普通高等教育“十二五”规划教材

线性代数

刘国新　谢成康　刘　花　编著

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

线性代数

刘国新　谢成康　刘　花　编著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书按高等院校理工科、经济及管理等专业线性代数课程的要求，同时考虑不同专业、不同层次的读者需求，编著而成. 全书共 5 章，内容包括行列式、矩阵、线性方程组、矩阵相似对角化与二次型、线性空间与线性变换，每章末附有习题.

本书可作为高等院校理工科、经济及管理等有关专业的教材和参考书，也可作为开设线性代数课程的其他专业的教材和参考书，还可作为研究生入学考试的参考资料.

图书在版编目（CIP）数据

线性代数/刘国新，谢成康，刘花编著. —北京：科学出版社，2013.1
普通高等教育“十二五”规划教材
ISBN 978-7-03-036516-3

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①刘… ②谢… ③刘… Ⅲ. ①线性代数-高等数学-教材 Ⅳ. ①O151

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013) 第 012684 号

责任编辑：昌 盛 周金权／责任校对：朱光兰
责任印制：阎 磊／封面设计：陈 敬

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京佳艺恒彩印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2013 年 1 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2013 年 1 月第一次印刷 印张：9
字数：172 000

定价：19.00 元

前 言

线性代数是处理矩阵和线性空间的数学分支, 自然科学及工程技术的许多领域都能用到线性代数的知识, 现代经济及管理科学也大量应用线性代数的有关内容. 因此, 线性代数是高等院校理工科、经济及管理等专业学生的一门必修课.

本书作者在教授线性代数课程时, 不约而同地萌发了编著一本适用的线性代数教材的想法. 在我国代数学家郭聿琦教授的热情鼓励和科学出版社的大力支持下, 作者历经两度春秋的努力工作, 完成了本书的编著. 在写作时, 作者试图做到以下几个方面：

1. 本书的许多定义和定理的叙述采用了英文的顺序, 即先结论, 再条件. 这样可以使得语言更简洁、准确.

2. 利用线性代数较强的抽象性和逻辑性, 培养学生的数学思维能力. 除了一些较明显的性质, 其他主要的结论都给出了严格的数学证明.

3. 每一部分的知识相对集中在一章, 定理的证明也同时完成, 不遗留到以后. 例如, 矩阵的内容及定理的证明都集中在第 2 章.

4. 定理的论证过程尽量采用规范的数学符号来推理, 尽量避免文字叙述的推理方式. 只要熟悉了符号, 符号推理应比文字叙述推理直观.

5. 符号和术语尽量规范. 例如, 在本书中字母 k 只用来表示整数, 而不用来表示实数; 又如, 用 n 元向量一词来替代传统的 n 维向量, 与向量空间的维数相区分.

全书共 5 章, 包括行列式、矩阵、线性方程组、矩阵相似对角化与二次型、线性空间与线性变换. 本书可作为高等院校理工科、经济及管理等有关专业的教材和参考书, 也可作为开设线性代数课程的其他专业的教材和参考书, 同时也可作为有志攻读研究生的同学的参考资料. 如果课程学时较少, 则可以讲授前四章, 一些比较困难的证明, 授课教师可自行取舍.

感谢西南大学数学与统计学院郭聿琦教授给予作者热情的鼓励和对本书初稿提出的修改意见.

我们的同事, 西南大学数学与统计学院王正攀博士和赵海燕女士仔细阅读了本书初稿, 并提出了许多建设性的修改意见, 在此表示感谢.

感谢科学出版社和西南大学教务处为本书出版给予的大力支持.

刘国新　谢成康　刘花

2012 年 10 月于西南大学崇德湖

目　　录

预 备 知 识

从大家熟悉的一元一次方程

$$ax + b = 0$$

出发, 将未知数的次数推广到 n, 得到一元 n 次方程

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0,$$

此方程的左边就是一元 n 次多项式. 将未知数个数推广为 n, 方程的个数推广为 m, 则得到线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \cdots + \ a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + \ a_{22}x_2 + \cdots + \ a_{2n}x_n = 0, \\ \qquad\qquad \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

将其右边的 m 个 0 依次改为 $y_1, y_2, \cdots, y_m$, 得到一个线性替换. 围绕求解线性方程组, 又产生了行列式、矩阵、向量空间、线性变换等概念和理论, 它们构成线性代数的主要内容. 二次型尽管不是线性的, 但其基本问题的讨论是通过可逆齐次线性替换进行的. 尽管多项式理论未包含在这门课程之内, 但线性代数的讨论离不开多项式.

