

# 初中数学解题思路 和方法指导

尚延亮 孟宪元 李兴林 主编

中国广播电视出版社

# 初中数学解题思路 和方法指导

尚延亮 孟宪元 李兴林 主编

中国广播电视出版社

(京)新登字097号

《初中数学解题思路和方法指导》  
编委会

主 编：尚延亮 孟宪元 李兴林

副主编：董龙贵 毕艳丽 王钦玉

编 委：(以姓氏笔画为序)

尹利军 孔令良 曲桂东 刘俊和

张培利 李淑华 韩晓东 颜世明

初中数学解题思路和方法指导

尚延亮 孟宪元 李兴林 主编

中国广播电视出版社出版

(北京复外广播电影电视部灰楼 邮政编码100866)

山东泰安十九中学印刷厂

新华书店总店北京发行所经销

\*

787×1092毫米 32开 7.25印张 156千字

1993年5月第1版 1993年5月第1次印刷

印数1—5000册 定价7.80元

ISBN7-5043-1639-3/G·601

# 前 言

百年大计，教育为本，而中学教育作为整个教育事业的基础部分和承上启下的关键环节，更有其独特的重要地位。近年来，伴随着我国“四个现代化”的迅速推进和“义务教育法”的逐步实施，中小学教育日益受到重视并得以蓬勃发展。但同时也出现了一些令人忧虑的不良现象，如学生学习负担过重、学习效果欠佳、厌学年龄下降、厌学人数增加等。这些现象固然与中学生面临的升学压力、作业负担及思想品德状况有关，但更重要的是中学生缺乏学习方法的指导，学不得法。

古人云：“事必有法，然后可成，师舍是则无以教，弟子舍是则无以学。”教学的真正含义是教会学生学习。实践证明，正确的方法是实现目标的指南针。学生只有掌握了科学的学习方法，才能学得主动，习得有效，成为名副其实的学习主人。正如《学记》所言：“善学者，师逸而功倍，又从而庸之；不善学者，师勤而功半，又从而怨之。”特别是在当今这种人类知识量积累速度加快、废旧率增高、文理渗透、纵横交错的信息时代，教学如果仅仅停留在知识的传授而不是方法的指导上，势必会使整个教学活动陷入教不胜教、学不胜学的境地，而致事倍功半甚或劳而无功。未来学家曾预言：未来的“文盲”将不是目不识丁的人，而是一些没有掌握学习方法、不会钻研问题、缺乏预见能力的人。这话可能说得有点尖苛，但却不无道理。

常言道：“授人一鱼，不如授人以渔。”学生的学习不

能仅满足于知识量的叠加和储存，更重要的是要学到一套科学的学习与思维方法。这才是终生取之不尽、用之不竭的真正的“财富”。为了对我国广大优秀教师在教学实践中所积累、创造的指导学生学习的宝贵经验与科学方法加以总结和推广，同时也为广大中学生提供一把尽快打开数学知识大门的“钥匙”，我们组织、邀请了部分高师院校的专家、学者和工作在中学教学第一线的优秀教师、特级教师，包括执教多年的离退休教师，编纂出版了这本酝酿已久的《初中数学解题思路和方法指导》，使学生一册在手，就能得到众多经验丰富的优秀教师的循循善诱和科学指导，同时也为中学教师提供一本指导学生学习数学的教学参考书。

