上海市精品课程——“信号与系统”建设项目成果

信号与系统

学习指导及习题精解

任 蕾 薄 华 金欣磊 主编

上海浦江教育出版社

TN911.6
Z0138

阅 览

上海市精品课程——“信号与系统”建设项目成果

信号与系统学习指导及习题精解

暨南大學圖書館藏書

主 编 任 蕾 薄 华 金欣磊

编 者 张韵农 陈红亮 杨忠根

上海浦江教育出版社

©任蕾,薄华,金欣磊 2012

图书在版编目(CIP)数据

信号与系统学习指导及习题精解/任蕾,薄华,金欣磊主编.—上海:上海浦江教育出版社,2012.4
ISBN 978-7-81121-217-4

Ⅰ.①信… Ⅱ.①任…②薄…③金… Ⅲ.①信号系统-教学参考资料 Ⅳ.①TN911.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 057913 号

上海浦江教育出版社出版
社址:上海海港大道 1550 号上海海事大学校内 邮政编码:201306
电话:(021)51322547(发行) 38284923(总编室) 38284916(传真)
E-mail: cbs@shmtu.edu.cn URL: http://www.pujiangpress.cn
上海图宇印刷有限公司印装 上海浦江教育出版社发行
幅面尺寸:184 mm×260 mm 印张:12.75 字数:250 千字
2012 年 4 月第 1 版 2012 年 5 月第 1 次印刷
责任编辑:谢 尘 封面设计:赵宏义
定价:35.00 元

前 言

信号与系统是电子信息类专业最基本的专业课程之一，主要介绍信号和系统的基本概念以及信号通过线性时不变系统的分析方法，涉及了连续时间信号与系统的时域分析、频域分析和 s 域分析方法，离散时间信号与系统的时域分析、频域分析和 z 域分析方法，以及状态变量分析方法。该课程是数字信号处理、通信原理等相关课程的基础，其理论和分析方法在很多领域中得到了广泛的应用。

本书是杨忠根等编写的《信号与系统》(电子工业出版社，2009 年 7 月)教材的配套学习辅导书。全书共分为六个部分，涵盖信号与系统的基本概念，连续时间信号与系统的时域分析，连续时间信号与系统的频域分析，连续时间信号与系统的 s 域分析，离散时间信号与系统的时域分析、频域分析和 z 域分析以及系统状态变量分析理论等教学内容，对各章节的知识点、重点与难点进行了归纳总结。本书给出各章例题，并进行了详细解答，同时，对习题做了精解，其中部分习题给出多种解题思路，方便读者复习本课程或自学。

本书的特色是将编者所在“信号与系统”教学团队近几年的教学研究成果加入其中，包括因果微分定理、因果移序定理、系统分析的等效激励法、全激励信号作用下系统响应求解、时域分析中的等效激励与状态跳变、状态变量分析和系统时域分析的关系等，并给出将新思路应用于部分例题或习题的具体过程，其最大贡献是利用因果微分定理以及时域移序定理将时域分析与频域分析的方法联系起来，有助于学生深刻理解时域分析与频域分析的关系，拓展分析系统的思路。本书还给出了信号处理领域的常用 MATLAB 函数表，方便读者使用该软件完成书中的部分作业。

本书可作为高等院校电子电气信息类本科专业学生学习“信号与系统”课程的指导用书，也可供准备硕士研究生入学考试的学生和相关人员使用。

本书是 2009 年上海市精品课程——“信号与系统”课程建设项目以及 2008 年度上海海事大学优秀本科教学团队建设项目的成果之一。本书是上海海事大学 2010—2012 年规划教材之一。教材的编写和出版过程得到了上海浦江教育出版社、上海海事大学教务处、上海海事大学信息工程学院等相关部门的大力支持。

感谢东南大学吴镇扬教授认真审阅了本书。

书中各章节内容要点以及第 1,2 和 5 章例题和习题部分由任蕾撰写，第 3 章例题和习题由薄华撰写，第 4 章例题和习题由金欣磊撰写，第 6 章例题和习题由张韵农撰写，所有 MATLAB 习题解答和绘图部分由陈红亮撰写。任蕾负责全书统稿，杨忠根教授也参与了本书的撰写过程。

由于时间和水平有限，书中难免有错误和遗漏之处，恳请专家、教师和广大读者批评指正。编者电子信箱为：leiren@ shmtu. edu. cn。

编 者

2012 年 2 月

目　录

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第一章　信号与系统概论

第一节　内容要点

一、信号的基本概念

信号是物质运动的形式，是传送消息的工具；信息内含于信号，信号是信息的载体。

二、信号的分类

根据不同分类准则，可分为如表 1.1 所示的类型。

表 1.1　信号分类表

分类标准	确定否	周期否	连续否	量化否	因果否	能量有限否	功率有限否
肯定	确定性	周期	连续	量化	因果	能量有限	功率有限
否定	随机性	非周期	离散	非量化	非因果	能量无限	功率无限

