3导 自考3导丛书

督教·督学·督考

2005年

高等数学（工本）

核心学案

自学考试新教材·公共课（二）

教材依据／西安交通大学出版社《高等数学（工本）》 陆庆乐／主编

组编／全国高等教育自学考试命题研究组

同步辅导同步过关

指定教材核心浓缩

预测试卷历年真题

RED PRECIOUS BOOK 红宝书

航空工业出版社

高等教育自学考试3导丛书

导教·导学·导考

高等数学（工本）

教材依据／西安交通大学出版社《高等数学（工本）》

主编／陆庆乐

组　编／全国高等教育自学考试命题研究组

应对自考课程大规模修订后新教材内容

自学考试新教材

核心学案

航空工业出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 工本/自学考试命题研究组,《高等数学》编委会编. —北京:航空工业出版社,2005.1

(自学考试新教材核心学案. 公共课. 第2辑)

ISBN 7-80183-528-X

Ⅰ. 高... Ⅱ. ①自...②高... Ⅲ. 高等数学—高等教育—自学考试—自学参考资料 Ⅳ. 013

中国版本国书馆 CIP 数据核字(2004)第129919号

高等数学(工本)

Gaodeng Shuxue (Gong Ben)

航空工业出版社出版发行

(北京市安定门外小关东里14号 100029)

发行部电话:010-84926529 010-64978486

三河市燕山印刷有限公司印刷 全国各地新华书店经售

2005年1月第1版 2005年1月第1次印刷

开本:850×1168 1/32 印张:70

字数:2600千字 (全12册)定价:168.00元

代言人

导教 导学 导考

简介

张立勇 一个普通的农民孩子，清华大学打工8年，一直坚持刻苦自学，不仅80分以上通过四级、六级考试，托福考试630分，而且获得了北京大学本科文凭。2004年10月共青团中央向张立勇颁发了“中国青年学习成才奖”，他被誉为共青团中央树立的全国十大杰出学习青年之一。

张立勇的事迹被中央电视台“东方之子”“面对面”“新闻会客厅”等多个栏目采访报道，被北京电视台、中国教育电视台等电视媒体，新浪网、雅虎网等网络媒体，《人民日报》《中国青年报》《大学生》等报纸杂志，共100多家媒体采访报道，在社会上引起很大反响。被众多青年学子视为学习的榜样。

“因为我选择了这样一条自己的人生道路，所以我没有机会像大多数的学子那样，经历从学校到学校，顺利地接受高等教育的过程。我只能通过自学来圆我的大学梦。”

“我常常想，上帝会厚爱每一个人的，它会用不同的方式对你所付出的艰辛和努力给予补偿。但是，上帝只钟爱那些自助的人。如果你不努力，你不拼搏，所有的机会都会和你失之交臂。如果在这十年之中，我放弃了对人生理想和人生价值的追求，那么，当这一切机遇到来的时候，我又怎么可能把握住呢？”

“大家觉得我是一个榜样，但我个人并不这么想。社会把我放到这样的位置，充当这样的角色，能够影响一些人，这是最让我自豪的。”

-------- 张立勇

导教·导学·导考

编委会

前言

导教·导学·导考

"其实人的智力相差并不悬殊，可毅力的差距却使每个人拥有各自不同的前途。尤其是对于参加自考的人来说，毅力是非常重要的，当然还需要有得当的学习方法。"

"有很多人抱怨自考难以通过，然而正是这种严格的管理制度保证了自考毕业生的质量，使自考生获得了社会的认可和一致的好评。"

——一名从自考获得本科学历后又考上硕士生直到博士生的成功者的自述

参加自学考试，除了需要具备以上成功者所提到的毅力和方法外，还应该了解自考的每门课程都采用我们通常所说的"过关"考试——只要通过课程的一次性考试，就可拿到课程的学分，通过某专业要求课程的全部考试，也就会顺利获得这个专业的自考毕业证。然而，一分之差也会导致参考课程过关失败，有些考生难免多次重考才能修完规定课程。因此，在本书的编写过程中，编委们反复研讨自学考试的特点，努力寻求帮助自考生的有效途径。本书是多位学者、专家，历时数年的产物，具有以下优点。