非数学专业高等数学课程讨论函数的解析性质, 线性代数讨论代数对象的线性关系. 随着计算机及其应用技术的发展, 很多实际问题得以离散化而得到定量的解决. 作为离散化和数值计算理论基础的线性代数, 为解决实际问题提供了强有力的数学工具. 线性代数也广泛地应用于经济及管理科学中, 尤其是在运筹学起到重要作用; 在工程技术中 (如控制工程), 二次型有着广泛的应用.

一、数域

在线性代数中, 首先需要明确所考虑数的范围. 例如, 一个一元二次方程解的情况在实数和复数范围可能是不同的. 因此, 需要根据未知量的取值范围求解方程. 又如, 两个整数的商不一定是整数, 所以在整数范围内, 不总是可以做除法. 但在有理数 (可以表示为两个整数的商的实数) 范围, 只要除数不为零, 总是可以做除法. 因此, 为了明确所考虑的数的范围, 引入数域的概念. 线性代数的许多问题都是在给定的数域上讨论.

定义 0.1　设 $\mathbf{C}$ 是全体复数构成的集合, $\mathbf{P} \subseteq \mathbf{C}$, 称 $\mathbf{P}$ 为一个数域. 若

(1) 集合 $\mathbf{P}$ 至少含 2 个元素;

(2) 当 $a, b \in \mathbf{P}$ 时, $a+b, a-b, ab \in \mathbf{P}$; 又当 $b \neq 0$ 时, $a/b \in \mathbf{P}$.

不难证明全体复数构成的集合 $\mathbf{C}$, 全体实数构成的集合 $\mathbf{R}$, 全体有理数构成的集合 $\mathbf{Q}$ 都是数域. 任意数域都包含有理数域 $\mathbf{Q}$. 显然, 复数域 $\mathbf{C}$ 包含任意数域.

二、多项式

本书不单独讨论多项式, 这里仅介绍以后经常涉及的一些概念.

定义 0.2　设 $\mathbf{P}$ 是数域, 称如下表达式

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

为数域 $\mathbf{P}$ 上关于 x 的一元多项式, 其中 n 是非负整数, $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0 \in \mathbf{P}$.

为了方便, 用 $f(x), g(x)$ 等表示多项式, 若

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

且 $a_n \neq 0$, 则称 n 为 $f(x)$ 的次数. 用 $\mathbf{P}[x]$ 表示数域 $\mathbf{P}$ 上的全体多项式, 用 $\mathbf{P}_n[x]$ 表示数域 $\mathbf{P}$ 上次数不超过 n 的全体多项式.

设 $f(x) \in \mathbf{P}[x], c \in \mathbf{P}$. 若 $f(c) = 0$, 则称 c 为多项式 $f(x)$ 的一个**根**. 又若存在 $g(x) \in \mathbf{P}[x]$ 和非负整数 k, 使得

$$f(x) = (x-c)^k g(x),$$

且 $g(c) \neq 0$, 则称 c 是 $f(x)$ 的 k**重根**.

定理 0.1(代数学基本定理)　复数域上的 n 次多项式有 n 个根 (重根按重数计).

三、连加号与连乘号

(1) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$;

(2) $\displaystyle\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_i b_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_m)$;

(3) $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}$;

(4) $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 a_2 \cdots a_n$.

四、符号说明

(1) 英文小写字母 $i, j, k, l, m, n, p, q, r, s, t$ 表示正整数;

(2) 英文小写字母 a, b, c, d 和希腊字母 μ, ν 等表示数;

(3) 英文大写字母 A, B, C 等表示矩阵;

(4) 英文大写字母 D 表示行列式; 符号 $|A|$ 及 $\det(A)$ 表示方阵 A 的行列式;

(5) 希腊字母 $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \xi$ 表示向量;

(6) 英文大写字母 U, V 等表示线性 (向量) 空间;

(7) 花体英文大写字母 $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ 等表示线性变换;

(8) 用 $r_i \leftrightarrow r_j$ 表示交换行列式 (矩阵) 的第 i 行与第 j 行, $r_j + \mu r_i$ 表示行列式 (矩阵) 的第 i 行的 μ 倍加到第 j 行, μr_i 表示用数 μ 乘矩阵的第 i 行. 用 $c_i \leftrightarrow c_j$, $c_j + \mu c_i$, μc_i 分别表示相应的列变换.