1. 确定性信号与随机信号

能用确定的数学函数表示的信号是确定性信号，即对任意确定的时间（或空间），信号有确定的函数值。

随机信号只能以统计规律描述。

2. 周期信号与非周期信号

周期信号的一般形式。令 $f(t)$ 为周期信号，T 为其周期，则该信号可用下列形式描述：

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_1(t-nT) \tag{1.1}$$

式中：$f_1(t) = \begin{cases} f(t), & t\in[0,T] \\ 0, & t\notin[0,T] \end{cases}$ 是仅在基本周期内取非零值的有限长信号；周期信号 $f(t)$ 是非周期信号 $f_1(t)$ 的周期延拓。

该过程也可通过信号 $f_1(t)$ 与冲激串信号卷积实现：

$$f(t) = f_1(t) * \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT) \tag{1.2}$$

3. 连续信号与离散信号

除若干个不连续点外，在有定义的信号持续时间内任意时间点均对应确定的信号值，

满足上述条件的信号为连续时间信号。

只能在不连续的时间点有定义,在其他时间均无定义的信号为离散时间信号。

信号 $f(t)$ 与冲激串信号相乘可实现对原信号的采样;离散信号经过内插可恢复连续信号。

4. 量化信号与非量化信号

信号值连续的信号是非量化信号,若信号值仅以有限值表示则为量化信号;模拟时间信号经过采样、量化可以转换为数字信号,量化的离散信号为数字信号。

5. 因果信号与非因果信号

因果信号在零时刻之前的值均为零,一定是非周期信号;因果系统的单位冲激响应一定是因果信号。

6. 有限信号与无限信号

在信号所在的时间内,任一时间的信号值均为有限值,则该信号是有限信号,否则为无限信号。

7. 能量信号与功率信号

连续信号的能量和功率:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 \mathrm{d}t \tag{1.3}$$

$$P = \lim_{T \Rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} |f(t)|^2 \mathrm{d}t \tag{1.4}$$

离散信号的能量和功率:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x(n)|^2 \tag{1.5}$$

$$P = \lim_{N \Rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{+N} |x(n)|^2 \tag{1.6}$$

能量信号一定是功率信号,反之不一定成立;有限持续时间信号一定是能量信号,反之不一定成立;有些信号既不是能量信号,也不是功率信号。

三、信号的运算

1. 对时间量的运算

信号的平移:$f(t) \Rightarrow f(t-\tau)$,$\tau > 0$ 为信号右移,即信号延迟,$\tau < 0$ 为信号左移,即信号超前。

信号的翻转:$f(t) \Rightarrow f(-t)$,即信号波形围绕纵轴旋转 180°。

信号的尺度变换:$f(t) \Rightarrow f(at)$,$|a| > 1$ 为信号压缩,$|a| < 1$ 为信号扩展。

一般形式:$f(t) \Rightarrow f(at-b)$。

运算过程可以有不同思路,但均是对自变量的运算。

除对自变量的线性运算之外,还有非线性运算,例如:$f(t) \Rightarrow f(at^2+bt+c)$。

需要注意的是,所有对时间量的运算,均不会改变信号的幅度。

2. 对信号值的运算

信号值的运算可分为以下几种。

一元运算,例如信号微分、积分。

多元运算,例如两个信号相加、相乘。

即时运算,例如信号放大。

非即时运算,例如信号的微积分。

线性运算,例如信号放大。

非线性运算,例如取信号绝对值。

四、典型信号

(1) 指数信号:$f(t)=Ke^{at}$ (1.7)

式中:K 和 a 均为实数。

(2) 正弦信号:$f(t)=K\sin(\omega t+\phi)$ (1.8)

(3) 复指数信号:$f(t)=Ke^{st}$ (1.9)

式中:$K=a+jb$;$s=\sigma+j\omega$。直流信号、指数信号和正弦信号是复指数信号的退化形式。

(4) 抽样信号:$Sa(t)=\dfrac{\sin t}{t}$ (1.10)

0 时刻信号值为 1。抽样信号为偶信号,有无数个过零点,并且 $\int_{-\infty}^{+\infty}Sa(t)\,dt=\pi$。

(5) 单位阶跃信号:$u(t)=\begin{cases}0, & t<0\\1, & t>0\end{cases}$ (1.11)

一般窗函数表示为:$G_{t_1,t_2}(t)=u(t-t_1)-u(t-t_2)$ (1.12)

阶跃信号的尺度性质:$u(at)=\begin{cases}u(t), & \forall a>0\\u(-t), & \forall a<0\end{cases}$ (1.13)

(6) 符号函数:$\mathrm{sgn}(t)=\begin{cases}1, & t>0\\-1, & t<0\end{cases}$ (1.14)

符号函数与阶跃信号的关系:$\mathrm{sgn}(t)=2u(t)-1$ (1.15)

(7) 斜坡信号:$r(t)=tu(t)$ (1.16)

斜坡信号是阶跃信号的积分。

(8) 单位冲激信号:$\begin{cases}\delta(t)=0, & \text{当 } t\neq 0 \text{ 时}\\ \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\,dt=1\end{cases}$ (1.17)

冲激信号的性质:

① $\int_{t_1}^{t_2}\delta(t)\,dt=\begin{cases}1, & \text{当 } t_1<0<t_2 \text{ 时}\\0, & \text{其他}\end{cases}$ (1.18)

