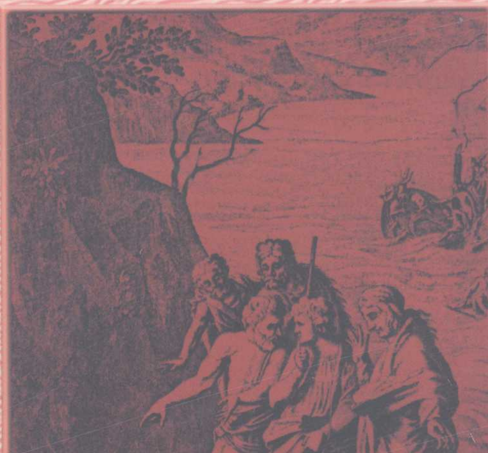
《数学中的小问题大定理》丛书（第一辑）

麦卡锡函数和阿克曼函数

——从一道前南斯拉夫数学奥林匹克试题谈起



刘培杰 康大臣 编著

◎阿克曼函数

◎递归函数的历史与应用

◎非原始递归函数一例

◎一类完全递归函数的分层

◎可数代数结构中的显定义

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

《数学中的小问题大定理》丛书（第一辑）

麦卡锡函数和阿克曼函数

——从一道前南斯拉夫数学奥林匹克试题谈起

刘培杰 康大臣 编著

◎阿克曼函数

◎递归函数的历史与应用

◎非原始递归函数一例

◎一类完全递归函数的分层

◎可数代数结构中的显定义

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书从一道前南斯拉夫数学奥林匹克试题谈起，以粗犷的线条，简明的介绍了麦卡锡函数、阿克曼函数及递归函数。通过对小试题的讨论，展示给读者一个关于数理逻辑的大世界，是一本通向数理逻辑殿堂的桥梁之作。

图书在版编目(CIP)数据

麦卡锡函数和阿克曼函数：从一道前南斯拉夫数学奥林匹克试题谈起/刘培杰，康大臣编著. -- 哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2012.8

ISBN 978-7-5603-3720-3

Ⅰ.①麦… Ⅱ.①刘… ②康… Ⅲ.①数理逻辑 Ⅳ.①O141

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第167613号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　李　慧
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街10号　邮编150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本　787mm×960mm　1/16　印张8.25　字数105千字
版　　次　2012年8月第1版　2012年8月第1次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-3720-3
定　　价　18.00元

◎ 目录

第1章 一道竞赛题与麦卡锡函数

在前南斯拉夫1983年数学奥林匹克试题中有如下

试题A 设 $n\in\mathbf{Z}$. 函数 $f:\mathbf{Z}\to\mathbf{R}$ 满足

$$f(n)=\begin{cases}n-10 & n>100\\ f(f(n+11)) & n\leqslant 100\end{cases}$$

证明：对任意 $n\leqslant 100$. 都有 $f(n)=91$.

证 首先，设 $n\leqslant 100$ 与 $n+11>100$. 即 $90\leqslant n\leqslant 100$ 于是

$$\begin{aligned}f(n)&=f(f(n+11))=f(n+11-10)\\&=f(n+1)\end{aligned}$$

因此

$$f(90)=f(91)=\cdots=f(100)=f(101)=91$$

现在设 $n<90$，取 $m\in\mathbf{N}$，使得 $90\leqslant n+11m\leqslant 100$. 则有

$$\begin{aligned}f(n)&=f^{[2]}(n+11)\\&\ \ \vdots\\&=f^{[m+1]}(n+11m)\\&=f^{[m]}(f(n+11m))\\&=f^{[m]}(91)=91\end{aligned}$$

这就证明了. 对任意的 $n\leqslant 100$,都有 $f(n)=91$.

熟悉计算机的人都知道. 这个函数就是著名的 91 - 函数. 它是由计算机科学的创始人之一美国数学家麦卡锡(Mc Carthy)提出的. 正因为有如此背景. 在许多数学竞赛中都可以看到以它为原型的试题. 例如 1984 年的美国数学邀请赛的第 7 题:

试题 B 函数 f 定义在整数集合上. 满足

$$f(n)=\begin{cases}n-3 & n\geqslant 1\,000\\ f(f(n+5)) & n<1\,000\end{cases}$$

求 $f(84)$.