第 1 章　行　列　式

这一章介绍 n 阶行列式的定义, 讨论行列式的性质及计算. 最后, 介绍行列式关于求解一类特殊的线性方程组的应用.

1.1　引　　言

对于二元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{1.1}$$

可用消元法求解. 为消去 x_2, 分别用 a_{22} 与 a_{12} 乘上述两个方程的两端, 然后两个方程相减, 得到

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2.$$

当

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$$

时, 可得

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}},$$

类似地, 可得

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

为了具体表达方程组 (1.1) 的解, 引入 **2 阶行列式**

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

把行列式 D 的第 1 列用常数项 b_1, b_2 替换; 第 2 列用常数项 b_1, b_2 替换, 得到行列式 D_1 和 D_2

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - a_{12}b_2, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

于是当 $D \neq 0$ 时, 方程组 (1.1) 的解可以表示成

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}.$$

例 1.1　求解二元一次方程组

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 12, \\ 2x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

解　因为

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - (-4) = 7 \neq 0,$$

且

$$D_1 = \begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 12 - (-2) = 14, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 24 = -21,$$

所以方程组的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{14}{7} = 2, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-21}{7} = -3.$$

考虑三元一次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \tag{1.2}$$

按照如下方式定义 **3 阶行列式**

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \end{aligned}$$

若 $D \neq 0$, 则方程组 (1.2) 的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D},\ x_3 = \frac{D_3}{D},$$

其中

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\ D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

上述结果表明行列式是解方程组的有力工具, 那么自然要考虑把上述结果推广到 n 元一次方程组, 即线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

为此, 首先需要定义 n 阶行列式, 并讨论其性质和计算方法.

1.2 全 排 列

为了定义 n 阶行列式, 引入自然数 $1,2,\cdots,n$ 的全排列及其逆序数的概念.

定义 1.1 称由自然数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个全排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 为一个 n 级排列.

例如, 1243 是一个 4 级排列, 32514 是一个 5 级排列. 自然数 $1,2,\cdots,n$ 的 n 级排列共有 $n!$ 个, 在这 $n!$ 个排列中, 只有排列 $123\cdots(n-1)n$ 遵守从小到大的顺序, 称为自然排列, 其余排列都存在某种 "逆序".

定义 1.2 在排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中, 若一个较大的数 i_k 排在一个较小的数 i_l 前面, 则称 i_k, i_l 构成该排列的一个逆序. 称逆序总数为该排列的逆序数, 记作 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$.

例如, 容易得到

$$\tau(32514) = 5,\ \tau(123\cdots(n-1)n) = 0$$

和

$$\tau\big(n(n-1)\cdots 321\big) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

在定义行列式时, 用到排列逆序数的奇偶性, 其定义如下:

定义 1.3 若一个排列的逆序数为奇 (偶) 数, 则称该排列为奇 (偶) 排列.

定义 1.4 交换一个排列中两个数的位置, 称为对该排列作一次对换.

排列的奇偶性与对换存在下面的关系:

定理 1.1 对排列作一次对换改变排列的奇偶性.

证明 先考虑特殊的相邻对换, 即交换相邻两个数的位置

$$i_1i_2\cdots i_ki_{k+1}\cdots i_n \to i_1i_2\cdots i_{k+1}i_k\cdots i_n.$$

不妨设 $i_k > i_{k+1}$, 则不难看出

$$\tau(i_1i_2\cdots i_ki_{k+1}\cdots i_n) = \tau(i_1i_2\cdots i_{k+1}i_k\cdots i_n) + 1,$$

即对换相邻两个数的位置, 改变排列奇偶性.

再考虑一般对换, 设 $k<l$, 对换 i_k 与 i_l

$$i_1\cdots i_k\cdots i_l\cdots i_n\to i_1\cdots i_l\cdots i_k\cdots i_n.$$

排列 $i_1\cdots i_k\cdots i_l\cdots i_n$ 通过 $l-k$ 次相邻对换后得到 $i_1\cdots i_l i_k i_{k+1}\cdots i_{l-1}i_{l+1}\cdots i_n$, 再经 $l-1-k$ 次相邻对换得 $i_1\cdots i_l\cdots i_k\cdots i_n$. 因此, 总共进行了 $2(l-k)-1$ 次相邻对换, 所以排列奇偶性改变.

