普通高等教育“十二五”规划教材
机械类专业系列教材

# 有限单元法及应用

刘巨保　罗　敏　编著
丁皓江　主审

配套课件

中国电力出版社
CHINA ELECTRIC POWER PRESS

普通高等教育“十二五”规划教材
机械类专业系列教材

# 有限单元法及应用

编著 刘巨保 罗 敏
主审 丁皓江



中国电力出版社
CHINA ELECTRIC POWER PRESS

## 内 容 提 要

本书为普通高等教育“十二五”规划教材。本书以简明、浅显的方式系统地阐述了结构分析中的有限元法基本理论及其应用。内容包括杆系结构、弹性力学平面、轴对称问题、空间问题、板壳问题、弹性稳定、结构动力学、材料非线性、几何非线性、接触非线性、石油钻采管柱非线性有限元分析，管道内旋转细长梁固液耦合动力学分析，管束与轴向流多场耦合数值计算方法研究。本书内容丰富，概念清晰，注重理论联系实际，附有大量工程实例。本书提供电子课件。

本书可作为工科院校高年级学生和研究生的教材或参考书，也可供机械、石油工程等专业的技术人员参考。

**图书在版编目（CIP）数据**

有限单元法及应用/刘巨保，罗敏编著．—北京：中国电力出版社，2013.7

普通高等教育“十二五”规划教材

ISBN 978-7-5123-4029-9

Ⅰ.①有… Ⅱ.①刘… ②罗… Ⅲ.①有限元法一高等学校一教材 Ⅳ.①O241.82

中国版本图书馆CIP数据核字（2013）第023222号

中国电力出版社出版、发行

（北京市东城区北京站西街19号 100005 http：//www.cepp.sgcc.com.cn）

航远印刷有限公司印刷

各地新华书店经售

*

2013年7月第一版 2013年7月北京第一次印刷

787毫米×1092毫米 16开本 18.5印张 446千字

定价**33.00**元

# 前　言

近30年来，随着计算机技术的飞速发展，有限元法已经成为工程力学问题数值分析的有效方法之一。强大的分析能力是有限元法最突出的特点，它所解决的问题种类之广泛，几乎囊括了结构分析的各个方面。本书力求对结构分析中经常遇到的几类典型问题的有限元解法进行阐述。

本书是根据作者多年来从事石油石化装备力学研究成果和教学经验编写而成。全书注重有限元法的基本理论与方法阐述和工程应用相结合，书中论述了石油钻采管柱接触非线性分析的间隙元法、动力间隙元法和流固耦合分析方法，石油石化特殊设备的有限元分析，给出了典型工程实例的分析过程和计算结果，以便读者学有所用。

在本书的编写过程中，内容上力求理论联系实际，紧密结合工程应用；表达上力求精练，深入浅出。全书共十四章，主要内容包括有限元法的基本概念，杆系结构有限元法，弹性力学平面问题有限元法，弹性力学轴对称问题有限元法，弹性力学空间问题有限元法，板壳问题的有限元法，弹性稳定问题的有限元分析，结构动力学问题的有限元法，材料非线性有限元法，几何非线性问题有限元法，接触非线性有限元分析，石油钻采管柱非线性有限元分析，管道内旋转细长梁固液耦合动力学分析，管束与轴向流多场耦合数值计算方法研究。

本书由东北石油大学刘巨保教授、罗敏教授编著，张强、岳欠杯参加编写。具体编写分工如下：第一、二、三章由岳欠杯编写，第四、十一、十四章由张强编写，第五、六、七、十二章由刘巨保编写，第八、九、十、十三章由罗敏编写。

在本书编写过程中，东北石油大学张学鸿教授、张文福教授、李治森老师给予了很大帮助，在此向他们表示衷心地感谢。

本书由浙江大学丁皓江教授主审，并提出了许多宝贵意见和建议，在此表示衷心地感谢。

由于编者水平所限，书中难免有疏漏或不足之处，敬请读者批评指正。

编　者

2013年1月

# 目 录

# 第一章　有限元法的基本概念

## 第一节　概　　述

在石油石化设备研制中，首先要满足工艺提出的各种要求，其次要保证设备能够安全可靠的工作，尤其是在高温高压、有毒介质和井下工作时，对设备安全可靠度要求更高。这就需要对石油石化设备的力学分析更加准确，方可提供可靠的理论依据，确保石油石化设备的安全可靠运行。