解 比较自然也比较繁琐的解法是根据所给函数的定义推算出来

$$\begin{aligned}f(84)&=f(f(84+5))\\&=f^{[3]}(84+5\times 2)\\&=f^{[4]}(84+5\times 3)\\&\qquad\vdots\\&=f^{[184]}(84+183\times 5)\\&=f^{[184]}(999)\\&=f^{[185]}(1\,004)\\&=f^{[184]}(1\,001)\\&=f^{[183]}(998)\\&=f^{[184]}(1\,003)\\&=f^{[183]}(1\,000)\\&=f^{[182]}(997)\\&=f^{[183]}(1\,002)\\&=f^{[182]}(999)\\&\qquad\vdots\\&=f^{[2]}(99)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=f^{[3]}(1\ 004)\\
&=f^{[2]}(1\ 001)\\
&=f(998)\\
&=f^{[2]}(1\ 003)\\
&=f(1\ 000)\\
&=1\ 000-3\\
&=997
\end{aligned}
$$

（解毕）

由此可见，与其直接求 $f(84)$，倒不如从 $n=1\ 000$ 附近出发求 $f(n)$ 的值方便. 为了探索 $n=1\ 000$ 时的情况，我们先计算几个 1 000 附近数的函数值

$$
\begin{aligned}
f(999)&=f(f(1\ 004))=f(1\ 001)=998\\
f(998)&=f(f(1\ 003))=f(1\ 000)=997\\
f(997)&=f(f(1\ 002))=f(999)=998\\
f(996)&=f(f(1\ 001))=f(998)=997\\
f(995)&=f(f(1\ 000))=f(997)=998
\end{aligned}
$$

据此，我们可以猜测

$$
f(n)=\begin{cases}997 & (\text{若 } n \text{ 是偶数且 } n<1\ 000)\\ 998 & (\text{若 } n \text{ 是奇数且 } n<1\ 000)\end{cases} \tag{1}
$$

下面用数学归纳法证明式(1)(我们使用的是反向归纳法)即假定(1)式对 $n+1,n+2,\cdots,999$ 成立. 证明式(1)对 n 也成立.

(1)当 $n=999,998,\cdots,995$ 时. 由开始时的计算知式(1)成立.

(2)假设对于所有的 $m(n<m<1\ 000.n<995)$. 式(1)都成立，往证当 $n=m$ 时式(1)也成立.

由于，当 n 是偶数时. $n+5$ 是奇数. 所以

$$f(n)=f(f(n+5))=f(998)=997$$

当 n 是奇数时，$n+5$ 是偶数，所以

$$f(n)=f(f(n+5))=f(997)=998$$

从而式(1)得证. 特别地,$f(84)=997$.

显然此证法具有一般性. 正是由于有此方法. 在1991年的第2届希望杯全国数学邀请赛的高二试题中也出现了一个此形式的问题.

试题 C　在自然数集 $\mathbf{N}$ 上定义的函数为

$$f(n)=\begin{cases}n-3 & (n\geqslant 1\ 000)\\ f(f(n+7)) & (n<1\ 000)\end{cases}$$

则 $f(90)$ 的值是(　　).

A. 997　　B. 998　　C. 999　　D. 1000

经特殊值计算后观察可猜测

$$f(n)=\begin{cases}997 & n=4m\\ 1\ 000 & n=4m+1\\ 999 & n=4m+2\\ 998 & n=4m+3\end{cases}\quad (m\in\mathbf{N})$$

此结论很容易由数学归纳法证明. 故 $f(90)=f(4\times 22+2)=999$.

此外对于麦卡锡函数来说由于它的表达式最后可以写成

$$f(n)=\begin{cases}n-10 & (n>100)\\ 91 & (n\leqslant 100)\end{cases}$$

所以它有一个不动点(即满足 $f(x)=x$ 的点). 那么我们可以提出以下一般的问题:

试题 D　假设 a,b,c 是已知的自然数且 $a<b<c$:

(1)证明函数 $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ 是唯一的. f 是由下列规则定义

$$f(n)=\begin{cases}n-a & (n>c)\\ f(f(n+b)) & (n\leqslant c)\end{cases}$$

(2)找出 f 至少有一个不动点的充分必要条件.

(3)用 a,b,c 来表示这样一个不动点.

(1990 年中国国家队模拟考试试题)

证明　首先我们可以逐步求出 $f(x)$ 的表达式在 $n<c$ 时, $f(n)=n-a$.