囿于我们编纂者的学识与经验，加之作者水平参差，《书》中难免有疏漏、偏颇和错误之处，诚望同志们不吝斧正。

编者

1993年5月1日

# 目 录

|                           |                    |
|---------------------------|--------------------|
| 前 言 .....                 | ( 1 )              |
| 第一章 教材分析指导 .....          | ( 1 )              |
| 怎样学好初中代数 .....            | 尚延亮 ( 1 )          |
| 掌握基础知识是几何入门的关键 .....      | 董龙贵 ( 11 )         |
| 浅谈几何学习 .....              | 宁尚奇 ( 17 )         |
| 第二章 课堂学习指导 .....          | ( 31 )             |
| 预习的作用与方法 .....            | 李桂芳 ( 31 )         |
| 如何听好一堂数学课 .....           | 张培利 李兴林 ( 36 )     |
| 第三章 理解与记忆指导 .....         | ( 41 )             |
| 记忆与数学学习 .....             | 李桂芳 颜世明 ( 41 )     |
| 第四章 综合与应用指导 .....         | ( 46 )             |
| 怎样学好数学概念 .....            | 李兴林 ( 46 )         |
| 掌握解题思路, 提高解题能力 .....      | 尚延亮 ( 49 )         |
| 浅谈数学解题策略中的逆向思维 .....      | 孔令良 ( 58 )         |
| 转化的方法及其应用 .....           | 赵 立 ( 66 )         |
| 列方程 ( 组 ) 解应用题的一般规律 ..... | 尚延亮 ( 71 )         |
| 如何进行二重根式的化简 .....         | 毕艳丽 ( 80 )         |
| 如何探求几何定值问题中的定值 .....      | 庞新琴 张凡海 张传岁 ( 85 ) |
| 怎样添置几何辅助线 .....           | 尚延亮 ( 93 )         |

|     |                                           |                   |
|-----|-------------------------------------------|-------------------|
|     | 几何中不等关系的证明·····                           | 孔德勇 (108)         |
|     | 解题技巧谈·····                                | 王钦玉 刘俊 (114)      |
|     | 解题中的常见错误及错因分析<br>·····                    | 尚延亮 (124)         |
|     | 要善于利用课后练习与习题<br>·····                     | 王钦玉 (133)         |
|     | 解题中怎样发掘和运用隐含条件<br>·····                   | 孙文田 尹利军 (140)     |
|     | 初中数学竞赛中关于整数整除性问题<br>的常用解法·····            | 姚存峰 (143)         |
| 第五章 | 复习与应考指导·····                              | (150)             |
|     | 明确要求, 突出重点, 扎实打好数学基础<br>——初中数学毕业复习建议····· | 尚延亮 (150)         |
|     | 如何进行知识的整理·····                            | 尚延亮 孟冬梅 (159)     |
|     | 从中考命题原则, 谈如何进行复习<br>·····                 | 宁尚奇 (170)         |
|     | 考前准备与考试中的心理调节·····                        | 张培利 (179)         |
| 第六章 | 综合练习·····                                 | 张凡海 (186)         |
| 附录  | ·····                                     | (213)             |
|     | 苏步青谈秘诀·····                               | 曲桂东 李淑华 (213)     |
|     | 书呆子的左右铭·····                              | 韩晓东 (214)         |
|     | 记忆口诀·····                                 | (215)             |
|     | 代数部分·····                                 | 张培利 尚延亮 王钦玉 (215) |
|     | 几何部分·····                                 | 李淑华 孙学文 王正峰 (217) |
| 后 记 | ·····                                     | (221)             |

# 第一章 教材分析指导

## 怎样学好初中代数

尚延亮

代数是以研究现实世界中的数量关系为主的一门科学，它的本质是采用字母表示数，并以数的运算性质为依据来进行数、字母以及字母表达式的运算。著名法国数学家韦达曾经说过这样一句话：“若不嫌太简单的话，代数就是字母代替数。”在初中开设代数这门课程的目的就是使同学们掌握数、式、方程、不等式、指数、对数、函数、三角、统计等方面的基本概念和基本性质，掌握有关的计算公式与运算法则，熟练进行有关的运算，进一步培养运算能力、逻辑思维能力以及应用数学知识分析问题和解决问题的能力。本文结合教材的特点、结构及教学要求，从宏观上谈谈学习初中代数的方法。

### 一、抓住教材特点，注意“两个结合”

初中代数教材的特点，可概括为“程序性”。所谓程序，是指事物进行的先后次序，对代数来说是指操作的先后次序。初中代数教材中，大量的按法则、公式的形式出现，而这些法则、公式一般是具有程序性的。至于定义，实际是说明操作的对象。一般地，初中代数教材的程序性表现为三种形式：

（一）直接带有程序性。例如，教材中对于一元一次方程的解法总结了五个步骤：1、去分母；2、去括号；3、移项；4、合并同类项，化为最简方程  $ax=b$  ( $a \neq 0$ )