石油石化设备力学分析的特殊性主要表现在以下三个方面：

(1) 设备结构较复杂。例如，钻井过程中的井架和底座是由数千根杆件采用不同连接方式形成的大型空间刚架结构，化工设备中开有各种孔、配有各种筋的化工容器等。

(2) 设备载荷复杂。例如，大部分石油石化设备都受到自重、风载、雪载、温度、压力等各种载荷的综合作用。

(3) 边界条件复杂。例如，井下管柱与井壁的随机多向接触摩擦，井架底座和容器的地基下陷等。

这些特殊性给石油石化设备的力学分析带来了一定难度，很难用工程力学理论描述结构的实际受力状态或用弹性力学方法得到问题的解析解。为此，当计算机问世以后，人们研究了各种数值方法来分析这些复杂的工程问题，主要包括有限元法、有限差分法、边界元法、加权残数法等。其中，有限元法以其概念浅显、应用范围广、计算效率高等特征在工程中得到了广泛应用，已成为工程师们解决结构部件应力分析与强度、刚度设计问题的主要手段之一。

有限元法是一种获得工程问题近似解的数值方法。自从 20 世纪 50 年代以来，它的研究范围已从杆、梁类结构扩展到弹性力学平面问题、空间问题、板壳问题，由静力平衡问题扩展到动力问题、波动问题和稳定问题；分析的对象从弹性材料扩展到黏弹性、塑性、黏塑性及复合材料等，从固体力学扩展到流体力学、传热学及连续介质力学等领域。在工程实际中的作用从分析与校核扩展到优化设计，并与计算机辅助设计、计算机辅助生产等技术相结合。可以预见，随着计算机技术的不断发展，有限元法作为一种有着坚实理论基础和广泛应用领域的数值分析方法，必将在石油石化设备力学分析中得到更加广泛的应用。

## 第二节　有限元的发展及常用软件介绍

### 一、有限元的发展

计算力学是计算机科学、计算数学与力学学科相结合的产物。随着计算机软、硬件技术的快速发展，计算力学也得到了迅速发展，成为力学工作者和工程技术人员解决自然科学和工程实践中力学问题的重要手段。

计算力学的主要方法是有限差分法、有限元法和边界元法。有限差分法从数学的角度用差分代替微分，将力学中的微分方程转化为代数方程，从而大大拓宽了力学学科的应用范

围。有限元法是将建立的计算模型、离散方法、数值求解和计算机程序实现统一的方法，通过变分原理将原问题的泛函转化成代数方程进行求解。有限元法的问世促进了计算力学的发展。20世纪70年代初出现了边界元法，对于分析某些工程实际问题，边界元法具有其突出的优点。上述三种方法被称为计算力学的三大支柱。除此之外，计算力学还包含了其他一些重要分支，如加权残数法、半解析半数值法等。

随着计算机的发展，有限元法已成为求解工程问题的最有效的数值方法之一。

有限元法FEA（finite element analysis）这一名称是1960年美国的克拉夫（R. W. Clough）在一篇名为《平面应力分析的有限元法》的论文中首先使用的。从“有限元”这个名词第一次出现，到今天有限元在工程上得到广泛应用，经历了五十多年的发展历史，理论和算法都已经日趋完善。

有限元的核心思想是结构的离散化，就是将实际结构假想地离散为有限数目的规则单元组合体，实际结构的物理性能可以通过对离散体进行分析，得出满足工程精度的近似结果来替代对实际结构的分析，这样可以解决很多工程实际中需要解决而理论分析又无法解决的复杂问题。

近年来，随着计算机技术的普及和计算速度的不断提高，有限元法在工程设计和分析中得到了越来越广泛的重视，已经成为解决复杂的工程分析计算问题的有效途径。现在从汽车到航天飞机几乎所有的设计制造都已离不开有限元分析计算，其在机械制造、材料加工、航空航天、汽车、土木建筑、电子电器、国防军工、船舶、铁道、石油化工、能源等各个领域的广泛使用已使设计水平发生了质的飞跃，主要表现在以下几个方面：增加产品和工程的可靠性；在产品的设计阶段发现潜在的问题；经过分析计算，采用优化设计方案，降低原材料成本；缩短产品投向市场的时间；模拟试验方案，减少试验次数，从而减少试验经费。

**二、有限元常用软件简介**

国际上早在20世纪60年代初就开始投入大量的人力和物力开发有限元分析程序，但真正的CAE（计算机辅助工程）软件诞生于20世纪70年代初期，而近20年则是CAE软件商品化的发展阶段，CAE开发商为满足市场需求和适应计算机硬、软件技术的迅速发展，在大力推销其软件产品的同时，对软件的功能、性能、用户界面和前、后处理能力，都进行了大幅度的改进与扩充。市场上知名的CAE软件，在功能、性能、易用性、可靠性及对运行环境的适应性方面，基本上能够满足用户的当前需求，也为科学技术的发展和工程应用做出了巨大的贡献。目前，流行的CAE分析软件主要有ANSYS、NASTRAN、ADINA、ABAQUS、MARC、COSMOS等。