在 $c\geqslant n>c-(b-a)$ 时

$$\begin{aligned} f(n)&=f(f(n+b))=f(n+b-a)\\ &=n(b-a)-a \end{aligned}$$

在 $c-(b-a)\geqslant n>c-2(b-a)$ 时

$$\begin{aligned} f(n)&=f(f(n+b))\\ &=f(n+2(b-a))\\ &=n+2(b-a)-a \end{aligned}$$

一般的,在 $c-k(b-a)\geqslant n>c-(k+1)(b-a)$ 时

$$f(n)=n+(k+1)(b-a)-a\quad (k=0,1,\cdots,q)$$

这里 $q\in\mathbf{N}$. 满足 $q(b-a)\leqslant c<(q+1)(b-a)$

因此, $f(n)$ 是唯一的. 若 f 有不动点 n,则

$$n=n+k(b-a)-a$$

即

$$(b-a)\mid a \tag{2}$$

式(2)不但是必要条件,而且也是充分条件. 事实上,在这一条件成立时,设 $a=k(b-a)$,则满足 $c-(h-1)(b-a)\geqslant n>c-h(b-a)$ 的自然数 n 都是不动点.

对于麦卡锡函数我们有以下二元形式. 它是奥林匹克数学待开发的矿床

$$g(m,n)=\begin{cases} n-10 & (n>100,m=0)\\ g(m-1,n-10) & (n>100,m>0)\\ g(m+1,n+11) & (n\leqslant 100)\end{cases}$$

这时我们可以证明

$$g(m,n)=f^{[m+1]}(n)$$

特别的，当 $m=0$ 时 $g(0,n)=f(n)$.

利用 $g(m,n)$ 可以计算 $f(n)$，例如计算 $f(99)$ 时可这样做

$$\begin{aligned}f(99)&=g(0,99)\\&=g(1,110)\\&=g(0,100)\\&=g(1,111)\\&=g(0,101)\\&=91\end{aligned}$$

用上面的方法求 $f(88)$ 可以当做竞赛试题. 因为那是一个漫长的过程.

$g(m,n)$ 的计算，可以按图 1 中的流程图进行. 例如要算 $f(99)=g(0,99)$，开始时 $m=0,n=99$.

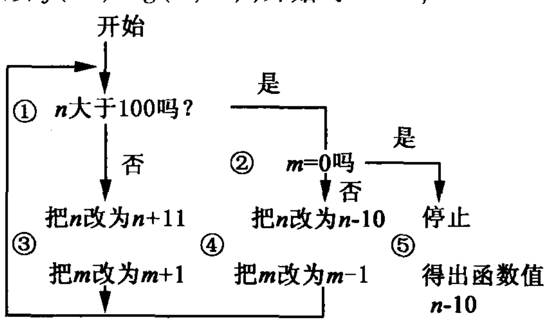


图 1

例 给定正整数集合上一个函数 $f(n)$ 满足下述条件：如果 $n>2\ 000$，$f(n)=n-12$；如果 $n\leqslant 2\ 000$，$f(n)=f(f(n+16))$.

(1) 求 $f(n)$.

(2) 求方程 $f(n)=n$ 的所有解.

(1994 年香港代表队选拔赛试题)

解 从题目条件立即可得

$$f(2\,000)=f(f(2\,016))=f(2\,004)=1\,992$$
$$f(1\,999)=f(f(2\,015))=f(2\,003)=1\,991$$
$$f(1\,998)=f(f(2\,014))=f(2\,002)=1\,990$$
$$f(1\,997)=f(f(2\,013))=f(2\,001)=1\,989$$
$$f(1\,996)=f(f(2\,012))=f(2\,000)=1\,992$$
$$f(1\,995)=f(f(2\,011))=f(1\,999)=1\,991$$
$$f(1\,994)=f(f(2\,010))=f(1\,998)=1\,990$$
$$f(1\,993)=f(f(2\,009))=f(1\,997)=1\,989$$
$$f(1\,992)=f(f(2\,008))=f(1\,996)=1\,992$$
$$f(1\,991)=f(f(2\,007))=f(1\,995)=1\,991$$
$$f(1\,990)=f(f(2\,006))=f(1\,994)=1\,990$$
$$f(1\,989)=f(f(2\,005))=f(1\,993)=1\,989$$
$$f(1\,988)=f(f(2\,004))=f(1\,992)=1\,992$$
$$f(1\,987)=f(f(2\,003))=f(1\,991)=1\,991$$
$$f(1\,986)=f(f(2\,002))=f(1\,990)=1\,990$$
$$f(1\,985)=f(f(2\,001))=f(1\,989)=1\,989 \tag{3}$$