的形式；5、方程两边同除以未知数的系数 $a$ ，得出方程的解  $x = \frac{b}{a}$ 。这五步就是一种操作的程序，操作的对象就是一元一次方程。

(二)可化归为程序性。如单项式相乘的法则，课本上是这样叙述的：“单项式相乘，用它们的系数的积作为积的系数，对于相同的字母，用他们的指数的和作为积里这个字母的指数，对于只在一个单项式里含有的字母，则连同它的指数作为积的一个因式。”虽然这一法则不是以步骤的形式出现，但是，它可以化归为一定的操作步骤：1、把单项式的系数相乘作为积的系数；2、把所乘的单项式里出现的字母按字母排列的顺序写下来；3、把相同字母的指数相加作为积里这个字母的指数；4、只在一个单项式里出现的字母，积里这个字母的指数就是原来这个字母的指数。由此可见，只要按上述程序进行，总可以将积求出。

(三)各种操作，有序地对接形成程序性。例如，要解决异分母分式相加减的问题，就要将通分、求最小公倍式、多项式因式分解、同分母分式相加减等一系列简单操作对接起来，如图1—1。不难看出，这样整个过程就带有程序性了。

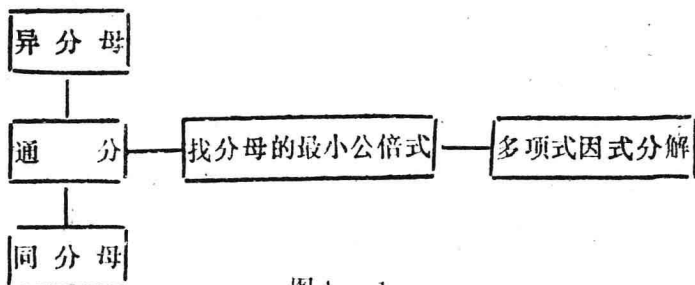


图1—1

鉴于初中代数教材的这种程序性特点，同学们在学习初中代数时，要特别注意“两个结合”。一是“怎么做”与“为什么这样做”的结合。程序型的教材偏重指明“怎么做”，至于“为什么这样做”、“这样做的根据是什么”却不明显。因此，代数课很容易变成纯粹的技术操作课。显然这是一种低层次的学习。相反地，在操作过程中如果经常思考“为什么这样做”、“这样做的根据是什么”，那么，记忆模仿的学习就变成了理解创造水平的学习。久之，思维能力就会得到明显提高。二是“死”与“活”的结合。应当承认，程序型的教材能使初学者有法可依，易于自学，但容易造成思维定势。例如，解方程： $(x-1)(x-2)+1=x$ ，若依照常规解法，就要进行去括号、移项、合并同类项，然后运用求根公式或因式分解去求解。如果按下面的方法去做： $(x-1)(x-2)-(x-1)=0$ ， $(x-1)(x-3)=0$ ，马上就得到方程的两个根： $x_1=1$ ， $x_2=3$ 。其解法就灵活多了。所以学习初中代数要注意“死”与“活”的结合。在这里，“死”就是法则、公式，它是有章可循的；“活”就是要根据题目的特殊性，采用灵活多变的方法。没有“死”就不可能“活”，只有先“死”后“活”，“死”、“活”结合，方可越学越活。

## 二、把握教材结构，揭示内在联系

初中代数的内容，涉及到数、式、方程、函数，此外还有解三角形及统计初步。其中最基本最主要的内容仍为数、式、方程、函数四大块。在安排上，采取分年级穿插、交错处理的做法，如表1—1。

下面就初中代数的主要内容作一简要的分析。

表1-1

| 分 段 |           | 数           | 式                        | 方 程                      | 函 数              |
|-----|-----------|-------------|--------------------------|--------------------------|------------------|
| 初   | 1 ~ 5 章   | 有理数集        | 整式的加减                    | 一次方程、一次不等式、一次方程组         |                  |
| 一   | 6 ~ 8 章   | 仍在有理数集内     | 整式的乘法、因式分解、整式的除法、分式      | 分式方程                     |                  |
| 初二  | 9 ~ 12 章  | 数的开方<br>实数集 | 二次根式、<br>$n$ 次根式、<br>指 数 | 二次方程、可化为二次方程的方程、简单的二次方程组 |                  |
| 初三  | 13 ~ 16 章 | 仍在实数集内，统计初步 | 对 数                      | 一元一次不等式组、一元二次不等式         | 函数及其图象、三角函数、三角解形 |