下面主要介绍ANSYS软件。ANSYS软件是集结构、热、流体、电磁场、声场和耦合场分析于一体的大型通用有限元分析软件。

1970年成立的美国ANSYS公司是世界CAE行业最著名的公司之一，ANSYS软件具有极其强大的前、后处理器及分析能力，广泛应用于核工业、航空航天、能源、石油化工、土木工程、交通、医药、机械制造等各个领域。例如，三峡工程、二滩电站、黄河下游特大型公路斜拉桥、国家大剧院、浦东国际机场、上海科技城太空城、深圳南湖路花园大厦等，在结构设计时都采用了ANSYS作为分析工具。

ANSYS的界面非常友好，类似于AutoCAD，其使用方法也和AutoCAD有相似的地方：GUI方式和命令流方式。GUI（graphical user interface）方式即通过点击菜单项，在弹

出的对话框中输入参数，并进行相应设置，从而进行问题的分析和求解；命令流方式是指在ANSYS的命令流输入窗口输入求解所需的命令，通过执行这些命令来实现问题的解答。GUI方式比较容易掌握，但是在熟悉了ANSYS的命令之后，使用命令流方式要比GUI方式效率高出许多。

在四十多年的发展过程中，ANSYS不断改进提高，功能不断增强，目前已发展到14.5版本。

## 第三节　有限元分析的基本步骤

### 一、模型建立和结构离散化

1. 模型建立

对石油石化设备进行有限元分析时，首先遇到的问题就是对实际设备进行假设和简化，即考虑主要因素，忽略次要因素，从而建立适合有限元分析的力学模型。一个好的力学模型应满足以下两个条件：

（1）模型能基本反映设备的真实受力状态，分析计算结果能满足工程需要。

（2）模型考虑因素尽量少，研究对象简单，以便降低有限元分析时的工作量。

石油石化设备有限元分析的建模过程主要包括以下三方面：

（1）结构简化。根据设备的实际受力状态、对称和反对称性等原理，在保证设备受力状态基本不变的前提下，尽量简化设备的结构，达到降低计算工作量、减少数据处理的目的。例如Y形汇流三通，利用结构对称性原理，选取四分之一结构为研究对象，就可得到整个三通的受力变形状态，大大降低了计算工作量。

（2）载荷处理。应考虑引起结构受力状态变化的主要外载荷，一些次要的载荷可以暂时忽略不计。

（3）边界条件处理。尽量利用有限元分析程序提供的各种边界处理方法来模拟实际设备的力和位移边界条件，在模拟过程中要确保模型为“结构”，而不能为“机构”。如图1-1所示的井架起升工况，图1-1（a）所示模型为机构模型，无法进行有限元分析；图1-1（b）所示模型为结构模型。

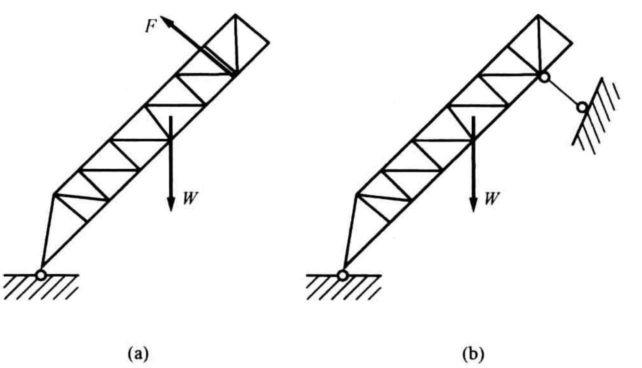


图1-1　井架起升工况时的力学模型

（a）机构模型；（b）结构模型

建模过程是一个难度较大的技术问题，也是石油石化设备有限元分析中的关键步骤之一。只有掌握丰富的理论和实践经验，经过反复的分析和探索，才能建立起一个较佳的有限元分析力学模型。

2. 结构离散化

杆系结构是由若干个杆件组成，离散时可把每一个杆件都看做是一个单元。离散后的桁架单元是二力杆件，刚架单元是梁、柱单元。

在连续弹性体中，需要人为地将其离散成为一个离散的结构物。该结构物由有限个有限大小的构件在有限的节点上相互连接而成。将有限大小的构件称为有限单元，简称单元。

各单元彼此之间的连接点称为节点。在桁架、弹性平面、弹性空间等问题中，把连接点都取为铰节点，以节点位移作为未知量。如果相邻单元之间有法向力和弯矩传递，则必须把节点当做刚性节点，如利用有限元位移法求解刚架和弯曲板问题。在有限元法中，由所选用单元的自由度、广义力和广义位移来决定相邻单元公共节点的连接方式。