于是猜测，对非负整数 k，这里 $k\leqslant 499$，$m\in\{0,1,2,3\}$，有

$$f(2\,000-4k-m)=1\,992-m \tag{4}$$

对非负整数 k 用数学归纳法. 由(3)可知，当 $k=0,1,2,3$ 时，等式(4)成立. 假设当 $k\leqslant t$ 时，这里 $t\geqslant 3$，有

$$f(2\,000-4k-m)=1\,992-m \tag{5}$$

这里 $m\in\{0,1,2,3\}$. 考虑 $k=t+1$ 情况，记

$$n=2\,000-4(t+1)-m \tag{6}$$

那么
$$n+16=2\,016-4(t+1)-m\leqslant 2\,000 \tag{7}$$

这里利用 $t+1\geqslant 4$，$m\geqslant 0$. 那么，利用(6)和(7)，有

$$\begin{aligned}f(n)&=f(f(n+16))\\&=f(f(2\,000-4(t-3)-m))\end{aligned}$$

$$=f(1\,992-m) \qquad \text{(利用归纳假设(5))}$$

$$=1\,992-m \qquad \text{(利用(3))} \qquad (8)$$

因而利用数学归纳法，公式(4)成立，从而有

$$f(n)=\begin{cases} n-12 & (\text{当 } n>2\,000 \text{ 时}) \\ 1992-m & (\text{当 } n=2\,000-4k-m \text{ 时}) \end{cases} \qquad (9)$$

上式右端 $m\in\{0,1,2,3\}$，k 是非负整数. 而且 $k\leqslant 499$. 这就解决了(3).

利用公式(9)，要 $f(n)=n$，则必有 $n\leqslant 2\,000$，且

$$2\,000-4k-m=1\,992-m \qquad (10)$$

从而有

$$k=2 \qquad (11)$$

故所求的 $n=1\,992-m$，这里 $m\in\{0,1,2,3\}$. 那么，满足 $f(n)=n$ 的全部正整数 n 是 1 992，1 991，1 990，1 989.

第2章

阿克曼函数

麦卡锡函数是递归函数.它在计算机的基础研究中非常重要.另一个重要的递归函数是由德国大数学家希尔伯特(Hilbert)的高足阿克曼(Ackermann)提出的.阿克曼(1896—1962 Ackermann Friedrich Wilhelm)生于德国的苏涅贝克,曾在闵斯特尔任教授.主要研究数理逻辑,与希尔伯特合作写了专著《理论逻辑基础》被译成多种文字.他还和希尔伯特一起在1920年至1930年间研究了希尔伯特的证明论.他提出的函数$A(x,y)$,定义为

$$A(0,y)=y+1 \qquad R_1$$

$$A(x+1,0)=A(x,1) \qquad R_2$$

$$A(x+1,y+1)=A(x,A(x+1,y)) \qquad R_3$$

称为阿克曼函数

$$A(k,n)=\begin{cases} n+1 & (k=0) \\ A(k-1,1) & (k>0,n=0) \\ A(k-1,A(k,n-17)) & (k>0,n>0) \end{cases}$$

如要计算$A(2,1)$,应该按下面的办法进行

$$
\begin{aligned}
A(2,1) &= A(1,A(2,0)) \\
&= A(1,A(1,1)) \\
&= A(1,A(0,A(1,0))) \\
&= A(1,A(0,A(0,1))) \\
&= A(1,A(0,2)) \quad (\text{因 } A(0,1)=1+1=2) \\
&= A(1,3) \quad (\text{因 } A(0,2)=2+1=3) \\
&= A(0,A(1,2)) \\
&= A(0,A(0,(1,1))) \\
&= A(0,A(0,A(0,A(1,0)))) \\
&= A(0,A(0,A(0,A(0,1)))) \\
&= A(0,A(0,A(0,2))) \\
&= A(0,A(0,3)) \\
&= A(0,4) \\
&= 5
\end{aligned}
$$

现在我们用已知函数来计算 $A(k,n)$ 的直接计算公式.

对 $k=0$,从定义可写出

$$A(0,n)=n+1$$

对 $k=1$ 有

$$A(1,n)=\begin{cases} A(0,1) & (n=0) \\ A(0,A(1,n-1)) & (n>0) \end{cases}$$

所以 $A(1,0)=A(0,1)=1+1=2$. 而当 $n>0$ 时

$$
\begin{aligned}
A(1,n) &= A(0,A(1,n-1)) \\
&= A(1,n-1)+1
\end{aligned}
$$

由此可得

$$A(1,n)=n+2 \qquad (n=0,1,\cdots)$$

对 $k=2$, $A(2,0)=A(1,1)=3$,而当 $n>0$ 时

$$A(2,n)=A(1,A(2,n-1))$$

$$=A(2,n-1)+2$$

因此
$$A(2,n)=\begin{cases}3 & (n=0)\\ A(2,n-1)+2 & (n>0)\end{cases}$$

由此，又可求出 $A(2,n)=2n+3$.

