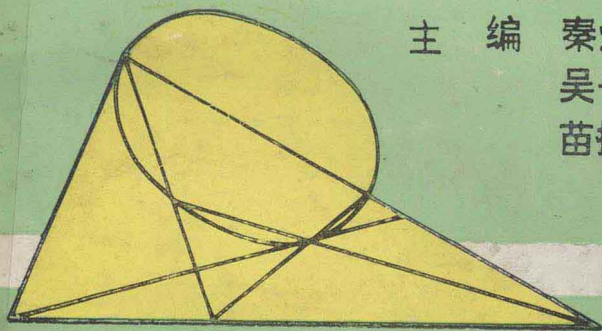


高等学校教学用书

高等几何

主 编 秦炳强
吴子汇
苗振启



GAODENGJIHE

中国矿业大学出版社

高等几何

秦炳强 吴子汇 苗振启 主编

中国矿业大学出版社

内 容 提 要

本书是按照高师院校高等几何教学大纲的要求，由苏皖六所高师院校协作编写而成的。全书共七章：仿射变换，射影平面，射影变换，变换群与几何学，二阶曲线的射影理论，二阶曲线的仿射理论和度量理论，射影几何基础与非欧几何概要。书末附有习题答案与提示。

本书将目前国内两种体系的高等几何教材有机地结合起来，既具有严密的科学性又注重可接受性，内容精炼，深入浅出，证明简捷，紧密联系高等代数、解析几何和初等几何，对中学几何教学具有一定的指导作用。本书可供各种类型师范院校数学专业作为教材或教学参考书，也可供中学数学教师参考。

责任编辑 何其华

高 等 几 何

秦炳强 吴子汇 苗振启 主编

中国矿业大学出版社出版发行

徐州师范学院印刷厂印刷

开本 787×1092 毫米 1/32 印张 7.375 字数 160 千字

1991年6月第一版 1991年6月第一次印刷

印数 1—5000 册

ISBN 7—81021—468—3

O·21

定价：3.30 元

序

苏皖两省九所高等师范院校数学系系主任会议的产物——《高等几何》教材，承蒙各位参编编委的信任，聘请我担任此书的主审，并要我为此书的出版写序，真是盛情难却。他们为了更好地加强学科建设、提高教学质量、推广各校积累的教学经验，组织了一些长期从事教学工作、具有丰富教学经验和较高学术水平的教师，协作编写一本适合目前高等师范院校使用的富有新意的高等几何教材，这对于教材建设来说确是一件可喜的大事，应当鼓励和支持。

高等几何这门课与其它课不同，它具有很强的思想性和方法论的特征；它对指导中学数学教学十分有用；它不仅与初等几何、解析几何、高等代数等有密切联系，而且对于学生在数学基础的培养、观点的提高、思维的灵活、方法的多样等方面起着重要作用，从而大有助于学生科研能力的培养和中学数学教学质量的提高。

本书综合了当前各高校所用教材的优点，结合师范院校教学需要认真取舍，可以说基本上做到了取众家之长，又有较强的针对性和适应性，同时还总结了自己的教学经验使之融为一体。书中主要采用代数法，兼用综合法，注意了联系中学几何的教学。在内容的选取上力求富有新意，注意了科学性、逻辑性与可接受性；写法由浅入深，坡度平缓，用语通俗易懂，没有艰深的数学辞语，也无苦涩无味的烦琐证述，较好地体现了师范性。

列入的七章内容：仿射变换、射影平面、射影变换、变换群与几何学、二阶曲线的射影理论、二阶曲线的仿射理论和度量理论以及射影几何基础与非欧几何概要，虽然都是传统的东西，但选材精炼，编排自然，表述通顺，详略适度，便于自学；对于难度大一些的用*号列入，便于取舍。相信此书的正式出版，对于各种类型的高等师范院校（包括函大、电大、职大）都将是一本比较切合实际的教材。

当然，本书也存在一些不足，但它毕竟是高师院校教师自己协作编写的一本高等几何教材，总的方面是成功的，不足之处完全可以通过实践来进一步改善和提高。衷心地希望大家来使用它，改善它，提高它。让我们共同为高师院校的教材建设而努力。

赵宏量

1991年1月于西南师范大学

编 者 的 话

1989年12月，经徐州师院、淮北煤炭师院、阜阳师院、南通师专、淮阴师专、镇江师专、盐城师专、苏州师专、宿州师专等九所院校数学系系主任会议研究决定，成立“苏皖部分师范院校数学专业课程建设协作组”，负责组织教学研究活动，并指导协作编写通用性强、具有自己特色且富有新意的教材及教学参考书。《高等几何》是被确定为首批编写的教材之一。

本书严格按照教学大纲的要求编写，兼用代数法与综合法，但侧重代数法。本书内容精炼、深入浅出、证明简捷、富有师范性。有些内容仅作粗线条的介绍，而一些加*号的章节与习题则稍加放宽，以便给使用者留有机动选择的余地，各校可根据实际情况适当增删。