有限元离散化过程实际上是将具有无限个自由度的弹性体转化为有限个自由度的单元集合体。从数学上讲，把连续形式的微分方程转化为代数方程组，以便用计算机进行数值求解。有限元法得到的应力和位移一般都是近似值，当单元划分得足够多，单元位移函数选择合理时，其有限元法分析得到的结果非常接近精确解，能够完全满足于实际工程问题的需要。

**二、单元位移函数和解答的收敛条件**

1. 单元位移函数

正如计算数学里用许多足够小的直线段连接成折线去模拟一段光滑曲线那样，有限元法从物理的角度设想将处于简单状态的许多足够小的微元体连接起来去模拟真实结构物。例如，假设在这些小片内的应变、弯矩是常量等。很自然，从数学和力学的角度考虑，都希望采用较大的一片（单元）去模拟实际结构物，又能得到一个令人满意的近似。为此，有限元位移法不得不在单元内假定二次、三次，甚至更高次的位移场，就像用简单曲线去模拟复杂曲线那样。

设单元内任意一点的位移为

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{N}\boldsymbol{\delta}^{e} \tag{1-1}$$

式中 $\boldsymbol{f}$——单元内任意点的位移分量列阵；

$\boldsymbol{\delta}^{e}$——单元的节点位移分量列阵；

$\boldsymbol{N}$——形状函数矩阵，它是以 $\boldsymbol{\delta}^{e}$ 表示 $\boldsymbol{f}$ 的转换矩阵。

节点自由度中的某些量可以是位移，而另外的一些量可以是位移的导数，如转角。因此，称为广义位移，所对应的力、弯矩等称为广义力。

在有限元法中，建立式（1-1）中的位移函数（或称为位移模式）一般有两种方法。

（1）广义坐标法。广义坐标法的基本思想是在广义坐标系下，利用节点位移分量列阵 $\boldsymbol{\delta}^{e}$，经过一系列的矩阵计算，求得形状函数 $\boldsymbol{N}$。这种方法的推导过程相当复杂，尤其对于复杂单元，矩阵求逆变得相当困难。

（2）插值函数法。插值函数法的基本思想是借助于直观、试凑及对类似而又简单单元的熟悉形式，提出所需要的形状函数 $\boldsymbol{N}$ 或插值多项式，而不需经过广义坐标的中间过程。这种方法推导过程简单，但试凑一种新单元的形状函数 $\boldsymbol{N}$ 比较困难。因此，在各种单元位移函数建立中，主要采用插值函数法，具体讨论见以后章节。

2. 解答的收敛条件

在选择单元位移函数时，应当保证有限元法解答的收敛性，即当网格逐渐加密时，有限元解答的序列收敛到精确解。或者，当单元尺寸固定时，每个单元的自由度数越多，有限元法的解答越趋近于精确解。

有限元法收敛条件如下：

（1）在单元内，位移函数必须是连续的。用来构造单元位移函数的多项式是单值连续的，因此选用多项式为插值函数的单元位移函数在单元内是连续的。

（2）单元位移函数必须包括刚性位移项。每个单元的位移总可以分解为刚性位移和它自身变形位移两个部分。由于一个单元牵连在另一些单元上，其他单元发生变形时必将带动该单元做刚性位移。例如，悬臂梁的自由端单元跟随相邻单元做刚性位移（见图1-2）。因此，为模拟一个单元的真实位移，假定的单元位移函数必须包括弹性力学的刚体位移项。

当节点位移具有相应于刚体位移的给定值时，单元应变和节点力必为零。当采用不包括刚性位移项的单元位移函数时，就会出现多余的应变和节点力，因此节点的平衡方程受到限制。

（3）在单元内，位移函数必须包括常应变项。每一个单元的应变状态总可以分解为不依赖于单元内各点位置的常应变和由各点位置决定的变量应变。当单元尺寸足够小时，单元中各点的应变趋于相等，单元的变形比较均匀，因而常应变就成为应变的主要部分。为反映单元的应变状态，单元位移函数包括常应变是必须的要求。

例如，一根承受分布轴向载荷的杆（见图1-3），沿杆长的一个单元 $\Delta x$，当 $\Delta x$ 逼近零时，在单元内应变的任何变化与常应变相比都变得没有意义。如果单元位移函数包括常应变项，当对 $\Delta x$ 加密时，可以任意逼近位移和应变的精确值。

