THIRD EDITION

ADVANCED ENGINEERING MATHEMATICS

By Erwin Kreyszig

高等工程數學

第一冊

袁定培 譯

東華書局印行

高等工程數學

第一冊

著者

克雷斯聚格

譯者

袁定培

東華書局印行

中華民國六十二年十月初版
中華民國六十八年二月七版

大學用書 **高等工程數學**（全四冊）

第一冊 定價新臺幣五十元整
（外埠酌加運費滙費）

著　者　克雷斯聚格
譯　者　袁定培
發行人　卓鑫淼
出版者　臺灣東華書局股份有限公司
　　　　臺北市博愛路一〇五號
印刷者　中臺印刷廠
　　　　臺中市公園路三十七號

行政院新聞局登記證　局版臺業字第零柒貳伍號
（61090）

原　序

本書目的　此書主旨，係對研習工程及物理之讀者，介紹近代數學中，有關實際問題之各種最重要課目。各項主題，依據其在應用方面遭遇之多寡情形，精心加以選擇。近年來，在工程教育專題討論會上，所發表各種有關現代數學之新觀念，均被考慮予以搜集。無論對已在數學訓練方面，早訂有擴展課程計劃之各院校，或正準備適應一般潮流，而加强其數學訓練計劃之學術機構，此書應均適合。

基本微積分，係研讀本書前之惟一先修課程。

本書所搜集之材料，係選自美國，加拿大，及歐洲各學校大學部及研究所內，為研習工程，物理，或數學者所講授之主要課程。

本書第三版之改進要點　此一版本與第一、二兩版主要不同之處如下:

習題均已改變。

對工程師們所習用之數值方法，已增列一新章(**第18章**)，其內容適合每週三小時一學期課程之用。

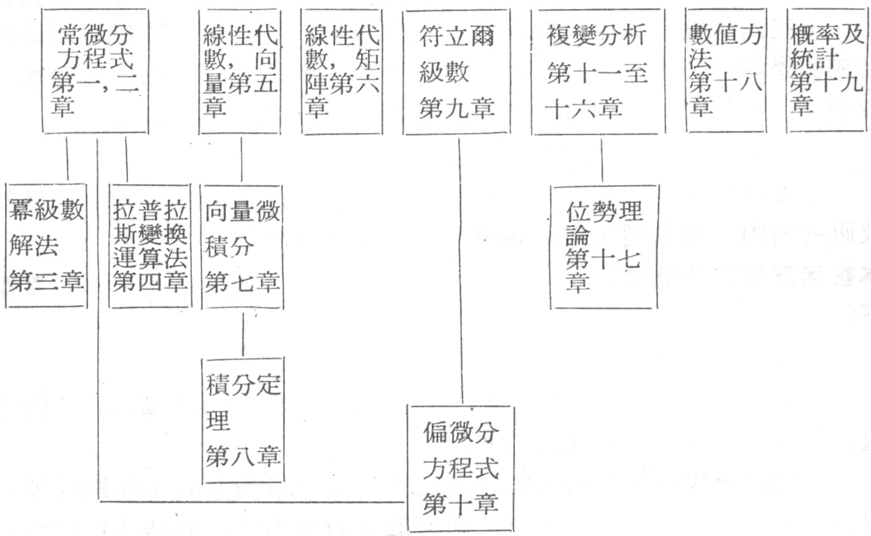
有關線性代數及分析（即包含於第五至八章內之向量和矩陣等）方面之材料，均經修改和擴充。新採取之討論方法，同時注重代數及幾何兩方面之特性。第五章中也增列有向量空間(Vector Space)，內積空間(Inner Product Space)以及泛函數(Functional)分析和應用方面其他重要觀念之介紹。

此種主要改變之動機，係由於最近十年來有關工程數學之發展，特別是由於廣泛利用自動電子計算機解答工程問題之可能性，以及線性代數方法之日增重要性所使然。

其他改進方面，包括貝索函數和雷建德多項式理論之簡要介紹。尤其是此等函數的正交特性，已提前在斯特姆—利奧維爾理論(Sturm-Liouville theory)中予以更詳盡之討論(第三章)。

包含參考文獻的附錄1已列入最新資料並加以補充。有關基本及高級函數之各種常用公式，亦經搜集而增列入附錄3內，此可替換舊版開始之0章。爲便利使用本書起見，各類數值表格均經歸納列入附錄4。