② 冲激信号为偶信号:$\delta(-t)=\delta(t)$ (1.19)

③ 赋值特性:$f(t)\delta(t-t_0)=f(t_0)\delta(t-t_0)$ (1.20)

特别地,$f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t)$ (1.21)

④ 筛选特性：$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t = f(t_0)$ (1.22)

特别地，$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)\mathrm{d}t = f(0)$ (1.23)

⑤ 冲激信号与阶跃信号的微积分关系：$\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} = \delta(t), \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\mathrm{d}\tau = u(t)$ (1.24)

⑥ 尺度特性：$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$ (1.25)

⑦ 检零特性：$\delta[f(t)] = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|f'(t_i)|}\delta(t-t_i)$ (1.26)

(9) 冲激偶信号：$\delta'(t) = [\delta(t)]^{(1)}$ (1.27)

冲激偶信号的性质：

① $\int_{t_1}^{t_2} \delta'(t)\mathrm{d}t = 0,\ t_1 < 0 < t_2$ (1.28)

② 冲激偶信号为奇信号：$\delta'(-t) = -\delta'(t)$ (1.29)

③ 筛选性质：$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(k)}(t)f(t)\mathrm{d}t = (-1)^k f^{(k)}(0)$ (1.30)

特别地，$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(t-t_0)f(t)\mathrm{d}t = -f'(t_0)$ (1.31)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(t)f(t)\mathrm{d}t = -f'(0) \quad (1.32)$$

④ 抽样性质：$f(t)\delta'(t-t_0) = f(t_0)\delta'(t-t_0) - f'(t_0)\delta(t-t_0)$ (1.33)

特别地，$f(t)\delta'(t-t_0) = f(t_0)\delta'(t-t_0) - f'(t_0)\delta(t-t_0)$ (1.34)

⑤ 尺度性质：$\delta'(at) = \frac{1}{|a|}\frac{1}{a}\delta'(t)$ (1.35)

$$\delta^{(k)}(at) = \frac{1}{|a|}\frac{1}{a^k}\delta^{(k)}(t),\ \delta^{(k)}(t) = (-1)^k\delta^{(k)}(t) \quad (1.36)$$

⑥ 卷积性质：$f(t) * \delta'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)$ (1.37)

(10) 高斯信号(钟形信号)：$f(t) = E\mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2}$ (1.38)

五、信号的分解

信号分解方法很多，主要包括：交、直流分量分解，奇偶分量分解，实虚分量分解，因果与非因果分量分解，正交分量分解。

六、系统的概念

系统是由若干相互作用和相互依赖的事物组合而成的具有特定功能的整体。

七、系统的分类

1. 按照输入输出信号分类

连续系统：输入、输出信号均为连续时间信号。

离散系统:输入、输出信号均为离散时间信号。

混合系统:输入、输出信号既有连续时间信号,又有离散时间信号。

2. 按照系统特性分类

(1) 线性、非线性系统:同时满足叠加性和齐次性的系统是线性系统,即信号通过系统与信号叠加或者信号放大可交换,任一个条件不满足就是非线性系统。

(2) 时不变、时变系统:信号延迟和信号通过系统可互换的系统是时不变系统,否则为时变系统。

(3) 因果、非因果系统:系统响应不出现在激励信号之前的系统是因果的,即当前时刻的系统响应仅仅取决于当前或者以前的系统激励,而与将来时刻的激励信号无关。实际物理可实现的系统是因果的。一个因果系统一定是物理可实现系统,反之亦然。

(4) 稳定、不稳定系统:有限激励信号输入系统时得到有限的响应信号,则系统为稳定的(Bounded Input to Bounded Output, BIBO)。能实际应用的系统必须是稳定的。

(5) 可逆、不可逆系统:一个可逆系统一定存在一个逆系统,二者级联后形成的新系统,其输入和输出信号相同。

对于系统特性的分类判断,遵循如表 1.2 所示的原则。

表 1.2　常见运算的系统特性

特性	平移	尺度	放大	变量乘	偏置	变量加	微分	积分	非线性映射
线性性	Yes	Yes	Yes	不定	No	不定	Yes	Yes	No
时不变性	Yes	No	Yes	不定	Yes	不定	Yes	不定	Yes
因果性	不定	No	Yes	Yes	Yes	Yes	No	不定	Yes
稳定性	Yes	Yes	Yes	不定	Yes	不定	No	No	不定

对表 1.2 中几个“不定”的情况,有如下说明:

(1) 由于 $\int_{-\infty}^{+\infty} |\delta'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sgn}(-t)\delta'(t)\,\mathrm{d}t = [\operatorname{sgn}(t) * \delta'(t)]\,|_{t=0} = 2\delta(0) = +\infty$,使得冲激微分不绝对可积,所以微分器不稳定。这样零极点讨论稳定性仅对系统函数中无 s 多项式的情况有效(详见第四章)。

(2) 在平移中,延迟是因果的,而超前是非因果的。

(3) 变量乘或加另一有界信号时,变量乘或加是稳定的,否则是不稳定的。

(4) 如果变量乘或加的另一信号不随输入的延迟而延迟,则变量乘或加是时变的,否则是时不变的;如果另一信号与输入无关,则变量乘是线性的,否则是非线性的;如果另一信号与输入无关,则变量加是非线性的,否则是线性的。