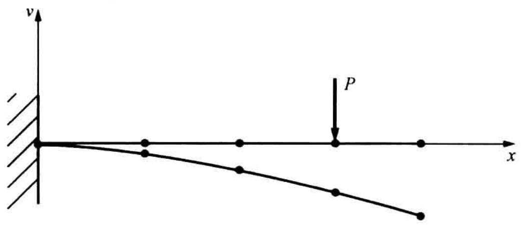


图1-2　悬臂梁的弯曲变形图

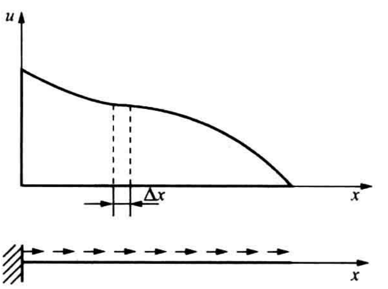


图1-3　杆的轴向载荷位移图

（4）关于相邻单元公共边界上的连续性。有限元法一定要求满足有公共节点的单元在节点处的连续性，在连续体弹性力学中，位移是处处连续的。从模拟真实结构物着想，若能构造一个单元位移函数在相邻单元之间是连续的，不发生相互脱离开裂和相互侵入重叠，那是理想的单元位移函数。不难想象，如果单元非常小，并且在相邻单元的公共节点处具有相同的位移，也就能保证它们在整个公共边界上，大致取得相同的位移，在相邻单元之间接近连续。在板、壳的相邻单元之间，还要求斜率不发生突变，只有这样才能保证结构的应变能是有界的。

以上提及的4条收敛条件，只要假定的位移函数由多项式构成，满足第（1）条要求是不成问题的。第（2）、（3）条说明了在构造单元位移函数时，不能遗漏了常数项、一次项等低阶项。第（1）、（2）、（3）条是有限元法解答收敛的必要条件，和第（4）条一起构成了有限元法解答收敛的充要条件。凡满足第（2）、（3）条的单元又称为完备单元，满足第（4）条的单元称为协调单元。对于完备、协调的单元，其解答的收敛性是单调的。

**三、单元分析**

单元位移函数确定后，利用弹性力学的基本方程就可以进行单元分析。单元分析的主要

内容就是由单元的节点位移表达出单元的应变和应力，从而建立单元的平衡方程，并求出单元的刚度矩阵（简称单刚）。

1. 单元应变

将单元位移函数式（1-1）代入弹性力学的几何方程，可以推出单元内任意点的应变为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{N}\boldsymbol{\delta}^{e} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{\delta}^{e} \tag{1-2}$$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{N} \tag{1-3}$$

式中 $\boldsymbol{\varepsilon}$——应变分量列阵；

$\boldsymbol{H}$——由微分符组成的矩阵，也称微分算子矩阵；

$\boldsymbol{B}$——单元的应变矩阵。

式（1-2）是用单元的节点位移分量 $\boldsymbol{\delta}^{e}$ 表达单元内应变分量 $\boldsymbol{\varepsilon}$。

2. 单元应力

借助式（1-2），用弹性力学物理方程可以计算出单元内任意点的应力分量。如果单元内存在初应变 $\boldsymbol{\varepsilon}_0$，则由实际应变与初应变的差来计算单元内的应力。

在线弹性范围内，应力公式为

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_0) = \boldsymbol{S}\boldsymbol{\delta}^{e} + \boldsymbol{\sigma}_0 \tag{1-4}$$

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{B} \tag{1-5}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_0 = -\boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0 \tag{1-6}$$

式中 $\boldsymbol{\sigma}$——应力分量列阵；

$\boldsymbol{D}$——弹性矩阵；

$\boldsymbol{S}$——应力矩阵；

$\boldsymbol{\varepsilon}_0$——初应变分量列阵；

$\boldsymbol{\sigma}_0$——初应力分量列阵。

如果不存在初应变 $\boldsymbol{\varepsilon}_0$，则式（1-4）变为

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{\delta}^{e} \tag{1-7}$$

在以后的分析中，若不加以声明，都认为初应变 $\boldsymbol{\varepsilon}_0 = 0$，用式（1-7）计算单元应力即可。

3. 单元刚度矩阵

在单元分析中，把节点对单元的作用力定义为节点力，它是一个集中力。

设作用在单元上只有节点力 $\boldsymbol{F}^{e}$，没有其他外载荷。利用虚功方程，即外力虚功的总和等于单元内应力虚功的总和，可建立式（1-8）

$$(\boldsymbol{\delta}^{*e})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{e} = \iiint_V (\boldsymbol{\varepsilon}^{*})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}V \tag{1-8}$$