本書內容及其安排　本書各重要部分之間，其主題材料之安排，可由下列圖解表示。



本書中對常微分方程式，線性代數和向量分析，以及複變分析，此三種也許是工程師們最感重要之部門，所提供之討論，極具分量。其他如符立爾級數；偏微分方程式，數值方法，以及概率，統計等各章之長度，亦使能包含足夠之材料，以便通常各類課程採作教本之用。

短期課程可予省略之節數，均在每章之前，加以註明。爲便利選用本書部分內容起見，各章均儘可能保持其獨立（即互不相關）性。

所有各章均分爲若干較短之節數，每節均含有闡釋觀念、方法、結果、以及工程應用之例題及習題。

本書包含各種歷史性之註脚，原始參考文獻，以及400個以上之

挿圖。

參考資料　　若干用作參考及進一步研究之書籍，亦經在本書末尾附錄1內列表備查。部分有關特殊函數之公式，則包含在附錄3內。

習題和答案　　本書備有3500個以上精心選擇之習題，包括簡單之一般練習，以及甚爲複雜之實際應用。單號習題答案，列於本書末尾附錄2內。

函數表綜合列入附錄4。

課程順序建議　　全部材料，可按下列次序研讀，並適宜分作每週3-5小時，四個連續學期課程之用：

第一學期：常微分方程式（第一至四章）

第二學期：線性代數及向量分析（第五至八章）。

第三學期：符立爾級數，偏微分方程式（第九，十章），數值方法（第18章）

第四學期：複變分析（第十一至十七章）。

另一有關**工程統計學**（每週3-5小時；第十九章）之課程，則可在上列之任一學期中，或以後開授。

單獨一學期課程　　此外本書亦適宜於作一學期獨立課程，每週三小時之用，例如：

常微分方程式入門（第一，二章）

拉氏變換運算法（第四章）

向量代數及微積分（第五，七章）

矩陣及線性方程式系統（第八章）

符立爾級數及偏微分方程式（第九，十章）

複變分析（第十一至十六章）

數值分析（第十八章）

縮短課程　　縮短課程時，可予省略之節數，均在每章前面，加以註明。

選擇主題之準則　　本書一類之著作，究應包含那些主題？以及此等主題應如何安排和介紹？

爲尋得上述各基本問題之答案起見，吾人可追溯工程數學發展之

一段歷史，此項發展顯示出如下兩種有趣事實。

1. 數學在工程科學中日趨重要，且可預測此項情形，將一直繼續下去。此種趨勢之一重要原因，係由於近代工程問題已變成如此複雜，使得吾人不可能似以往之純靠物理直覺，或僅憑過去經驗以求得其解答。此種實驗方法，過去對若干問題之解答，相當成功。但當極高速度，極大力量，極高溫度，或其他不正常條件摻入時，則無法予以解決而致失敗。且當各種具有不尋常物理特性之近代新穎材料（如塑膠，合金等）出現後，情況更加嚴重。因此上述之實驗工作，達到費時，費力之驚人複雜程度。此時數學乃可予以協助，以籌劃實驗及其構造，計算出實驗數據，並減少其尋求解答之工作與費用。

2. 過去基於純理論性之原因而發展之數學方法，在工程數學中突然變成十分重要。例如矩陣，保角寫像之理論，以及具有循環性解答之微分方程式之理論等。

以上之發展事實，對工程數學教學方面之反應如何？由於所需求之數學不斷增加，吾人應否在課程中，增加更多之主題數目，而致減少每一主題所佔有之時間？或應集中精力，選出若干具有實際重要性之少數重要事物，俾便適於教學訓練，並啓迪學生之數學思想，以發展其本身之創造能力？六十或八十年以前，無人能預知保角寫影或矩陣，將在工程業務之數學部分，佔據重要之位置。在相似情形下，欲預測何類數學理論，在今後二十或三十年，將對工程應用方面增加其重要性，亦屬極爲困難。惟無論將發生之事實如何，具有良好數學訓練基礎之學者，將可適合未來之各種需要，而能利用其所學，以熟習新穎數學方法。因此工程數學教育最重要之目標，在使學生如何熟習運用數學之思考方法，並認識各項指導原理及觀念之幕後背景。此點較僅學習如何正式運用數學方法，更爲重要。學者應認識數學並非搜羅戲法或秘訣，而係建立在較少數基本觀念上之一門具有實際重要性和系統性科學，其中包含有極具效力之各種統一方法。學者尤應深切體會運用數學程序於工程問題之必要，而發覺理論和應用間之相互關係，有如樹木和果實間之彼此密切性一樣。