(5) 下限为 $-\infty$ 的积分运算是因果、时不变的,但下限为常数的积分却是非因果、时变的。

(6) 除了无界非线性映射不稳定外,非线性映射是稳定的。

八、系统分析方法

(1) 时域法: $\begin{cases} \text{连续时间系统} \quad \text{微分方程} \quad \text{卷积} \\ \text{离散时间系统} \quad \text{差分方程} \quad \text{卷积和} \end{cases}$

（2）频域法：$\begin{cases}\text{傅里叶变换}\\\text{拉普拉斯变换}\\ z\text{变换}\end{cases}$

（3）状态变量法：$\begin{cases}\text{连续时间系统}\begin{cases}\text{时域分析}\\\text{频域分析}\end{cases}\\\text{离散时间系统}\begin{cases}\text{时域分析}\\\text{频域分析}\end{cases}\end{cases}$

第二节　学习要点和难点

一、学习要点

（1）信号与系统课程的重要性；

（2）信号的概念、分类与运算；

（3）系统的概念、分类与联接形式；

（4）系统的线性性、时不变性、因果性和稳定性的定义与判断。

二、学习难点

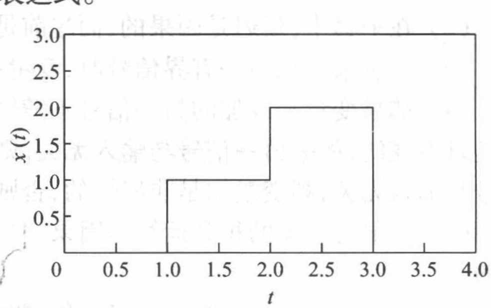
（1）奇异信号的相关运算和性质。

（2）系统的类型判断：线性性、时不变性、因果性、稳定性和可逆性。

第三节　本章例题讲解

1.1　已知信号 $x(t)$ 如题 1.1 图所示，写出其表达式。

解：阶梯形信号可用阶跃信号及其移位后的信号叠加而成。



题 1.1 图

更一般地，对于分段连续函数 $f(t)$ 在点集 $\{t_i | i = 1, 2, \cdots, N\}$ 有跳变，则可表示为一连续信号 $f_c(t)$ 加上 N 个延迟阶跃信号的加权和，即

$$f(t) = f_c(t) + \sum_{i=1}^{N} h_i u(t - t_i) \qquad (1.39)$$

式中：h_i 是信号在 t_i 时刻的带跳变带符号的幅度，向上跳变取正号，否则取负号。

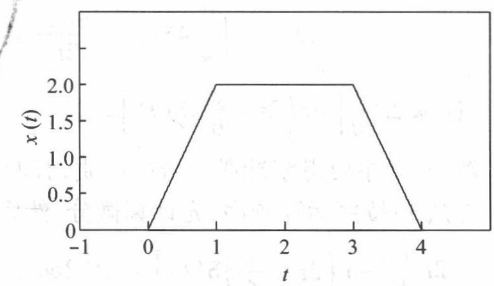
因此，该信号的表达式为 $u(t-1) + u(t-2) - 2u(t-3)$。

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

此外，还可认为该信号是由$f_1(t)=2[u(t-1)-u(t-3)]$与信号$f_2(t)=[u(t-1)-u(t-2)]$相减得到的。

1.2　写出题1.2图所示信号的表达式。

解：梯形信号可以由斜坡信号$r(t)=tu(t)$及其移位后的信号叠加组成，即$f(t)=\sum_{i=1}^{N}w_i r(t-t_i)$。其中，信号波形在转折点后的线段斜率等于已起作用的斜坡函数的权值之和，即$f(t)$在区间$[t_i, t_{i+1}]$的线段斜率为$\sum_{k=1}^{i}w_k$。



题1.2图

据此易知，该图所示信号表示式为$x(t)=2r(t)-2r(t-1)-2r(t-3)+2r(t-4)$。

1.3　画出信号$f(t)=u(\cos t)$的波形。

解：该信号是复合信号，根据阶跃信号的定义，可判断

$$\begin{cases}\cos t>0,\ u(\cos t)=1\\ \cos t<0,\ u(\cos t)=0\end{cases}\Rightarrow \begin{matrix}\frac{2n-1}{2}\pi\leqslant t\leqslant\frac{2n+1}{2}\pi,\ n\text{ 取所有偶数},\ u(\cos t)=1\\ \frac{2n-1}{2}\pi\leqslant t\leqslant\frac{2n+1}{2}\pi,\ n\text{ 取所有奇数},\ u(\cos t)=0\end{matrix}$$