式中 $\boldsymbol{\delta}^{*e}$——节点虚位移分量列阵；

$\boldsymbol{\varepsilon}^{*}$——相应的单元虚应变分量列阵。

将式（1-7）和式 $\boldsymbol{\varepsilon}^{*} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{\delta}^{*e}$ 代入式（1-8），并注意 $\boldsymbol{\delta}^{*e}$ 和 $\boldsymbol{\delta}^{e}$ 与单元坐标无关，则得到

$$(\boldsymbol{\delta}^{*e})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{e} = (\boldsymbol{\delta}^{*e})^{\mathrm{T}}\iiint_V \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}\,\mathrm{d}V\boldsymbol{\delta}^{e} \tag{1-9}$$

由于 $\boldsymbol{\delta}^{*e}$ 是任意的，则式（1-9）约简为

$$\boldsymbol{F}^{e} = \boldsymbol{K}^{e}\boldsymbol{\delta}^{e} \tag{1-10}$$

$$\boldsymbol{K}^{e}=\iiint_{V}\boldsymbol{B}^{T}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}\,\mathrm{d}V \tag{1-11}$$

式中　$\boldsymbol{K}^e$——单元刚度矩阵，简称单刚。

式（1-10）为单元平衡方程，表达了节点位移 $\boldsymbol{\delta}^e$ 与节点力 $\boldsymbol{F}^e$ 的关系，在单元分析中占很重要的地位。

单刚 $\boldsymbol{K}^e$ 的物理意义就像弹簧刚度系数那样，它的一列元素是当单元的某一节点沿一个坐标方向产生单位位移时，所发生的各节点力分量。具体的单刚表达式，取决于单元的类型及其具体形状、大小和物理性质。对某一种具体的单元，其单刚的具体内容还与坐标选择及单元在坐标系中的方位有关。在一种坐标系下的单刚，通过坐标变换可以得到在另一坐标系下的单刚。

4. 单元等效节点力

在有限元法分析中，单元只在节点处连接，所以外力只能作用在节点处。而实际结构物的单元内，可能有分布体力和集中力作用；在单元的边界上，也可能有分布面力作用。因此，必须把上述这些力以等效的原则移置到节点上，才能形成式（1-10）中的节点力 $\boldsymbol{F}^e$，$\boldsymbol{F}^e$ 也被称为单元等效节点力列阵。

设单元内任意一点 $M(x, y, z)$ 上作用集中力为 $\boldsymbol{P}$；当单元产生任一虚位移，此时 $M$ 点的虚位移为 $\boldsymbol{f}^*$，节点虚位移为 $\boldsymbol{\delta}^{*e}$；根据静力等效原则，即节点力与原载荷在任意虚位移上所做的虚功相等，可以建立关系式

$$(\boldsymbol{\delta}^{*e})^{T}\boldsymbol{F}^{e}=(\boldsymbol{f}^{*})^{T}\boldsymbol{P} \tag{1-12}$$

将 $\boldsymbol{f}^*=\boldsymbol{N}\boldsymbol{\delta}^{*e}$代入式（1-12），并注意 $\boldsymbol{\delta}^{*e}$可取任意值，经约简可得到单元内集中力等效到节点力时的计算公式

$$\boldsymbol{F}^{e}=\boldsymbol{N}^{T}\boldsymbol{P} \tag{1-13}$$

同理，可求得单元内分布体力 $\boldsymbol{w}$、分布面力 $\boldsymbol{P}_s$、分布载荷 $\boldsymbol{P}_l$ 转化成节点力的计算公式

$$\boldsymbol{F}^{e}=\iiint_{V}\boldsymbol{N}^{T}\boldsymbol{w}\,\mathrm{d}V \tag{1-14}$$

$$\boldsymbol{F}^{e}=\iint_{A}\boldsymbol{N}^{T}\boldsymbol{P}_{s}\,\mathrm{d}A \tag{1-15}$$

$$\boldsymbol{F}^{e}=\int_{l}\boldsymbol{N}^{T}\boldsymbol{P}_{l}\,\mathrm{d}l \tag{1-16}$$

将式（1-13）～式（1-16）合并，可得到单元内作用各种载荷转化成节点力的计算公式

$$\boldsymbol{F}^{e}=N^{T}\boldsymbol{P}+\int_{l}\boldsymbol{N}^{T}\boldsymbol{P}_{l}\,\mathrm{d}l+\iint_{A}\boldsymbol{N}^{T}\boldsymbol{P}_{s}\,\mathrm{d}A+\iiint_{V}\boldsymbol{N}^{T}\boldsymbol{w}\,\mathrm{d}V \tag{1-17}$$