再看 $k=3$ 的情况，仿照上面的办法可以求出

$$A(3,n)=\begin{cases}5 & (n=0)\\ 2A(3,n-1)+3 & (n>0)\end{cases}$$

从而

$$\begin{aligned}A(3,n)+3 &= 2[A(3,n-1)+3]\\ &= 2^2[A(3,n-2)+3]\\ &\ \ \vdots\\ &= 2^n[A(3,0)+3]\\ &= 2^n\cdot 8=2^{n+3}\end{aligned}$$

所以 $A(3,n)=2^{n+3}-3$.

这个函数是双重递归定义的. 阿克曼证明了这个函数比任何单变量递归函数增长得都快，计算机专家对此很感兴趣，因为它比任何简单循环程序都增长得快. 为了看清这点，我们取 x 作为函数的下标，则可将阿克曼函数看作一函数序列，即 $A(x,y)=f_x(y)$. 则定义式变为

$$\begin{cases}f_0(x)=x+1\\ f_n(0)=f_{n-1}(1)\\ f_n(x+1)=f_{n-1}(f_n(x_1)) & (n=1,2\cdots)\end{cases}$$

显然

$$f_1(x)=x+2$$
$$f_2(x)=2x+3$$
$$f_3(x)=4\cdot 2^{n+1}-3$$
$$\vdots$$

令 $x=0$,可得

$$f_1(0)=2$$
$$f_2(0)=3$$
$$f_3(0)=5$$
$$f_4(0)=13$$
$$f_5(0)=4\cdot 2^{14}-3$$

可见其函数值增长极快.

1981 年在美国举行的二十二届 IMO 上. 芬兰提供了一个计算阿克曼函数的试题:

试题 E 函数 $f(x,y)$ 对所有非负整数 x,y 满足:

(1) $f(0,y)=y+1$;

(2) $f(x+1,0)=f(x,1)$;

(3) $f(x+1,y+1)=f(x,f(x+1,y))$.

试确定 $f(4,1\ 981)$.

解 由 $f(1,n)=f(0,f(1,n-1))=f(1,n-1)+1$ 及 $f(1,0)=f(0,1)=2$,得

$$f(1,n)=n+f(1,0)=n+2$$

又由

$$\begin{aligned}f(2,n)&=f(1,f(2,n-1))\\&=f(2,n-1)+2\\&=2n+f(2,0)\end{aligned}$$

$$f(2,0)=f(1,1)=3$$

所以 $$f(2,n)=2n+3$$

再由

$$\begin{aligned}f(3,n)&=f(2,f(3,n-1))\\&=2f(3,n-1)+3\\&=2[f(3,n-1)+3]-3\end{aligned}$$

即有

$$\frac{f(3,n)+3}{f(3,n-1)+3}=2$$

从而有

$$f(3,n)+3=2^n[f(3,0)+3]$$

因为

$$f(3,n)=f(2,1)=5$$

所以

$$f(3,n)=2^{n+3}-3$$

最后我们计算$f(4,n)$. 由

$$\begin{aligned}f(4,n)&=f(3,f(4,n-1))\\&=2^{f(4,n-1)+3}-3\end{aligned}$$

即
$$f(4,n)+3=2^{f(4,n-1)+3}$$

令 $t_n=f(4,n)+3,\varphi(x)=2^x$. 则有 $t_n=\varphi(t_{n-1})$,于是

$$t_n=\varphi^{[n]}(t_0)=\underbrace{\varphi(\varphi\cdots(}_{n\text{重迭代}}\varphi(t_0)))$$

由于

$$\begin{aligned}t_0&=f(4,0)+3\\&=f(3,1)+3=2^4\end{aligned}$$

所以
$$f(4,n)=\varphi^{[n]}(16)-3$$

故 $f(4,1\ 981)=\varphi^{[1\ 981]}(16)-3=2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}-3$. 其中指数的重数为 1 984.

如要进一步了解阿克曼函数与递归函数. 可以参看 Z. A. Melzac 的《数学之件》(第 1 集,纽约:Wileg 出版社,1993:76 - 78)和 A,Grzegorczyk 在《数理逻辑论文选》(Some classes of recursive functions)中的论述.