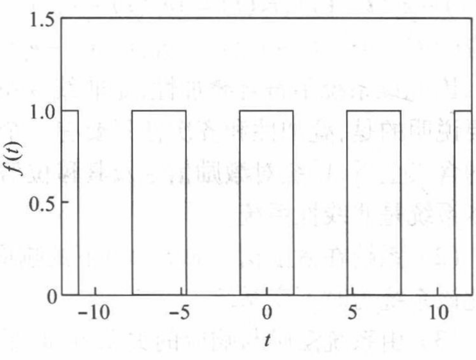
因此该信号是周期为2π的方波信号。

此类复合信号很多，如$\operatorname{sgn}(\sin t)$等，该类信号在数字图像处理、神经网络等领域中，常作为示性函数。

本题可以使用MATLAB软件求解，其对应的指令为：

```
t = -4 * pi:0.001:4 * pi;
y = cos(t);
z = double(y > =0);
plot(t,z);
xlabel('t');
ylabel('f(t)');
```

其波形如解1.3图所示。



解1.3图

1.4　下列各式正确的是______。

(a) $2\delta(t)=\frac{1}{2}\delta(2t)$；　(b)$\delta(2t)=\frac{1}{2}\delta(t)$；

(c)$\delta(2t)=\delta(t)$；　(d)$\delta(2t)=2\delta(t)$。

解：本题主要考察冲激信号的尺度性质，由$\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)$得到该题答案为(b)。

一般地，$\delta(at-b)=\frac{1}{|a|}\delta\left(t-\frac{b}{a}\right)$，即冲激信号经过尺度和平移后，其强度发生改变。

1.5 求积分$f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}2\delta(t)\frac{\sin(2t)}{t}\mathrm{d}t$。

解:本题主要考察冲激信号的筛选性质。

$$f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}4\delta(t)\frac{\sin(2t)}{2t}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}4\delta(t)Sa(2t)\mathrm{d}t=4$$

1.6 计算$2t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sin\left(2t-\frac{\pi}{6}\right)\delta(t)\right]$。

解:本题主要考察冲激信号的性质,有两种思路。

方法1:按照运算顺序,先计算微分,然后化简。

$$2t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sin\left(2t-\frac{\pi}{6}\right)\delta(t)\right]=2t\left[2\cos\left(2t-\frac{\pi}{6}\right)\delta(t)+\sin\left(2t-\frac{\pi}{6}\right)\delta'(t)\right]=$$

$$0+2t\cdot\sin\left(2t-\frac{\pi}{6}\right)\delta'(t)=0-\left[2t\cdot\sin\left(2t-\frac{\pi}{6}\right)\right]'\Big|_{t=0}\delta(t)=\delta(t)$$

其中利用了冲激偶信号的筛选性质$f(t)\delta'(t)=f(0)\delta'(t)-f'(0)\delta(t)$。可见本方法较繁琐,一般应选择方法2。

方法2:先化简,再计算微分。

$$2t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sin\left(2t-\frac{\pi}{6}\right)\delta(t)\right]=2t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[-\frac{1}{2}\delta(t)\right]=-t\delta'(t)=\delta(t)$$

1.7 某连续时间系统的激励$e(t)$和响应$r(t)$满足$r(t)=|e(t)-e(t-1)|$,判断该系统的线性性、时不变性、因果性和稳定性。

解:本题主要考察系统的特性判断。

(1) 设系统在激励信号$e_1(t)$和$e_2(t)$下的响应信号分别为$r_1(t)$和$r_2(t)$,则有$r_1(t)=|e_1(t)-e_1(t-1)|$,$r_2(t)=|e_2(t)-e_2(t-1)|$,当激励信号为$e_3(t)=e_1(t)+e_2(t)$时,响应$r_3(t)=|e_1(t)+e_2(t)-e_1(t-1)-e_2(t-1)|\neq|e_1(t)-e_1(t-1)|+|e_2(t)-e_2(t-1)|$,因此该系统不符合叠加性,是非线性系统。同时,还可证明该系统也不符合齐次性。需要说明的是,叠加性和齐次性只要有一个不满足,系统即为非线性系统。另外,从本系统的含义上看,系统对激励信号及其移位信号的差取绝对值运算,该运算是非线性的,因此本系统是非线性系统。

(2) 系统在激励信号$e(t-t_0)$下的响应信号为$|e(t-t_0)-e(t-t_0-1)|=r(t-t_0)$,因此该系统为时不变系统。

(3) 由系统激励与响应的关系可知,系统当前时刻响应信号仅与当前时刻以及过去时刻的激励信号有关,因此该系统是因果系统。

(4) 从系统激励与响应的关系可判断,当激励信号为有限值时,响应信号必定有限,因此该系统为稳定系统。

1.8 判断下列微分方程描述的系统在零状态条件下是否为线性时不变系统。

(a)$r''(t)+3r'(t)+2r(t)=f(t)$

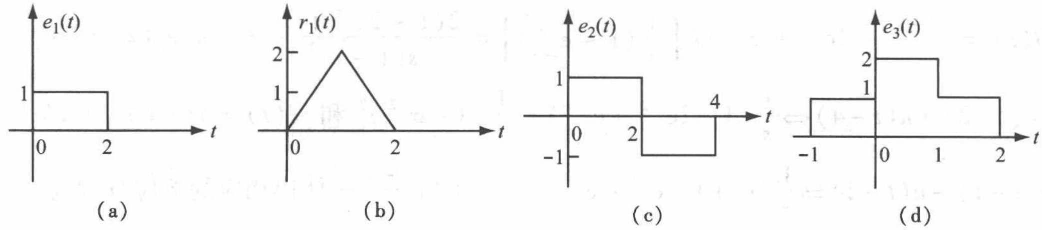
(b)$r''(t)+3r'(t)+2tr(t)=f(t)$

(c)$r''(t)+3r'(t)+2r(t)=f^2(t)$

解:在系统零状态条件下,常系数线性微分方程描述的系统是连续线性时不变系统。

(a)该微分方程为常系数线性微分方程,因此系统是线性时不变系统;(b)该微分方程中有一项系数并非常系数,因此该系统是线性时变系统;(c)该微分方程是非线性方程,因此该系统是非线性时不变系统。以微分方程给出的系统是隐性表述,但仍可以标准方法判断系统性质。