一 掌握核心内容，了解命题动态，注重知识系统化

了解命题精神，是自学考试的核心，是达到专业标准的关键。自学考试的课程命题以课程自学考试大纲为依据，以最新指定教材为范围。本书紧紧贴住每一门课程的考试大纲和指定教材，用【考纲要求提示】、【知识结构图示】、【核心内容速记】、【同步精华题解】、【典型例题解析】等多个栏目解剖教材内容，是一套脉络清晰的速成讲义，可以使考生在厚厚的教材中抓住重点，对教材的系统学习有极强的指导作用。同时，对于临考考生，它又可以成为离开教材仍能独立使用的贴身笔记。《核心学案》摒弃了一些辅导书的题海战术，引导考生重视教材的学习。那么怎样去自学才能弄懂教材并将厚书读"薄"呢？抓住重点才是关键。《核心学案》用清晰的思路，帮助考生将教材知识系统化，使考生在答卷时知识系统、逻辑清晰、胸有成竹。

二 依据权威资料，重视最新信息，紧跟时代脉搏

参加高等教育自学考试的考生，常常会感到市面上的辅导资料甚至教材都有

滞后性。全国高教自考办也认可这一事实,并采取了一些有效措施,比如在发布考试大纲和指定教材的基础上又组编了《全国高等教育自学考试活页丛书》等补充学习材料,并明文规定增补内容纳入统一命题范围,要占卷面5~10分。同时高教自考办还加快了教材的修订频率。面对这种情况,原有的一些辅导资料的严重滞后和内容缺陷也是必然的。本套《核心学案》则高度重视这一现象,在依据考试大纲和指定教材时,选用高教自考办的最新修订本(2004年起自考课程已在做大规模修订),并将活页丛书等内容融会贯通其中,有的科目还特意增加了【最新内容补充】以引起考生重视。另外,本套书还吸收了许多自考强化班的授课精华,目的是帮助考生了解最新考试动态。我们还将开通网上自考辅导随时更新有关内容和提供特色售后服务,欢迎点击 www. study-book. com. cn。

三 做到讲练结合,力求精讲精练,提高辅导命中率

本套书配有【同步精华题解】和综合演练题,是在对考纲、教材归纳总结后选编的一些经典同步练习题。这些练习题的题型与考试题型完全一致,使考生能够迅速掌握答题方法与同步要点。另外,本书的编者还依据各科内容,遴选考点,在对历年实考真题做详细分析的基础上精编了《命题预测试卷》。这些试卷不仅题型题量完全与真考试卷保持一致,而且力求覆盖考试大纲的各科重点。考生如果在学习《核心学案》的基础上再认真研习《命题预测试卷》,既可熟悉题型、了解试卷难易度,又可将其作为自测、练习之用,找出差距,查漏补缺。因此,在《核心学案》的首印首发优惠活动中,为了帮助考生用好的学习方法提高应试过关率,我们特意将《命题预测试卷》作为《核心学案》的赠品送给每个考生。这样,本书即成为真正具有命中率的辅导用书。

总之,面对数千万的自考考生,我们是抱着高度的责任感来完成这项使命的。我们的目的是:减轻考生的学习负担;我们口号是:用最短的时间使考生自考过关!因为工作量的巨大和考期的压力,也许我们遗留了某些不足,欢迎读者批评指正。来函可致:reader@ study-book. com. cn,我们将高度重视,以求完善。

编　者

目录

第一章 函数

第二章 极限与连续

第三章 导数与微分

第四章 导数的应用

第五章 不定积分法

目录

目录

第一章 函 数

考纲要求提示

1. 深刻理解一元函数的定义；
2. 掌握函数的表示法和函数的简单性态；
3. 理解函数增量的概念；
4. 理解反函数的概念；
5. 深刻理解复合函数的概念；
6. 熟练掌握基本初等函数和了解什么是初等函数.

知识结构图示

- 函数
  - 函数的概念
    - 常量和变量
    - 区间和邻区
    - 函数的定义
    - 函数的三种表示法
    - 函数的增量
  - 函数的四种简单性态
    - 单调性
    - 有界和无界性
    - 奇偶性
    - 周期性
  - 反函数和复合函数
    - 反函数的定义
    - 复合函数的定义
  - 基本初等函数与初等函数
    - 五种基本初等函数
      - 指数函数
      - 对数函数
      - 幂函数
      - 三角函数
      - 反三角函数
    - 初等函数的定义
  - 双曲函数与反双曲函数(定义、表达式、和差公式与图形)

核心内容速记

1. 函数的概念

(1) 常量和变量

自然界的现象无一不在变化之中，我们在观察自然现象、研究某些实际问题或从事生产的过程时，总会遇到许多量，如面积、体积、长度、时间、速度、温度等. 这些量一般可以分为两类：一类是在过程进行中不断变化的量，这一类量称为变量，变量用$x,y,z,u,v,\cdots$字母来表示；另一类是在过程进行中保持不变的量，这一类量称为常量. 常量通常用$a,b,c,\alpha,\beta,\cdots$字母来表示.