由此定理可以证明在 $n!$ 个 n 级排列中, 有 $n!/2$ 个奇排列; 有 $n!/2$ 个偶排列.

1.3 行列式的定义

回顾 3 阶行列式的定义, 不难看出如下事实:

(1) 3 阶行列式恰好有 3! 项;

(2) 每一项形为 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$;

(3) 下标第一位 (行标) 构成自然排列 123. 下标第二位 (列标)j_1,j_2,j_3 的排列为 123, 231, 312, 321, 132, 213. 这 6 个排列的逆序数分别为 0, 2, 2, 3, 1, 1. 列标排列为偶排列的项符号为正, 列标排列为奇排列的项符号为负.

因此, 可以将 3 阶行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2j_3}(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}.$$

同样, 2 阶行列式也满足上述定义, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2}(-1)^{\tau(j_1j_2)}a_{1j_1}a_{2j_2}.$$

现在利用 n 级排列的奇偶性, 结合 2(3) 阶行列式, 给出 n 阶行列式的定义.

定义 1.5 定义 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

为代数和

$$\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

这里 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列求和.

在上述定义中, a_{ij} 为行列式第 i 行第 j 列的元素, $a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}$ 为主对角线上元素, a_{1n}, $a_{2,n-1}$, $\cdots$, a_{n1} 为副对角线上元素.

由定义, n 阶行列式是 $n!$ 项的代数和, 每一项是 n 个元素的乘积, 这 n 个元素来自于行列式的不同行与不同列. 行标按自然顺序排列时, 符号由这 n 个元素的列标排列的逆序数决定. 为方便, 通常用 D, $|(a_{ij})_{n\times n}|$, $\det(a_{ij})$ 等表示行列式. 特别地, 1 阶行列式 $|a_{11}|=a_{11}$.

例 1.2　计算行列式

$$\begin{vmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&2\\0&3&0&0\\4&0&0&0\end{vmatrix}.$$

解　由定义行列式是 4! 项的代数和, 每项形为 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$. 因为只有 a_{13}, a_{24}, a_{32}, a_{41} 不为零, 所以只有当 $j_1=3$, $j_2=4$, $j_3=2$, $j_4=1$ 时, 项 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$ 才不为零, 故

$$\begin{vmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&2\\0&3&0&0\\4&0&0&0\end{vmatrix}=(-1)^{\tau(3421)}1\times2\times3\times4=(-1)^5 24=-24.$$

例 1.3　证明

$$\begin{vmatrix}a_{11}&0&\cdots&0&0\\0&a_{22}&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&a_{n-1,n-1}&0\\0&0&\cdots&0&a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{n-1,n-1}a_{nn}.$$

证明　因为项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{n-1,j_{n-1}}a_{nj_n}$ 中不为零的只有 $a_{11}a_{22}\cdots a_{n-1,n-1}a_{nn}$, 且这一项的符号为正, 所以结论成立.

上例中行列式称为**主对角行列式**.

例 1.4 证明

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{n-1,n-1}a_{nn}.$$

证明 记左边行列式为 D, 则

$$D = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{n-1,j_{n-1}}a_{nj_n}.$$

考查形为 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{n-1,j_{n-1}}a_{nj_n}$ 中不为零的项.

首先, 当 $j_n < n$ 时, $a_{nj_n} = 0$, 故只有当 $j_n = n$, 即形为 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{n-1,j_{n-1}}a_{nn}$ 的项才可能不为零.

其次, 当 $j_{n-1} < n-1$ 时, $a_{n-1,j_{n-1}} = 0$, 所以只有当 $j_{n-1} = n-1$ 和 $j_{n-1} = n$ 时, 项 $a_{11}a_{2j_2}\cdots a_{n-1,j_{n-1}}a_{nj_n}$ 才可能不为零. 但是 j_n 已经取了 n, 故 j_{n-1} 只能取 $n-1$. 因此只有形为 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{n-1,n-1}a_{nn}$ 的项才可能不为零.

最后, 依此类推, 只有形为 $a_{11}a_{22}\cdots a_{n-1,n-1}a_{nn}$ 的项才可能不为零, 且这一项的符号为正, 因此结论成立.