1.9　若某线性时不变系统对题1.9图(a)所示 $e_1(t)$ 的响应是图(b)所示的信号 $r_1(t)$,求:(1)系统对图(c)所示输入 $e_2(t)$ 的响应;(2)系统对图(d)所示输入 $e_3(t)$ 的响应。



题1.9图

解:方法1:本题主要考察线性时不变系统的性质,即线性性和时不变性。需判断激励信号 $e_2(t)$ 和 $e_3(t)$ 与激励信号 $e_1(t)$ 的关系,由信号波形可知 $e_2(t)=e_1(t)-e_1(t-2)$,根据系统的线性性和时不变性,得 $r_2(t)=r_1(t)-r_1(t-2)$。同理,可知 $e_3(t)=e_1(t)+e_1(t+1)$,因此 $r_3(t)=r_1(t)+r_1(t+1)$。

方法2:根据已知条件求解系统单位冲激响应,然后利用卷积求解,过程较为繁琐。

已知 $e_1(t)=u(t)-u(t-2)$,$r_1(t)=2tu(t)-4(t-1)u(t-1)+2(t-2)u(t-2)$,因此该系统的系统函数为 $H(s)=\dfrac{\dfrac{2}{s^2}-\dfrac{4e^{-s}}{s^2}+\dfrac{2e^{-2s}}{s^2}}{\dfrac{1}{s}-\dfrac{e^{-2s}}{s}}=\dfrac{2}{s}\dfrac{(1-e^{-s})^2}{1-e^{-2s}}$,该系统的冲激响应为

$$h(t)=2\sum_{n=0}^{+\infty}[u(t-2n)-2u(t-1-2n)+u(t-2-2n)]。$$

然后对任意的输入激励信号,利用卷积或者频域方法求解系统的响应,但是对于有非因果的激励信号,需要处理后才能应用单边拉普拉斯变换方法。

方法3:直接在变换域进行求解。

傅里叶变换方法求解:利用 $G_\tau(t)\Leftrightarrow\tau Sa\left(\dfrac{\omega\tau}{2}\right)$ 有 $e_1(t)=u(t)-u(t-2)=G_2(t-1)\Leftrightarrow 2Sa(\omega)e^{-j\omega}$,系统频率传递函数为 $H(j\omega)=\dfrac{R_1(j\omega)}{2Sa(\omega)e^{-j\omega}}$,其中,$r_1(t)=2[r(t)-2r(t-1)+r(t-2)]\Leftrightarrow R_1(j\omega)$,而 $e_2(t)=u(t)-2u(t-2)+u(t-4)=G_2(t-1)-G_2(t-3)\Leftrightarrow 2Sa(\omega)(e^{-j\omega}-e^{-j3\omega})$ 和 $e_3(t)=u(t+1)+u(t)-u(t-1)-u(t-2)=G_2(t)+G_2(t-1)\Leftrightarrow 2Sa(\omega)(1+e^{-j\omega})$ 使得相应的响应分别为

$$\frac{R_1(j\omega)}{2Sa(\omega)e^{-j\omega}}\cdot 2Sa(\omega)(e^{-j\omega}-e^{-j3\omega})=R_1(j\omega)(1-e^{-j2\omega})\Leftrightarrow$$

$$r_2(t)=r_1(t)-r_1(t-2)=2[r(t)-2r(t-1)+2r(t-3)-r(t-4)]$$

$$\frac{R_1(\mathrm{j}\omega)}{2Sa(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}}\cdot 2Sa(\omega)(1+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}) = R_1(\mathrm{j}\omega)(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}+1)\Leftrightarrow$$

