相关数据分析和处理，还是模型的求解及解释结果的精度和可靠性方面都离不开数学软件的应用，运用 SPSS、SAS、MATLAB、LINGO、Excel 等软件的能力是建模必备的.

1.4　数学模型的特点和分类

1．数学模型的特点

① 它是客观事物的一种模拟或抽象，是为了一种特殊目的而作的一个抽象化、简单化的数学结构，它的一个重要作用就是加深人们对客观事物如何运行的理解. 因此，舍弃次要因素，突出主要因素，用一种简化的方式来表现一个复杂的系统和现象. 对事物的模拟虽源于现实，但非实际的原型，要高于现实.

② 它是数学上的抽象，在数值上可以作为公式应用，可以推广到与原物相似的一类问题.

③ 可以作为某事物的数学语言，可以译成算法语言编写程序进行计算机处理.

2．数学模型的分类

通常人们按照问题的性质出发把数学模型分为：确定性模型和随机模型，离散模型和连续模型；按照从机理还是经验（数据）出发分为机理模型和经验模型；按时间关系分为静态模型和动态模型；按照模型中出现的数学问题分为初等模型、几何模型、图论模型、微分方程模型、概率模型、统计模型、层次分析法模型、系统动力学模型、灰色系统模型；按模型应用领域（或所属学科）分为人口发展模型、交通模型、环境模型、生态模型、经济模型、城镇规划模型、水资源模型、再生资源利用模型、污染模型；按建模目的分为分析模型、预测模型、优化模型、决策模型、控制模型；按对研究对象的了解程度分为白箱模型、灰箱模型、黑箱模型；按系统的性质分为微观模型、宏观模型、集中参数模型、分布参数模型等. 还可以论述怎样从子模型构造总体模型，抽象成为数学问题的种种手段、方法和技巧. 各行各业的数学模型和建模技巧千千万万.

模型的分类问题并没有什么重要意义，本课程主要讨论数学模型的建立，请大家把注意力集中在每个模型本身上.

1.5　建模示例

示例 1 一个高为 2m 的球体容器里盛了一半的水，水从它的底部小孔流出，小孔的横截面积为 1cm^2. 试求放空容器所需要的时间.

对孔口的流速做两条假设：

① t 时刻的流速 v 依赖于此刻容器内水的高度 $h(t)$；

② 整个放水过程无能量损失.

分析放空容器：

容器内水的体积为零；

容器内水的高度为零.

模型建立：由水力学知，水从孔口流出的流量 Q 为通过“孔口横截面的水的体积 V 对时

间 t 的变化率"，即

$$Q=\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=0.62S\sqrt{2gh}$$

式中　S——孔口横截面积，cm^2；

$h(t)$——水面高度，cm；

t——时间，s.

当 S=1cm^2，有
$$\mathrm{d}V=0.62\sqrt{2gh}\,\mathrm{d}t \tag{1.1}$$

在[t，$t+\Delta t$]内，水面高度 $h(t)$ 降至 $h+\Delta h(\Delta h<0)$，容器中水的体积的改变量为

$$\Delta V=V(h)-V(h+\Delta h)\approx -\pi r^2\Delta h+o(\Delta h).$$

记
$$r=\sqrt{100^2-(100-h)^2}=\sqrt{200h-h^2},$$

令
$$\Delta t\to 0 \text{ 得}\quad \mathrm{d}V=-\pi r^2\mathrm{d}h \tag{1.2}$$

比较式（1.1）、式（1.2）两式得微分方程如下：

$$\begin{cases}0.62\sqrt{2gh}\mathrm{d}t=-\pi(200h-h^2)\mathrm{d}h,\\ h\big|_{t=0}=100.\end{cases}$$

积分后整理得

$$t=\frac{\pi}{4.65\sqrt{2g}}(700000-1000h^{\frac{3}{2}}+3h^{\frac{5}{2}}).$$

令 h=0，求得完全排空需要约 2h58min.

示例 2 常染色体遗传问题.

农场的植物园中某种植物的基因型为 AA, Aa 和 aa. 农场计划采用 AA 型植物与每种基因植物结合的方案培育植物后代. 那么经过若干年后，这种植物的任一代的三种基因型分布如何？

1．抽象为数学问题

根据亲体基因遗传方式，由双体基因型所有可能结合的概率分布如表 1.1 所示，求出其后代在若干年后形成每种基因型的概率分布.

表 1.1　基因型的概率分布

后代基因型	父体-母体（n–1 代）基因型					
	AA-AA	AA-Aa	AA-aa	Aa-Aa	Aa-aa	aa-aa
AA	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	0
Aa	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
aa	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1

2．模型假设

① 设 a_n,b_n,c_n 分别表示第 n 代植物中基因型为 AA,Aa,aa 的植物总数的百分率，n=0, 1, …, $x(n)$为第 n 代植物的基因型分布：

$$\boldsymbol{x}(n)=\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\\ c_n\end{pmatrix},$$

当 n=0 时
$$\boldsymbol{x}(0)=\begin{pmatrix}a_0\\b_0\\c_0\end{pmatrix},$$
表示植物基因型的初始分布(即培育开始时的分布). 显然有 $a_0+b_0+c_0=1$.

② 第 n–1 代与第 n 代的基因型分布关系是通过表 1.1 确定的.