(2) 区间和邻区

所谓变量x的区间就是介于两个实数a与b之间的一切实数. 在数轴上就是从a到b的线段. a与b称为区间的端点. 当$a<b$时，a称为左端点，b称为右端点.

区间是否包括端点在内要看所研究的问题而定. 按照包括或不包括端点在内，区间可以区分为：

① 闭区间　两个端点都包括在内，记作$a\leqslant x\leqslant b$或$[a,b]$；

② 开区间　两个端点都不包括在内，记作$a<x<b$或(a,b)；

③ 半开区间　只包括一个端点在内，记作$a\leqslant x<b$或$[a,b)$，及$a<x\leqslant b$或$(a,b]$；

除了这些有限区间外，还有各种无限区间：

④ 小于(不大于)c的一切实数，记作$-\infty<x<c$或$(-\infty,c)$($-\infty<x\leqslant c$或$(-\infty,c]$)；

⑤ 大于(不小于)c的一切实数，记作$c<x<+\infty$或$(c,+\infty)$($c\leqslant x<+\infty$或$[c,+\infty)$)；

⑥ 一切实数，记作$-\infty<x<+\infty$或$(-\infty,+\infty)$.

在不需要区别以上所说的各种情况时，我们就把某一区间简单记作I.

设x_0为一已知点，包括x_0的任意一个开区间(a,b)称为x_0的邻区. 但我们通常考虑的往往是以x_0为中心的区间(a,b)，这时称x_0为邻区的中心，$\frac{1}{2}(b-a)$为邻区的半径. 以点x_0为中心，ε为半径的邻区：$(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$，称为$x_0$的$\varepsilon$邻区.

设x为这邻区内的任一点，那么x满足不等式

$$x_0-\varepsilon<x<x_0+\varepsilon$$

这个不等式可写成

$$|x - x_0| < \varepsilon \qquad (*)$$

所以(*)式也可用以表示 x_0 的 ε 邻区. 在这个邻区中,如果再把它的中心 x_0 去掉,就称为 x_0 的 ε 去心邻区. 可用不等式

$$x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon,\ x \neq x_0 \quad 或 \quad 0 < |x - x_0| < \varepsilon$$

表示. 式中的 $0 < |x - x_0|$ 的含义是 $x \neq x_0$.

应当指出,邻区的半径虽然没有明确规定其大小,但一般总取 ε 是很小的正数.

$(x_0 - \varepsilon, x_0)$ 与 $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ 分别称为 x_0 的左、右 ε 邻区.

(3) 函数的定义

设有两个变量 x 与 y,当变量 x 在给定的某一个变域中任意取定一值时,另一个变量 y 就按某一个确定的法则有一个确定的值与 x 的这个值相对应,那么变量 y 称为变量 x 的函数,记作

$$y = f(x)$$

其中 x 称为自变量,函数 y 称为因变量. 自变量 x 的这个变域称为函数的定义域,而当变域是区间时称为定义区间. 因变量 y 所对应的数值范围称为函数的值域.

在这个定义中有两个要点,称为定义的两个要素:

① 自变量 x 的变域,即函数的定义域.

② 确定自变量 x 与因变量 y 之间数值对应的法则.

(4) 函数的三种表示法:解析法、表格法、图示法.

分段函数的定义:在不同区间上用不同解析式来表示的函数.

(5) 函数的增量

① 对函数 $y = f(x)$,当自变量 x 从 x_0 变到 x_1 时,相应地函数 y 从 y_0 变到 y_1,称 $x_1 - x_0$ 为自变量 x 的增量,记作 Δx;称 $y_1 - y_0$ 为函数 y 的增量,记作 Δy,即 $\Delta x = x_1 - x_0$, $\Delta y = y_1 - y_0 = f(x_1) - f(x_0)$.

② 函数的增量也称改变量,它的值可正可负.

2. 函数的四种简单性态

(1) 单调(增、减)性　如果对属于某一区间 I 的任何两个值 x_1 与 x_2,在 $x_1 < x_2$ 时总有不等式

$$f(x_1) < f(x_2)$$

成立,那么称函数 $f(x)$ 在 I 单调增;如果总有不等式

$$f(x_1) > f(x_2)$$

成立,那么称函数 $f(x)$ 在 I 单调减.

单调增和单调减统称为单调，区间 I 称为单调区间.

一个函数，如果在它的整个定义区间单调增（或减），就称为单调函数. 单调增函数的图形，表现为自左至右上升的曲线，单调减函数的图形，表现为自左至右下降的曲线.