式（1-17）的具体应用将在后续章节介绍。

**四、整体分析与边界条件处理**

对结构物的每个单元都进行上述分析，建立单元平衡方程（1-10）。该方程是在局部坐标系下建立的，不同单元可能有不同的坐标系，为了分析结构物的受力状态，必须建立一个整体坐标系，通过坐标转换矩阵将局部坐标系下单元平衡方程转换成整体坐标系下单元平衡方程，然后经一系列的“对号入座”拼装过程就可得到结构物有限元分析的整体平衡方程式

$$\boldsymbol{K}\boldsymbol{\delta}=\boldsymbol{F} \tag{1-18}$$

式中　$\boldsymbol{K}$——总体刚度矩阵，简称总刚；

$\boldsymbol{\delta}$——结构的节点位移列阵；

$\boldsymbol{F}$——结构的节点载荷列阵。

总刚 $\boldsymbol{K}$ 是对称矩阵，这是因为保守系统下的弹性结构，从任意位置 $\boldsymbol{A}$ 令结构变形，然后再回到位置 $\boldsymbol{A}$，不管取什么路径，力所做的功必为零，因而有 $\boldsymbol{K}_{ij}=\boldsymbol{K}_{ji}$，即 $\boldsymbol{K}$ 为对称矩阵。$\boldsymbol{K}$ 中每个对角线元素 $\boldsymbol{K}_{ii}>0$，这是因为节点力分量必与它的节点位移分量同向所致。$\boldsymbol{K}$ 为奇异矩阵，这是因为式（1-18）没有考虑结构物的各种支承条件，从力学角度看，没有支承约束的结构物，即使所受的外力自身构成一个平衡力系，其位移解答也是任意不定的。因此，在有限元法分析中必须把支承条件引进到总刚度矩阵，消除 $\boldsymbol{K}$ 中的奇异性，使其成为非奇异矩阵。有关支承约束条件的处理方法和总刚 $\boldsymbol{K}$ 的形成在以后章节中都将详细介绍。

**五、整体平衡方程求解**

通过整体分析，建立起结构物在整体坐标系下的平衡方程。引入支承条件后，整体方程就转变为具有唯一解的线性方程组，求解该方程可得到各节点的位移，进一步计算可得到单元的内力和应力，以及单元内任一点的位移。

在石油石化设备有限元法分析中，由于结构的特殊性，往往离散模型划分的单元较多，节点和节点自由度相应增多，得到的整体平衡方程阶数一般都很高，若不采用适当的求解技术，不仅计算费用大量增加，还可能导致求解过程的不稳定和求解的失败；另外计算时间增长，还限制了在现场中实施跟踪分析计算。因此，求解整体平衡方程必须选用合适的求解技术。

整体平衡方程实际上是线性联立方程组，它的解法可以分为两大类：直接法和迭代法。直接法以高斯消去法为基础，求解效率高，在方程组的阶数不高时（如不超过 10000 阶），通常采用直接法。直接法是目前用得最多的一种方法，主要有带宽高斯消去法、三角分解法及适用于更大型方程组求解的分块解法、波前法等。迭代法具有算法简单和程序编写容易的优点，但要求总刚 $\boldsymbol{K}$ 具有一定的条件，如对称、正定、主对角线元素优势等，且具有计算时间长而又预先无法估计的缺点。迭代法主要包括简单迭代法、赛德尔迭代法、松弛迭代法等。

目前，在微型计算机上对整体平衡方程求解通常采用直接法中的三角分解法，有关该法的详细内容可参见有关计算方法的书籍。

# 第二章　杆系结构有限元法

杆系结构是在节点处通过铆接、焊接或用其他方法，把若干个杆件连接起来组成一个能共同承担外部载荷的结构，如石油工程中的井架、管系结构等。有限元法对杆系结构的离散通常采用自然离散的形式，也就是把等截面的杆件作为单元。当单元的两端为铰接，杆件内力只有轴力存在时，称为杆单元，由杆单元组成的结构称为桁架；当单元两端可以承受弯矩和剪力作用时，称为梁单元，由梁单元组成的结构称为刚架。本章主要介绍平面桁架、平面刚架和空间刚架的有限元法，同时对石油设备中的井架、管系结构进行有限元分析。

## 第一节　平面桁架有限元法

平面桁架是由若干个杆单元组成的杆系结构，因此，本节将从杆单元分析入手建立杆单元平衡方程；然后再通过整体分析建立平面桁架有限元分析的整体平衡方程，经支承条件引入消除总刚度矩阵的奇异性；最终求解整体平衡方程，即可得到平面桁架各节点位移和各单元的内力。