## (一) 知识结构图(图1-2)

## (二) 数是基础，式子变形是工具

不论是解方程、代数式的运算还是对函数的研究，都离不开数。对于同一方程，由于所指定的数的范围不同，其解一般也不同。例如方程  $2x + 4 = 3$  在自然数集内无解，在整数集内也无解，而在有理数集内有唯一的解  $x = -\frac{1}{2}$ 。再者，式的运算除遵循本身的一些运算法则外，最后的运算常归结到数的运算。如，合并同类项  $2x + 3x = (2 + 3)x$ ；合并同类根式  $7\sqrt{m} - \frac{1}{3}\sqrt{m} + \sqrt{m} = (7 - \frac{1}{3} + 1)\sqrt{m}$ ；同底数

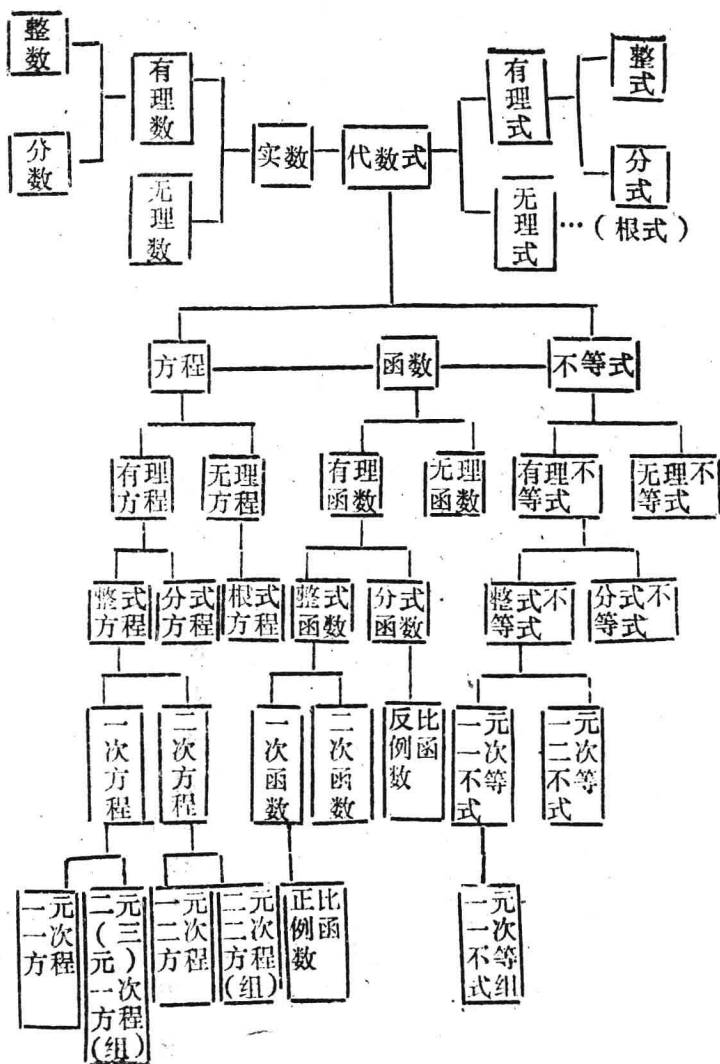


图 1—2

的幂相乘或相除  $m^2 \cdot m^7 = m^{2+7}$ 、 $n^5 \cdot n^8 \div n^2 = n^{5+8-2}$  等等。另外，研究函数也是离不开数集的。我们知道，离开定义域（自变量的取值范围）去谈论函数是毫无意义的。而在初中阶段，函数的定义域一般是指所给函数解析式的自然定义域。如函数  $y = \frac{1}{x}$  的定义域为一切非零实数。所以说函数与数集也是密切相关的。至于式子的变形，实际上是一种工具。这是因为无论研究方程或函数都离不开变形。如解方程中的去括号、合并同类项、因式分解、通分、配方等都是式子的变形，对解方程来说“变形”就是一种工具。

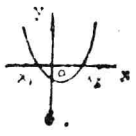
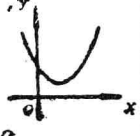
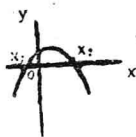
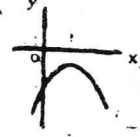
综上所述，在数、式、方程、函数四大块内容中，数是基础，式子变形是工具。因此，同学们要努力学好数的有关概念和运算，熟练掌握式子的有关变形。进而为学好初中代数打下坚实的基础。