讀者將可看出應用數學在解答工程問題時，包含三項主要步驟:

1. 將已知物理資料"翻譯"成數學形式。如此吾人可得出該物理情況之一種數學翻版模型。此模型可能卽爲一微分方程式，一組聯立線性方程式，或其他之數學代表形式。

2. 將此模型利用數學方法處理之，此卽導致已知問題數學形式之解答。

3. 將此數學解答之結果，以物理條件解釋之。

所有以上三步驟似有相等之重要性，而本書在作各種介紹時，主要在輔助讀者，能充分發揮其完成三項步驟之技術。故有關應用問題之選擇，以具有一般性者爲優先。

在若干之討論情形下，常不免依賴各種已知結果，其證明之手續或方法，常超出類似本書水準之範圍。遇有此等情形時，書中均一一加以明顯之註解。因困難之隱瞞，或事物之過度簡化，對從事職業性工作之讀者均無裨益。以上卽係作者對選擇及介紹本書題材之若干指導原則。各項材料之選擇，均曾根據過去及目前之教學及研究經驗，在極爲審愼之態度下，作成決定。有時甯對勸使包含工程數學中之"每一重要事物"之誘惑性建議，拒絕加以考慮。

關於如何方能對各項主題，儘可能作簡單明瞭而準確之介紹方面，作者曾加以特別之努力，其中亦包括註解符號之選擇，每章中水準之深度，逐漸增加，並避免各種艱深理論之跳越及累積。

銘謝　作者對其從前許多老師，同事，和同學，在編著本書時所提供之協助和建議，深致謝意。原稿之若干部分，係以油印形式，先分發給各班同學，再由彼等細閱後，加註改進建議退還。與許多工程師及數學家之討論，對作者實有極大之幫助，其中本人願特別提出柏格曼(S. Bergman)，張伯(P. L. Chambré)，克郎漢(A. Cronheim)，德特曼(J. W. Dettman)，赫爾索(R. G. Helsel)，克利普(E. C. Klipple)，孔氏(H. Kuhn)，曼氏(H. B. Mann)，馬克思(I. Marx)，孟羅(W. D. Munroe)，浦氏(H. W. Pu)，瑞多(T. Rado)(十)，史密斯(H. A. Smith)，史本賽(J. P. Spencer)，

托德（J. Todd），懷斯（H. J. Weiss），及衞南斯基（A. Wilansky）等在美國之各位教授，多倫多（Toronto）之柯克斯特（H. S. M. Coxeter）教授，以及在歐洲之保羅（B. Baule），彭克（H. Behnke），費羅原（H. Florian），格拉夫（H. Graf），何享伯格（F. Hohenberg），克羅特（K. Klotter），賓氏（M. Pinl），路特（F. Reutter），史密登（C. Schmieden），恩格（H. Unger），華爾特（A. Walther）（†），衞南德（H. Wielandt）教授等。在此作者僅能表示其誠摯之謝意。

最後，本人應向約翰-衞律和孫氏公司（John Wiley and Sons）對其編印此版本書時之有效合作和審愼精神，表示感謝。

許多讀者所提供之寶貴建議，均在編印此版時，予以採納。其他任何對改進本書之批評和意見，將受本人之衷心歡迎。

愛文-克雷斯聚格
(Erwin Kreyszig)

高 等 工 程 數 學

第 一 册 目 錄

第三章 微分方程式之冪級數解法.正交函數

第四章 拉普拉斯變換運算法

第 一 章

首階常微分方程式

Ordinary Differential Equations of the First Order

在工程數學中，微分方程式具有基本重要性。此係由於甚多之物理現象和關係，均可以微分方程式之數學形態表達之故。吾人將研究各種不同之物理及幾何問題，如何導致其微分方程式，以及求解此類方程式最重要之標準方法。在解答中通常用到積分法。