上例中行列式称为**上三角行列式**. 此外, 还有下述结论:

(1) **副对角行列式**

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1};$$

(2) **下三角行列式**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{n,n-1}a_{nn}.$$

在 n 阶行列式的定义中, 每一项的 n 个元素的行标按自然顺序排列. 因为数的乘法满足交换律, 所以交换每一项中 n 个元素的顺序, 可以使列标按自然顺序排列. 事实上, 有如下定理:

定理 1.2 对于 n 阶行列式, 有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}.$$

证明 记左边的行列式为 D, 则

$$D = \sum_{j_1 \cdots j_k \cdots j_l \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_k \cdots j_l \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{kj_k} \cdots a_{lj_l} \cdots a_{nj_n},$$

其中每一项的行标为自然排列, 逆序数为 $s = \tau(1 \cdots k \cdots l \cdots n) = 0$; 列标排列逆序数为 $t = \tau(j_1 \cdots j_k \cdots j_l \cdots j_n)$.

交换元素 a_{kj_k} 与 a_{lj_l} 的位置, 则行标排列逆序数变为 $s_1 = \tau(1 \cdots l \cdots k \cdots n)$, 列标逆序数变为 $t_1 = \tau(j_1 \cdots j_l \cdots j_k \cdots j_n)$. 因为交换元素 a_{kj_k} 与 a_{lj_l} 的位置使得行标排列与列标排列同时作了一次对换, 行标排列与列标排列的奇偶性都改变, 但行标排列与列标排列的逆序数之和的奇偶性没有改变, 所以

$$\begin{aligned} &(-1)^{\tau(j_1 \cdots j_k \cdots j_l \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{kj_k} \cdots a_{lj_l} \cdots a_{nj_n} \\ =&(-1)^{s+t} a_{1j_1} \cdots a_{kj_k} \cdots a_{lj_l} \cdots a_{nj_n} = (-1)^{s_1+t_1} a_{1j_1} \cdots a_{lj_l} \cdots a_{kj_k} \cdots a_{nj_n}. \end{aligned}$$

经若干次交换后, 使得列标排列变为自然排列, 行标排列从自然排列变为某个排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$, 且

$$(-1)^{\tau(j_1 \cdots j_k \cdots j_l \cdots j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{kj_k} \cdots a_{lj_l} \cdots a_{nj_n} = (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}.$$

由于项 $a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$ 的 n 个元素来自于行列式的不同行与不同列, 而且这样的项恰有 $n!$ 个, 故

$$D = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}.$$

1.4 行列式的性质

一般的 n 阶行列式是 $n!$ 项的代数和, 当 n 较大时, 用定义来计算的计算量很大的, 因此, 有必要简化行列式的计算. 为此, 先研究行列式的性质. 记

$$D = |(a_{ij})_{n \times n}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称行列式 D^{T} 为 D 的**转置行列式**.

性质 1.1 行列式与其转置行列式相等.

证明 令 $b_{ij}=a_{ji}, i,j=1,2,\cdots,n$. 于是

$$\begin{aligned}D^{\mathrm{T}}&=\begin{vmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1n}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b_{n1}&b_{n2}&\cdots&b_{nn}\end{vmatrix}\\&=\sum_{k_1k_2\cdots k_n}(-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_n)}b_{1k_1}b_{2k_2}\cdots b_{nk_n}\\&=\sum_{k_1k_2\cdots k_n}(-1)^{\tau(k_1k_2\cdots k_n)}a_{k_11}a_{k_22}\cdots a_{k_nn}.\end{aligned}$$

由定理 1.2, 有 $D^{\mathrm{T}}=D$.

注 1.1 由性质 1.1, 行列式关于行的性质, 关于列皆成立.

性质 1.2 交换行列式的两行, 行列式反号, 即

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{j1}&a_{j2}&\cdots&a_{jn}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\xlongequal{r_i\leftrightarrow r_j}-\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{j1}&a_{j2}&\cdots&a_{jn}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}.$$

证明 记上式左边行列式为 D, 右边行列式为 D'. 由行列式定义, 有

$$\begin{aligned}D'&=\sum_{p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{np_n}\\&=-\sum_{p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n}=-D.\end{aligned}$$

推论 1.1 若行列式有两行元素对应相同, 则行列式为零.

性质 1.3 行列式某行元素的公因子可以提到行列式符号以外, 即

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\ca_{i1}&ca_{i2}&\cdots&ca_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}=c\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}.$$