（2）有界和无界性　如果对属于某一区间 I 的所有 x 值总有

$$|f(x)| \leqslant M$$

成立，其中 M 是一个与 x 无关的常数，那么我们称函数 $f(x)$ 在区间 I 有界；否则，便称函数 $f(x)$ 在区间 I 无界.

一个函数，如果在它的整个定义区间有界，称为有界函数.

在函数的图形中，有界表现为曲线在上下两方都有一定范围；无界，曲线向上下两方或一方无限伸展.

（3）奇偶性　设函数 $y=f(x)$ 的定义域关于原点对称. 如果对属于定义域的任何 x 值恒有

$$f(-x)=f(x)$$

那么称函数 $f(x)$ 为偶函数；如果恒有

$$f(-x)=-f(x)$$

那么称函数 $f(x)$ 为奇函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称.

（4）周期性　函数 $y=f(x)$，如果有一正数 l 存在，对属于定义域的任意 $x, x+l, x-l$，总有等式

$$f(x)=f(x \pm l)$$

成立，那么称 $f(x)$ 为周期函数.

3. 反函数和复合函数

（1）反函数的定义

设有函数 $y=f(x)$，如果变量 y 在函数的值域内任取一值 y_0 时，变量 x 在函数的定义域内必有一个值 x_0 与之对应，即 $f(x_0)=y_0$，那么变量 x 是变量 y 的函数. 这个函数用 $x=\varphi(y)$ 来表示，称为函数 $y=f(x)$ 的反函数.

由这个定义可知，如果 $x=\varphi(y)$ 是函数 $y=f(x)$ 的反函数，那么 $y=f(x)$ 也就是函数 $x=\varphi(y)$ 的反函数.

在同一坐标平面内，$y=f(x)$ 与 $y=\varphi(x)$ 的图形是关于直线 $y=x$ 对称的.

（2）复合函数的定义

设 y 是 u 的函数：$y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数：$u=\varphi(x)$；而且当 x 在某一区间 I 取值时相应的 u 值可使 y 有定义，那么我们就说 y 是 x 的一个定义于 I 的复合函数，记作

$$y=f[\varphi(x)].$$

根据这个定义，易知复合函数$f[\varphi(x)]$的定义区间与$\varphi(x)$的定义区间完全相同，或者只是$\varphi(x)$的定义区间的一部分；而且并不是任何两个函数都可以复合起来的.

4. 基本初等函数与初等函数

(1) 五种基本初等函数的定义和性质.

(2) 由基本初等函数与常数经过有限次的有理运算及有限次的函数复合所产生并且能用一个解析式表出的函数称为初等函数.

5. 双曲函数与反双曲函数

(1) 双曲函数的定义和性质

定义

双曲正弦函数 $\mathrm{sh}x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), (-\infty, +\infty)$

双曲余弦函数 $\mathrm{ch}x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), (-\infty, +\infty)$

此外，类似于三角函数，

双曲正切函数 $\mathrm{th}x = \frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}, (-\infty, +\infty)$

性质

①$\mathrm{sh}0 = 0, \mathrm{ch}0 = 1, \mathrm{th}0 = 0$.

②$\mathrm{sh}x$与$\mathrm{th}x$是奇函数，$\mathrm{ch}x$是偶函数.

③$\mathrm{sh}x$与$\mathrm{ch}x$满足关系式：

$$\mathrm{ch}^2x - \mathrm{sh}^2x = 1$$

④ 双曲函数也有和差公式：

$$\mathrm{sh}(x \pm y) = \mathrm{sh}x\mathrm{ch}y \pm \mathrm{ch}x\mathrm{sh}y$$

$$\mathrm{ch}(x \pm y) = \mathrm{ch}x\mathrm{ch}y \pm \mathrm{sh}x\mathrm{sh}y$$

$$\mathrm{th}(x \pm y) = \frac{\mathrm{th}x \pm \mathrm{ch}y}{1 \pm \mathrm{th}x\mathrm{th}y}$$

以上的性质与三角函数的性质类似.

⑤ 双曲函数，都不是周期函数. 根据②，我们先讨论$x > 0$的情形. 当$x > 0$时，显然$\mathrm{sh}x > 0, \mathrm{ch}x > 0, \mathrm{th}x > 0$；又对于任何$x$

$$\mathrm{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} + 1}{2e^x} = \frac{2e^x + (e^x - 1)^2}{2e^x} > 1$$

$$\mathrm{th}x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} < 1.$$

⑥ 设 $0 < x_1 < x_2$，那么

$$\mathrm{sh}x_2 - \mathrm{sh}x_1 = \frac{1}{2}(e^{x_2} - e^{-x_2}) - \frac{1}{2}(e^{x_1} - e^{-x_1})$$

$$= \frac{1}{2}\left[(e^{x_2} - e^{x_1}) + \left(\frac{1}{e^{x_1}} - \frac{1}{e^{x_2}}\right)\right] > 0,$$

所以 $\mathrm{sh}x$ 在 $[0, +\infty)$ 单调增.