目前国内两种不同体系的高等几何教材各有利弊，为了更有利于教和学，我们试图取各家之长，将两种体系有机地结合起来。一方面采用射影平面的解析定义，将射影坐标放到较突出的地位，用与度量无关的射影坐标来定义交比，从而保持了射影几何固有的独立性；另一方面把拓广的欧氏平面作为射影平面的一个模型，并给出交比的初等几何解释，从而进一步揭示了射影几何与初等几何和解析几何之间的密切联系。本书精选了160多道练习题、思考题和近50道例题，书末附有习题答案与提示供参考。

本书编委（以姓氏笔划为序）：王中权、刘以钧、吴子

汇、邵金声、周道生、苗振启、秦炳强。最后由我们三人修改、统稿、定稿。

本书的编写和出版，得到了徐州师院和南通师专两校领导的关心和支持，特别是得到了两校数学系领导自始至终的大力支持和帮助。另外，徐州师院数学系的施宝铝、张玉知老师，也对本书的编写纲目提出了一些宝贵的意见和建议，在此一并表示衷心感谢！我们还要对中国矿业大学出版社和徐州师院印刷厂及教材科的大力支持和合作表示衷心感谢！

本书承蒙西南师范大学出版社社长赵宏量教授担任主审，他的中肯而宝贵的意见使教材得到了进一步的充实和完善，我们向赵先生表示深切的谢意！

由于水平有限，本书一定还存在许多不足之处，热忱欢迎广大读者批评指正，以便再版时改进。

秦炳强、吴子汇、苗振启

1991年1月

目 录

第一章 仿射变换	1
§ 1.1 平行射影	1
1. 两平面间的平行射影与仿射对应	1
2. 仿射对应的不变性质与不变量	2
§ 1.2 仿射变换的定义与性质	4
1. 平面上的透视仿射变换和仿射变换	4
2. 平面仿射几何基本定理	6
§ 1.3 仿射变换的代数表示	8
1. 仿射变换的公式	8
2. 仿射变换的变积系数	9
§ 1.4 仿射变换的特例	13
1. 相似变换	13
2. 运动变换	15
习题一	19
第二章 射影平面	23
§ 2.1 中心射影与无穷远元素	23
1. 中心射影	23
2. 无穷远元素	24
3. 拓广直线和拓广平面	25
* 4. 中心射影法的应用	25
§ 2.2 齐次坐标	27
1. 齐次点坐标	27

2. 线坐标	28
3. 三数组的运算	30
4. 射影平面的解析定义	31
§ 2.3 笛沙格定理、对偶原理	34
1. 对偶图形和对偶命题	34
2. 笛沙格 (Desargues) 定理	36
3. 平面对偶原理	39
§ 2.4 射影坐标	40
1. 平面上点的射影坐标	40
2. 平面上直线的射影坐标	46
3. 直线上点的射影坐标	49
4. 平面上的射影坐标与直线上的射影坐标的关系	53
5. 非齐次射影坐标	54
§ 2.5 交 比	55
1. 交比的定义与性质	55
2. 交比的计算	58
3. 交比的初等几何解释	61
4. 调和点组	62
习题二	68
第三章 射影变换	74
§ 3.1 一维射影对应与透视对应	74
1. 一维射影对应	74
2. 透视对应	77
3. 巴普斯 (Pappus) 定理	80
§ 3.2 一维射影变换与对合	82
1. 直线上的射影变换的固定点	82
2. 直线上的对合	84

§ 3.3	完全四点形与完全四线形的调和性质	87
§ 3.4	二维射影对应	91
§ 3.5	直射变换	95
1.	直射变换的固定元素	95
2.	直射变换与仿射变换的关系	97
* 3.	透射变换	98
* 4.	调和透射	101
习题三		102
第四章	变换群与几何学	107
§ 4.1	变换群与相应的几何学	107
1.	变换群的概念	107
2.	平面上几个重要的变换群	109
3.	克莱因 (F · Klein) 的变换群观点	111
§ 4.2	欧氏、仿射、射影三种几何学的比较	113
1.	射影几何学	113
2.	仿射几何学	113
3.	欧氏几何学	113
4.	三种几何学的比较	114
习题四		116
第五章	二阶曲线的射影理论	119
§ 5.1	对射变换和配极变换	119
1.	对射变换	119
2.	配极变换	120
3.	配极的共轭元素	123
4.	诱导对合	125
5.	配极的分类	128