### （三）“四个二次”间的内在联系

二次三项式、二次函数、一元二次方程及一元二次不等式通常称为“四个二次”。它们之间具有密切的内在联系，二次函数  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ) 的右端是一个二次三项式，求当  $y = 0$ ， $y > 0$ ， $y < 0$  时  $x$  的值，实际上就是分别解方程  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) 和解不等式  $ax^2 + bx + c > 0$  ( $a \neq 0$ ) 或  $ax^2 + bx + c < 0$  ( $a \neq 0$ )。学习这部分内容，关键是要抓住“根的判别式  $\Delta$ ”这根“红线”，结合二次函数图象，沟通四者间的内在联系，如表 1—2。搞清上述内在联系，对于解决这类代数问题可起到“搭桥引渡”的作用。

〔例 1〕求证：无论  $m$  取什么实数值，多项式  $\frac{1}{2}m^2 - 3m + 5$  永远为正值。

表 1-2

| $\Delta = b^2 - 4ac$                |         | $\Delta > 0$                                                                      | $\Delta = 0$                                                                      | $\Delta < 0$                                                                      |
|-------------------------------------|---------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
| $y = ax^2 + bx + c$ 的图象             | $a > 0$ |  |  |  |
|                                     | $a < 0$ |  |  |  |
| $ax^2 + bx + c$ 的符号                 | $a > 0$ | $x < x_1$ 或 $x > x_2$ 时 $y > 0$<br>$x_1 < x < x_2$ 时 $y < 0$                      | $x \neq -\frac{b}{2a}$ 时 $y < 0$<br>$x$ 恒为非负值                                     | $y$ 恒为正值                                                                          |
|                                     | $a < 0$ | $x_1 < x < x_2$ 时 $y > 0$<br>$x < x_1$ 或 $x > x_2$ 时 $y < 0$                      | $x \neq -\frac{b}{2a}$ 时 $y < 0$<br>$0y$ 恒为非正值                                    | $y$ 恒为负值                                                                          |
| $ax^2 + bx + c = 0$ 的根              |         | $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$                                       | $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$                                                       | 无实根                                                                               |
| $ax^2 + bx + c > 0$ ( $a > 0$ ) 的解集 |         | $x < x_1$ 或 $x > x_2$                                                             | $x \neq -\frac{b}{2a}$                                                            | 全体实数                                                                              |
| $ax^2 + bx + c < 0$ ( $a > 0$ ) 的解集 |         | $x_1 < x < x_2$                                                                   | 空集                                                                                | 空集                                                                                |

分析: 设  $y = \frac{1}{2}m^2 - 3m + 5$ , 则  $y$  是关于  $m$  的二次函数, 它的图象开口向上, 只要  $\Delta < 0$ , 那么它与  $x$  轴没有交点, 整个图象都在  $x$  轴的上方, 因此函数值永远是正的。

解：设  $y = \frac{1}{2}m^2 - 3m + 5$ ，因为  $a = \frac{1}{2} > 0$ ， $\Delta = 9 -$

$4 \times \frac{1}{2} \times 5 = -1 < 0$ ，所以恒有  $y > 0$ ，即对任

何实数  $m$ ，都有  $\frac{1}{2}m^2 - 3m + 5 > 0$ 。

〔例2〕对任意的实数  $x$ ，不等式  $ax^2 + 4x + a > 1 - 2x^2$  ① 总成立，求  $a$  的取值范围。

分析：将不等式①化为  $(a+2)x^2 + 4x + (a-1) > 0$  ②，如果  $a = -2$ ，则②是一元一次不等式，它的解不可能是全体实数；若  $a \neq -2$ ，则②是一元二次不等式，它的解是全体实数，实际上就是抛物线  $y = (a+2)x^2 + 4x + (a-1)$

的开口向上，且与  $x$  轴没有交点，其条件是  $\begin{cases} a+2 > 0 \\ \Delta < 0. \end{cases}$

解：把①变为②，再解不等式组

$$\begin{cases} a+2 > 0 \\ 16 - 4(a+2)(a-1) < 0 \end{cases} \quad \text{得 } a > 2.$$