3．模型构成

根据假设②，现考虑第 n 代的 AA 型. 由于第 n–1 代的 AA 型与 AA 型结合，后代全部是 AA 型；第 n–1 代的 Aa 型与 AA 型结合，后代 AA 型的可能性为 $\frac{1}{2}$；而 n–1 代的 aa 型与 AA 型的结合，后代不可能是 AA 或 aa 型. 因此当 n=1, 2, …，时
$$a_n=1\cdot a_{n-1}+\frac{1}{2}\cdot b_{n-1}+0\cdot c_{n-1},$$
即
$$a_n=a_{n-1}+\frac{1}{2}\cdot b_{n-1}\tag{1.3}$$
类似考虑，分别可推出
$$b_n=c_{n-1}+\frac{1}{2}\cdot b_{n-1}\tag{1.4}$$
$$c_n=0\tag{1.5}$$
将式（1.3)、式（1.4）和式（1.5）相加，得
$$a_n+b_n+c_n=a_{n-1}+b_{n-1}+c_{n-1}.$$
根据假设①，有
$$a_n+b_n+c_n=a_0+b_0+c_0=1.$$
将式（1.3)、式（1.4）和式（1.5）联立，并用矩阵形式表示为
$$\boldsymbol{x}(n)=\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}(n-1)\qquad(n=1, 2, \ldots),\tag{1.6}$$
其中
$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$
由式（1.6）进行递推，便得到第 n 代基因型分布的数学模型
$$\boldsymbol{x}(n)=\boldsymbol{M}\boldsymbol{x}(n-1)=\boldsymbol{M}^2\boldsymbol{x}(n-2)=\cdots=\boldsymbol{M}^n\boldsymbol{x}(0)\tag{1.7}$$
它表明历代基因型分布可由初始分布和矩阵 $\boldsymbol{M}$ 确定.

4．模型求解

为了计算 $\boldsymbol{M}^n$，将 $\boldsymbol{M}$ 对角化，即求出可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和对角阵 $\boldsymbol{D}$，使
$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}^{-1},$$
因而有
$$\boldsymbol{M}^n=\boldsymbol{P}\boldsymbol{D}^n\boldsymbol{P}^{-1}\qquad(n=1, 2, \ldots),$$
其中

$$\boldsymbol{D}_n=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_3\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\lambda_1^n & & 0\\ & \lambda_2^n & \\ 0 & & \lambda_3^n\end{pmatrix},$$

这里$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$是矩阵$\boldsymbol{M}$的三个特征值. 对于式（1.6）中的$\boldsymbol{M}$，易求得其特征值和特征向量分别为

$$\lambda_1=1,\ \lambda_2=\frac{1}{2},\ \lambda_3=0\ ;$$

$$\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{e}_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}.$$

因此

$$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{e}_1\quad \boldsymbol{e}_2\quad \boldsymbol{e}_3)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

通过计算，得$\boldsymbol{P}^{-1}$=$\boldsymbol{P}$，因此有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(n)&=\boldsymbol{M}^n\boldsymbol{x}(0)=(\boldsymbol{P}\boldsymbol{D}^n\boldsymbol{P}^{-1})\boldsymbol{x}(0)\\ &=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\ b_0\\ c_0\end{pmatrix},\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{x}(n)=\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\\ c_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\ b_0\\ c_0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_0+b_0+c_0-\left(\frac{1}{2}\right)^n b_0-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}c_0\\ \left(\frac{1}{2}\right)^n b_0+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}c_0\\ 0\end{pmatrix},$$

所以有

$$\left.\begin{aligned}a_n&=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n b_0-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}c_0,\\ b_n&=\left(\frac{1}{2}\right)^n b_0+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}c_0,\\ c_n&=0.\end{aligned}\right\}\tag{1.8}$$

当$n \to \infty$，$\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$，从式（1.8）中可得到

$$a_n \to 1,\ b_n \to 0,\ c_n \to 0,$$

即在极限情况下，培育的植物都是AA型.

示例3 压力容器封头接管尺寸的设计与计算.

许多压力容器的接管是安装在封头上的，多数压力容器使用的是标准椭圆形封头，标准椭圆形封头的顶端大R处到近直边的小r处过渡部位曲率半径变化最大. GB150—1998标准规定，在封头过渡部分开孔时，其孔的中心线宜垂直于封头表面. 但有的设备由于公称直径的限制及工艺接管的需要，接管或入孔要开到封头过渡区域. 一般的设计图纸只标注该接管中心线伸出高度的尺寸或接管法兰密封面距封头切线的距离，不直接给出接管的长度，这样给制造厂带来了如何确定该区域接管长度的计算困难. 请对标准椭圆封头上接管内伸长度尺寸进行优化设计与计算，使设计计算快速、精确，方案理想.

1．标准椭圆形封头曲线方程的基本模型

如图1.2所示，设椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，其中，$x, y$为椭圆上任意一点的坐标，$a$为长半轴，$b$为短半轴.

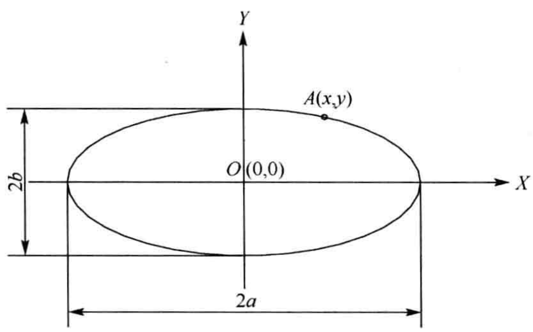


图1.2 椭圆坐标图

2．标准椭圆形封头上任意位置接管长度的计算模型

设某容器的公称直径为D_i，接管M（外径为ϕ）装配于标准椭圆形封头的大R部位. 见图1.3.

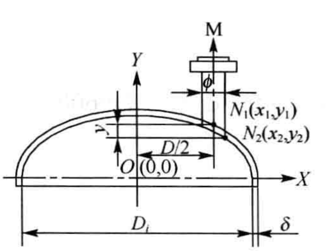


图1.3 接管位于标准椭圆型封头R部位

设该接管中心线距封头中心线的距离为$D/2$，计算M管的外壁与封头内壁的交点N_2与