### 一、杆单元分析

1. 局部坐标系下杆单元刚度矩阵

建立局部坐标系 $xy$，使坐标轴 $x$ 与杆单元 $ij$ 的轴线重合，坐标轴 $y$ 与杆垂直，如图 2-1所示。局部坐标系下杆单元节点沿坐标轴 $x$ 的位移列阵为

$$\boldsymbol{\delta}^e = [u_i \quad u_j]^T \tag{2-1}$$

而与之相对应的单元沿 $x$ 方向的节点力列阵为

$$\boldsymbol{F}^e = [F_{ix} \quad F_{jx}]^T \tag{2-2}$$

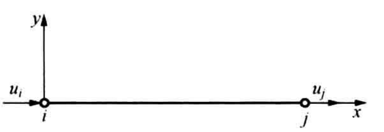

图 2-1　杆单元示图

假定杆单元的位移是 $x$ 的线性函数，有

$$\boldsymbol{f} = u = \alpha_1 + \alpha_2 x = [1 \quad x]\begin{Bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{Bmatrix} \tag{2-3}$$

式中　$\alpha_1$、$\alpha_2$——待定常数。

根据杆单元边界条件

$$(u)_{x=0} = u_i, \quad (u)_{x=l} = u_j$$

代入式（2-3），可解得

$$\begin{Bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{Bmatrix} = \frac{1}{l}\begin{Bmatrix} l & 0\\ -1 & 1\end{Bmatrix}\boldsymbol{\delta}^e \tag{2-4}$$

再将式（2-4）代入式（2-3），经整理得

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{N}\boldsymbol{\delta}^e \tag{2-5}$$

其中

$$\boldsymbol{N} = [N_i \quad N_j] = \left[1-\frac{x}{l} \quad \frac{x}{l}\right] \tag{2-6}$$

从式（2-6）中可以看到形函数 $N_i$、$N_j$ 有以下性质：

（1）形函数与位移是相同次数的多项式，二节点杆单元的位移为线性式（2-3），而形函数 $N_i$、$N_j$ 也是线性式。

（2）形函数 $N_i$ 在节点 $i$ 上的值为 1，在其他节点 $j$ 上的值为零。同样，形函数 $N_j$ 也符合这种规律。据此，形函数可综合表示为

$$N_r(x_s, y_s) = \delta_{rs} \quad (r, s = i, j) \tag{2-7}$$

式中　$\delta_{rs}$——克罗内克符号。

即

$$\delta_{rs} = \begin{cases} 1 & (r = s) \\ 0 & (r \neq s) \end{cases}$$

（3）在杆单元内任一点 $x$ 处，两个形函数之和等于 1，即

$$N_i + N_j = 1 \tag{2-8}$$

这个条件实际上反应了单元的刚体位移。因为做刚体运动时，单元的各节点及单元内任意点的位移都相同。上述三个性质与形函数的具体形式无关，它适用于一切单元，可作为确定形函数具体形式的条件。

由弹性力学知杆单元的几何方程为

$$\varepsilon = \varepsilon_x = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \tag{2-9}$$

将式（2-5）代入式（2-9），经简化后得

$$\varepsilon = [B_i \quad B_j]\boldsymbol{\delta}^e = \boldsymbol{B}\boldsymbol{\delta}^e \tag{2-10}$$

其中，$B_i = -\frac{1}{l}$，$B_j = \frac{1}{l}$，$l$ 为杆单元长度，$\boldsymbol{B}$ 为杆单元应变矩阵。

杆单元的物理方程为

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{\varepsilon} = E\varepsilon_x \tag{2-11}$$

式中　$E$——弹性模量。

将式（2-10）代入式（2-11），得杆单元应力 $\boldsymbol{\sigma}$、内力 $\overline{\boldsymbol{N}}$ 分别为

$$\boldsymbol{\sigma} = E\boldsymbol{B}\boldsymbol{\delta}^e \tag{2-12}$$

$$\overline{\boldsymbol{N}} = EA\boldsymbol{B}\boldsymbol{\delta}^e \tag{2-13}$$

式中　$A$——杆单元横截面积。

为推导杆单元刚度矩阵，利用虚功方程，即杆单元节点力的虚功等于它的内力虚功

$$(\boldsymbol{\delta}^{*e})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^e = \int_l (\boldsymbol{\varepsilon}^*)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\sigma}A\,\mathrm{d}x \tag{2-14}$$

经一系列矩阵运算，并约去任意常量列阵 $\boldsymbol{\delta}^{*e}$，得到杆单元在局部坐标系下的平衡方程式

$$\boldsymbol{F}^e = \boldsymbol{K}^e\boldsymbol{\delta}^e \tag{2-15}$$

式中　$\boldsymbol{K}^e$——杆单元的刚度矩阵。

$\boldsymbol{K}^e$ 的积分表示为

$$\boldsymbol{K}^e = \int_l \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}E\boldsymbol{B}A\,\mathrm{d}l \tag{2-16}$$

将 $B_i$ 和 $B_j$ 表达式代入式（2-16），得到杆单元刚度矩阵的显式为

$$\boldsymbol{K}^e = \frac{AE}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-17}$$