同理可证，$\mathrm{ch}x$ 与 $\mathrm{th}x$ 也在 $[0, +\infty)$ 单调增.

(2) 反双曲函数的定义

双曲线函数的反函数称为**反双曲函数**，双曲正弦与双曲正切函数的反函数，分别称为**反双曲正弦函数**与**反双曲正切函数**，记作

$$y = \mathrm{arsh}x \ (-\infty < x < +\infty)$$

$$y = \mathrm{arth}x \ (-1 < x < 1)$$

其值为

$$\mathrm{arsh}x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \ (-\infty < x < +\infty)$$

$$\mathrm{arth}x = \frac{1}{2}\ln\frac{1 + x}{1 - x} \ (-1 < x < 1).$$

双曲余弦函数的反函数称为**反双曲余弦函数**. 根据定义，

$$x = \mathrm{ch}y = \frac{1}{2}(e^{y} + e^{-y})$$

其值为

$$\mathrm{arch}x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})(1 \leqslant x < +\infty).$$

典型例题点拨

例 1　函数 $y = \sqrt{\ln\left(\frac{5x - x^2}{4}\right)}$ 定义域是(　　).

A. $(0,5)$　　　　B. $[1,4]$

C. $(1,4)$　　　　D. $[0,5]$

答案　选 B.

解析　要使函数有意义，必须满足以下两个条件

$$\begin{cases} 5x - x^2 > 0, \\ \ln\frac{5x - x^2}{4} \geqslant 0, \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} 5x - x^2 > 0, \\ 5x - x^2 \geqslant 4, \end{cases}$$

因此 $\begin{cases} 0 < x < 5 \\ 1 \leqslant x \leqslant 4 \end{cases}$，即 $1 \leqslant x \leqslant 4$.

例 2　已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-1,2]$，则函数 $F(x)=f(x+2)+f(2x)$ 的定义域为（　　）.

A. $[-3,0]$　　　　B. $[-3,1]$

C. $[-\frac{1}{2},1]$　　　　D. $[-\frac{1}{2},0]$

答案　选 D.

解析　因为 $f(x)$ 的定义域为 $[-1,2]$，故有 $\begin{cases}-1\leqslant x+2\leqslant 2\\-1\leqslant 2x\leqslant 2\end{cases}$，即 $\begin{cases}-3\leqslant x\leqslant 0\\-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$，所以 $F(x)$ 的定义域为 $[-\frac{1}{2},0]$.

例 3　函数 $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$，$(-\infty<x<+\infty)$ 是.（　　）.

A. 有界函数　　　　B. 无界函数

C. 上无界下有界　　　　D. 上有界下无界

答案　选 A.

解析　因为 $(|x|-1)^2\geqslant 0$，即 $x^2+1\geqslant 2|x|$，$\frac{2|x|}{1+x^2}\leqslant 1$.

所以 $\left|\frac{x}{1+x^2}\right|=\frac{|x|}{1+x^2}\leqslant\frac{2|x|}{1+x^2}\leqslant 1$，故 $f(x)(-\infty<x<+\infty)$ 是有界函数.

例 4　下列函数中为周期函数的是（　　）.

A. $y=\sin x^2$　　　　B. $y=\arcsin 2x$

C. $y=x|\sin x|$　　　　D. $y=\tan(3x-2)$

答案　选 D.

解析　因为

$$\begin{aligned}\tan\left[3\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-2\right]&=\tan(3x+\pi-2)\\&=\tan[(3x-2)+\pi]\\&=\tan(3x-2)\end{aligned}$$

故　$y=\tan(3x-2)$ 是以 $\frac{\pi}{3}$ 为周期的周期函数.

例 5　已知偶函数 $f(x)$ 在 $[0,4]$ 上是单调增函数，则 $f(-\pi)$ 与 $f(\log_{\frac{1}{2}}8)$ 的大小关系是（　　）.

A. $f(-\pi)<f(\log_{\frac{1}{2}}8)$　　　　B. $f(-\pi)=f(\log_{\frac{1}{2}}8)$

C. $f(-\pi)>f(\log_{\frac{1}{2}}8)$　　　　D. 不能确定

答案　选 C.