$$r_3(t) = r_1(t+1) + r_1(t) = 2[r(t+1) - r(t) - r(t-1) + r(t-2)]$$

用系统 s 域分析方法求解的过程如下所述：$e_1(t) = u(t) - u(t-2) \Leftrightarrow \frac{1}{s}(1-\mathrm{e}^{-2s})$ 和 $r_1(t) = 2[r(t) - 2r(t-1) + r(t-2)] \Leftrightarrow \frac{2}{s^2}(1-2\mathrm{e}^{-s}-\mathrm{e}^{-2s})$，使得系统的系统函数为 $H(s) = \frac{2}{s^2}(1-2\mathrm{e}^{-s}+\mathrm{e}^{-2s})\Big/\left[\frac{1}{s}(1-\mathrm{e}^{-2s})\right] = \frac{2(1-2\mathrm{e}^{-s}+\mathrm{e}^{-2s})}{s(1-\mathrm{e}^{-2s})}$，而 $e_2(t) = u(t) - 2u(t-2) + u(t-4) \Leftrightarrow \frac{1}{s}(1-2\mathrm{e}^{-2s}+\mathrm{e}^{-4s}) = \frac{1}{s}(1-\mathrm{e}^{-2s})^2$ 和 $e_3(t) = u(t+1) + u(t) - u(t-1) - u(t-2) \Leftrightarrow \frac{1}{s}(\mathrm{e}^{s}+1-\mathrm{e}^{-s}-\mathrm{e}^{-2s}) = (\mathrm{e}^{s}+1)\frac{1-\mathrm{e}^{-2s}}{s}$ 使得相应的响应分别为

$$\frac{2(1-2\mathrm{e}^{-s}+\mathrm{e}^{-2s})}{s(1-\mathrm{e}^{-2s})}\cdot\frac{1}{s}(1-\mathrm{e}^{-2s})^2 = \frac{2(1-2\mathrm{e}^{-s}+\mathrm{e}^{-2s})}{s^2}\cdot(1-\mathrm{e}^{-2s})\Leftrightarrow$$

$$r_2(t) = r_1(t) - r_1(t-2) = 2[r(t) - 2r(t-1) + 2r(t-3) - r(t-4)]$$

$$\frac{2(1-2\mathrm{e}^{-s}+\mathrm{e}^{-2s})}{s(1-\mathrm{e}^{-2s})}(\mathrm{e}^{s}+1)\frac{1-\mathrm{e}^{-2s}}{s} = \frac{2(1-2\mathrm{e}^{-s}+\mathrm{e}^{-2s})}{s^2}\cdot(\mathrm{e}^{s}+1)\Leftrightarrow$$

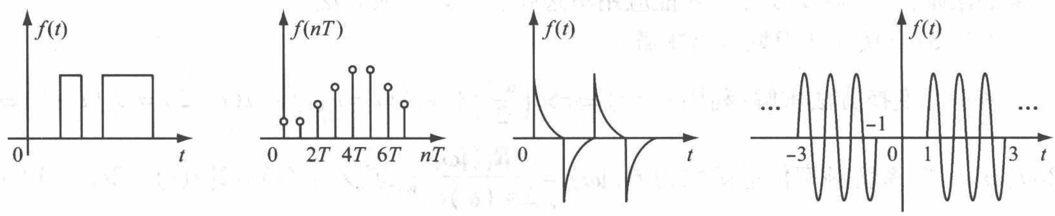
$$r_3(t) = r_1(t+1) + r_1(t) = 2[r(t+1) - r(t) - r(t-1) + r(t-2)]$$

其中，利用了单位左移算子 $z=\mathrm{e}^{s}$。

显然，本题使用系统的线性时不变性直接在时域求解最为简捷。

第四节　习题精解

1-1　判断题 1-1 图所示各信号是否满足周期性和因果性，并指出哪些信号是连续时间信号，哪些是离散时间信号。



(a) 电报信号　(b) 温度信号　(c) 触发脉冲　(d) 高频脉冲

题 1-1 图

解：判断信号的类别，主要从信号类别的定义考虑，着重需要注意的是抽样信号与离散时间信号的区别。

(a) 连续，非周期，因果，连续时间信号；

(b) 非连续,非周期,因果,离散时间信号;

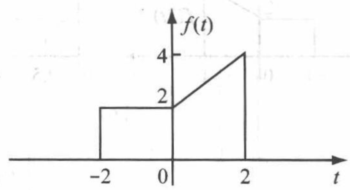
(c) 连续,非周期,因果,连续时间信号;

(d) 连续,周期,非因果,连续时间信号,周期为5。

1-2 给定题1-2图所示信号 $f(t)$,画出下列信号的波形:

(a) $3f(t-3)$; (b) $f(-t+2)$; (c) $f(2t-3)$;

(d) $f\left(-\frac{t}{2}-1\right)$; (e) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)$; (f) $\int_{-\infty}^{t}f(x)\mathrm{d}x$。



题1-2图

解:本题主要考察信号的各类运算,包括时间变量的运算和对信号值的运算。

(a) $3f(t-3)$,所以,信号波形右移3,幅度扩3。

(b) $f(-t+2)=f[-(t-2)]$,所以,信号波形翻转后右移2。

(c) $f(2t-3)=f[2(t-1.5)]$,所以,信号波形先缩2后右移1.5。

(d) $f\left(-\frac{t}{2}-1\right)=f\left[-\frac{1}{2}(t+2)\right]$,所以,信号波形先展2并翻转后左移2。

题(b)也可以先左移2,再翻转后得到 $f(-t+2)$ 波形;题(c)也可以把信号 $f(t)$ 的波形先右移3,再以2倍的比例进行压缩后得到 $f(2t-3)$;题(d)也可以先右移1,再展2并翻转后得到 $f\left(-\frac{t}{2}-1\right)$ 波形。