〔例3〕设一元二次方程  $x^2 + (m-5)x + 1-m = 0$  ① 的一个根大于3，另一个根小于3，试求  $m$  的取值范围。

分析：设  $y = x^2 + (m-5)x + 1-m$ ，由于  $\Delta > 0$ ，故抛物线与  $x$  轴必交于两点  $(x_1, 0)$  与  $(x_2, 0)$ ，见图1—3。由于  $x_1 < 3, x_2 > 3$ ，显然应有：当  $x = 3$  时，相应的函数值小于零。反之，如果  $x = 3$  时相应的函数值小于零，

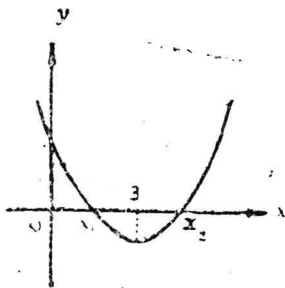


图1—3

那么必有  $x_1 < 3$ ,  $x_2 > 3$ 。

解：设  $y = x^2 + (m-5)x + 1 - m$ ，由图可知，方程①的两根  $x_1 < 3$  与  $x_2 > 3$ ，等价于当  $x = 3$  时，二次函数的值小于零，即：

$$3^2 + (m-5) \times 3 + 1 - m < 0, \text{ 解得 } m < \frac{5}{2}.$$

三、明确代数学习要求，努力克服学习中的随意性

当前，不少同学由于对学习要求不明确，因而带来了学习上的随意性。具体表现为：学无目标，练无目的，盲目多练，随意拔高。整日忙于钻研一些偏题、怪题、难题。结果，要求掌握的内容没有掌握或掌握不好，不作要求的内容反而死啃硬钻、生吞活剥。要克服上述不良现象，就必须明确大纲对初中代数的学习要求，并能把握这些要求的程度。

### (一) 初中代数的学习要求

1、理解有关有理数、实数的一些概念，掌握有理数的运算法则，能够熟练地进行有理数的运算。会查平方表、立方表，平方根表、立方根表。

2、理解有关整式、分式、根式和有理数指数幂的一些概念，掌握它们的一些性质和运算法则，能够熟练地进行整式的运算、多项式的因式分解、分式运算以及根式（主要是二次根式）和有理数指数幂的运算。

3、理解有关方程、方程组和不等式的一些概念，了解方程、不等式的同解原理，熟练掌握一元一次方程、二元一次方程组和一元二次方程的解法，掌握简单的二元二次方程组以及可化为一次、二次的方程和方程组的解法，掌握一次、二次不等式的解法，二次方程的根的判别式以及根与系数的

关系，能够分析等量关系列出方程或方程组解应用题。

4、理解直角坐标系的概念，了解函数的意义，理解正比例函数、反比例函数、一次函数、二次函数的概念，能够画出它们的图象，了解它们的一些性质。

5、了解三角函数的概念，会查三角函数表，能够熟练地解直角三角形，会用正弦定理和余弦定理解斜三角形，并能运用它们解决简单的实际问题。

6、了解常用的数据处理方法，会根据样本数据绘制频率分布图，计算平均数和方差。

## (二)要求的四种程度

从上述学习的要求中可以看出，要求的程度不外乎有了解、理解、掌握、熟练掌握四个层次。

“了解”就是知道有此内容，属于常识性的知识。“了解”还包括“初步了解”。例如在“函数及其图象”一章中，就提出了“通过本章学习，使学生初步了解运动变化和数形结合的观点。”

“理解”就是弄懂某内容。懂得概念或命题的来龙去脉，以及它和其他概念或命题之间的联系。“理解”又有“初步理解”、“理解”、“加深理解”之分。例如在“有理数”一章中提出了使学生“初步理解有效数字的概念”，在“整式的加减”一章中提出了“加深理解用字母表示数的意义”。

“掌握”就是熟悉某内容，有了运用的技能。“掌握”又有“初步掌握”（或初步熟悉）和“掌握”（或熟悉）之分。例如，用简便方法计算 $51 \times 49 = ?$ 。倘若你能想到：

$$51 \times 49 = (50 + 1)(50 - 1) = 50^2 - 1^2 = 2499$$

那么，就可以说你对平方差公式已达到了掌握的程度。