對於如何從一實際問題，導出其微分方程式，吾人將特別重視。此種由“物理問題”變至其相當“數學模型”之轉移過程，在實用上非常重要。吾人將列舉若干典型例題，加以示範。

本書最前面四章，致力於常微分方程式之討論，而本章則係由此等方程式中之最簡單者，即所謂首階方程式者開始。有關利用**數值方法**以求得其近似解答之介紹，則包含在 18.6 節以內，而該節與第18章內其他各節無關。

研讀本章前之預修科目：積分學。

短期課程可省略之節數：1.8—1.12 各節。

參考資料：附錄 1，B 部份。

習題答案：附錄 2。

1.1 基本觀念及認識

吾人將在本節內解釋有關微分方程式之基本觀念，並舉例加以示

範。然後由物理及幾何學中選取兩簡單而實際之問題予以討論。如此可使吾人對微分方程式之性質，目的，和應用能有初步之瞭解。

常微分方程式是一種數學等式關係，其中包括一自變數 x 之未知函數 y，對於 x 之一階或高階微分導數；此類關係也可以包含 y 本身，x 之函數及常數等在內。例如：

(1) $$y'=\cos x,$$

(2) $$y''+4y=0,$$

(3) $$x^2y'''y'+2e^xy''=(x^2+2)y^2$$

均爲常微分方程式。

常字即表示其對於**偏微分方程式**（Partial differential equation）之區别，偏微分方程式包含一未定函數 y 之對二個或二個以上獨立變數之偏微分。例如：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

即爲偏微分方程式。在本章中吾人僅將考慮常微分方程式。

若一常微分方程式中，y 對 x 微分導數之最高階數爲 n，則稱其爲 **n 階**（Order）。此種微分方程式"階"數之表示法，提供一項有用之分類方法，即區分爲一階，二階，或更高階等。故 (1) 式爲一首階微分方程式，(2) 式爲二階，(3) 式爲三階。本章中僅討論首階微分方程式，二階以及更高階者，將於二至四章中繼續討論之。

一函數

(4) $$y=g(x)$$

可謂爲已知首階微分方程式，在某區間如 $a<x<b$（亦可能無限）內之**解答**(Solution)。設在此區間內每一處該函數均有定義，並可予以微分，且當 y 及 y' 以 g 及 g' 代替時，原微分方程式之等式恆能成立。

例如，對所有 x 而言，函數

$$y=g(x)=e^{2x}$$

爲首階微分方程式 $y'=2y$ 之解答.

因 $g'=2e^{2x}$,

又將 g,g' 代入原方程式，原式變爲恆等

$$2e^{2x}=2e^{2x}.$$

有時一微分方程式之解答，將以隱函數形式出現，例如:

$$G(x,y)=0,$$

此卽稱爲**隱函數解答**(Implicit solution)，以別於**顯函數解答**(Explicit solution),〔如（4）式〕。例如:

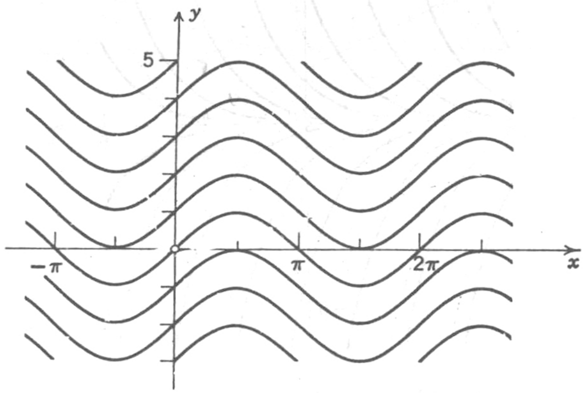
$$x^2+y^2=1 \qquad (y\neq 0)$$

卽爲 $yy'=-x$

在 $-1<x<1$ 區間內之隱函數解答，讀者自可驗證。

微分方程式理論之主要工作，爲尋求已知微分方程式之所有解答，並分析其性質。吾人將研討各種不同之標準方法，以達到此項目的。

一微分方程式可有許多解答，此可以下例證明之。



第 1 圖　$y'=\cos x$ 之解答

例 1　下列每一函數

$$y=\sin x,\quad y=\sin x+3,\quad y=\sin x-\frac{4}{5}$$

均爲微分方程式 (1) $y'=\cos x$，之解答。
由微積分中可知，此方程式任何解答之形式爲：

(5)　$$y=\sin x+c$$　c 爲一常數

若 c 爲任意常數，則 (5) 式代表原方程式之全解（參看第 1 圖）。

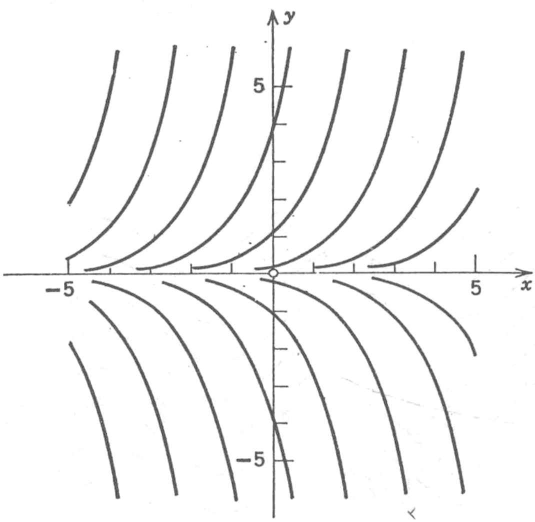
例 2　讀者可證明下列函數對所有 x 而言

(6)　$$y=e^x,\quad y=2e^x,\quad y=-\frac{6}{5}e^x$$

均爲微分方程式　$y'=y$　之解答。
在以後討論中，吾人將獲知該方程式之任意解爲

(7)　$$y=ce^x$$　c 爲常數

若將 c 視爲任意常數，則 (7) 式將代表原方程式之所有解答（參看第 2 圖）。



第 2 圖　$y'=y$ 之解答

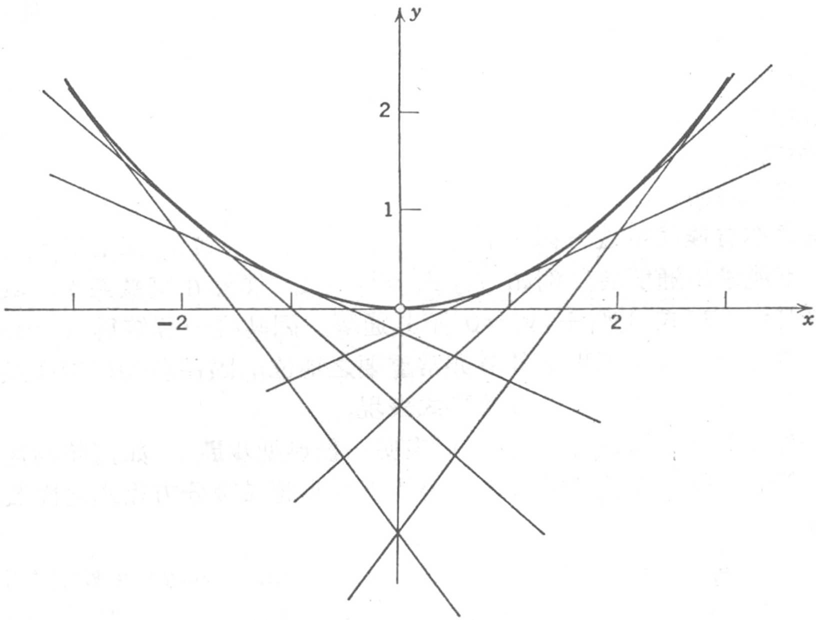
由上述各例，吾人已知一微分方程式，可具有（通常將具有）一

個以上之解答，甚至有無限多數之解。用一單獨之公式含有一任意常數[1]以表示之，習慣上稱此含有一任意常數之函數，爲原首階微分方程式之**通解**（General solution），若賦與常數 c 一特定值，則稱此解爲其**特解**（Particular solution）。

故 (7) 式乃方程式 $y'=y$ 之通解，而 (6) 式則爲其特解。

吾人將在以後諸節中，研討各種不同之方法，以求得首階方程式之通解。讀者將明瞭，對一方程式之不同解法所得之各通解，具有唯一特性，僅在形式上有所不同而已，此即稱爲該方程式之通解。

吾人必需指出在某種情形下，一已知微分方程式，亦可能含有其他解答，不可能從設定通解中常數 c 之值而得出，此解稱爲**奇解**（Singular solution）。



第 3 圖　(8) 式之奇解及特解

註 1：常數的範圍，在某些情形下，必須加以限制，以避免虛數，或其他退化（Degeneracies）情形之產生。