(e) 信号的时域表达式为 $f(t)=r(t)-r(t-2)+2u(t+2)-4u(t-2)$,其中,前两个斜坡函数组成了信号的连续分量,后两项为信号的阶跃分量。再由冲激函数、阶跃函数和斜坡函数之间的微积分关系易知,$f'(t)=u(t)-u(t-2)+2\delta(t+2)-4\delta(t-2)$。

实际上,有时直接在波形图上求出各段斜线的斜率,就是此区间的水平线的高度,然后,在各阶跃点处添上各个强度等于阶跃值的冲激即可。

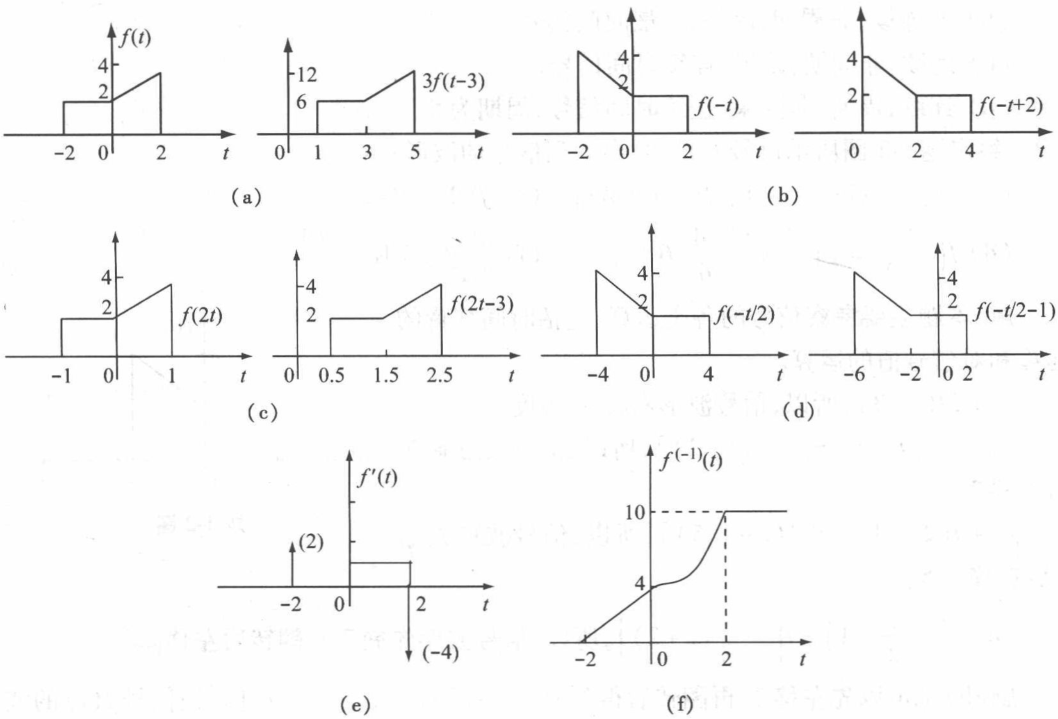
(f) 信号积分

$$f^{(-1)}(t)=g(t)-g(t-2)+2r(t+2)-4r(t-2)=\begin{cases}0, & \forall t\leqslant -2\\ 2t+4, & \forall -2<t\leqslant 0\\ 0.5t^2+2t+4, & \forall 0<t\leqslant 2\\ 10, & \forall t>2\end{cases}$$

其中,$g(t)=r^{(-1)}(t)=\frac{1}{2}t^2u(t)$ 是斜坡函数的积分。本小题也可根据积分是波形面积的概念用图解法在图上直接完成。

各信号的波形图见解1-2图。

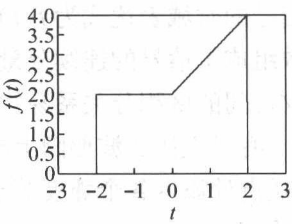
值得注意的是,题(a)~(d)是时间变量的运算,题(e)~(f)是信号值的运算,对于有若干不连续点的信号微分,需注意其微分后可能出现冲激信号。



解 1-2 图

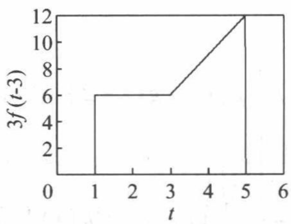
题(a) ~ (d)可利用 MATLAB 求解，首先画出原信号的波形，利用如下的指令：

```
t = -3:0.001:3;
ft = [zeros(1,1000) 2*ones(1,2000) t
(3001:5001)+2 zeros(1,1000)];
plot(t,ft);
xlabel('t');
ylabel('f(t)');
```



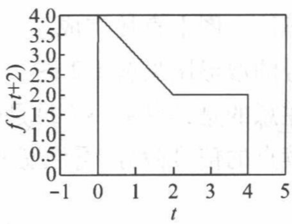
(a) 信号的指令与波形为：

```
t1 = t+3;
ft1 = 3*ft;
plot(t1,ft1);
xlabel('t');
ylabel('3f(t-3)');
```



(b) 信号的指令与波形为：

```
t2 = 2-t;
ft2 = ft;
plot(t2,ft2);
xlabel('t');
ylabel('f(-t+2)');
```



试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com