§ 5.2 二阶曲线的射影定义	132
1. 二阶曲线与二级曲线	132
2. 斯丹纳 (Steiner) 定理	138
§ 5.3 巴斯加定理与布列安香定理	144
1. 巴斯加 (Pascal) 定理	144
2. 布列安香 (Brianchon) 定理	146
§ 5.4 二阶曲线的射影分类	149
1. 二阶曲线的奇异点	149
2. 二阶曲线的射影分类	151
* § 5.5 二阶曲线束	153
* § 5.6 二阶曲线上的射影变换与对合	157
1. 两个二阶曲线间的射影对应	157
2. 二阶曲线上的射影变换	159
3. 直线和二阶曲线间的透视对应	160
4. 二阶曲线上的对合	163
习题五	166
第六章 二阶曲线的仿射理论和度量理论	172
§ 6.1 二阶曲线的仿射理论	172
1. 二阶曲线的中心	172
2. 二阶曲线的直径和共轭直径	174
3. 二阶曲线的渐近线	179
4. 二阶曲线的仿射分类	181
§ 6.2 二阶曲线的度量理论	185
1. 圆点与迷向直线	185
2. 拉格尔 (Laguerre) 定理	187
3. 二阶曲线的主轴、焦点与准线	189
习题六	194

*第七章 射影几何基础与非欧几何 概要	196
* § 7.1 公理法简介	196
1. 公理法思想	196
2. 公理体系的三个基本问题	199
* § 7.2 实射影几何公理体系及其相容性	201
1. 实射影几何公理体系	201
2. 射影几何公理体系的相容性	204
* § 7.3 射影度量、非欧几何的射影模型	207
1. 射影度量	207
2. 双曲运动群与椭圆运动群	210
3. 罗氏几何的克莱因模型	211
4. 椭圆几何的射影模型	213
习题七	215
习题答案与提示	216

第一章 仿射变换

高等几何课程的主要内容是射影几何，本章是在欧氏几何（即初等几何）的基础上介绍平面仿射几何的基本概念，作为从欧氏几何过渡到射影几何的桥梁。

§1.1 平行射影

1. 两平面间的平行射影与仿射对应

过平面 π 内各点 $A, B, C, \dots$ 引平行线交另一平面 π' 于点 $A', B', C', \dots$ (图1.1.1)，这时 A 与 A' ， B 与

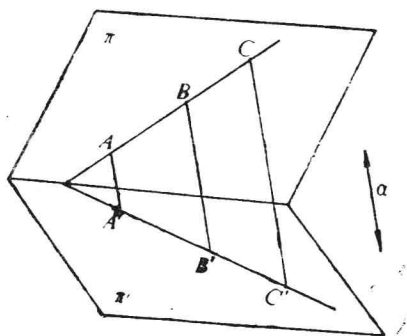


图 1.1.1

B', C 与 $C', \dots$ 之间存在着——对应的关系，这项对应关系称为平面 π 与 π' 间的平行射影，而 A 与 A' ， B 与 B' 等等称为平行射影下的对应点。显然，平行射影与平行的方向 α 有关。

在两相交平面间的平行射影下，存在一条直线，其上每一点重合于其对应点，称为自身对应点（或固定点）。这条直线（即两平面的交线）称为对应轴。

两平面间的平行射影有这样的性质：一个平面内的点与另一平面内的点一一对应着，一个平面内的直线与另一平面内的直线也一一对应着。这就是说平行射影保持同素性（即几何元素点与直线保持原有的种类而不转变）。同时，对应点的连线互相平行，对应直线的交点在对应轴上或者对应直线平行于对应轴。又因为在平行射影下，一直线上的点对应于对应直线上的点，所以点与直线的接合性（即点在直线上或直线通过点）保持不变。

由有限回的平行射影组成仿射对应。由一回平行射影所成的仿射对应特称透视仿射对应，故仿射对应是由一连串的透视仿射对应（称为透视仿射对应链）组成的。

2. 仿射对应的不变性质与不变量

定理1.1.1 两直线间的平行性是透视仿射对应下的不变性质。

证 设在平面 π 上 $a \not\parallel b$ ，若 a, b 在 π' 上的象 a', b' 不平行，则其交点 P' 的原象 P （在 π 上）一定既属于 a 也属于 b ，这与已知条件矛盾，故 $a' \parallel b'$ 。 ■

定义1.1.1 设 A, B, C 为直线 l 上三点（其中 A, B 不同），则有向线段 $\overrightarrow{AC}$ 与 $\overrightarrow{BC}$ 的值之比叫做三点 A, B, C 的简比（或仿射比），记作 (ABC) ，即

$$(ABC) = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} \quad (1.1.1)$$

其中 A, B 叫做基点， C 叫做分点。

简比的定义与直线 l 上正向的取法无关, 且简比 (ABC) 与解析几何里点 C 分有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 所成的比 $\lambda = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}$ 仅相差一个符号, 即简比等于分割比的相反数. 易证: 若 $(ABC_1) = (ABC_2)$, 则 C_1 与 C_2 重合.

定理1.1.2 在透视仿射对应下, 三点的简比是不变量.
(读者自证)

由于仿射对应是由透视仿射对应链组成的, 故得下述定理.

定理1.1.3 同素性、接合性、平行性及简比在仿射对应下不变.

推论 两平行线段之比是仿射对应下的不变量.

例 设 $ABCD$ 为有一双对边平行 ($BC \parallel DA$) 的折四边形 (图1.1.2), E, F 分别为 AB, DC 的中点, 试证:

$$2\overline{EF} = \overline{BC} + \overline{AD}.$$

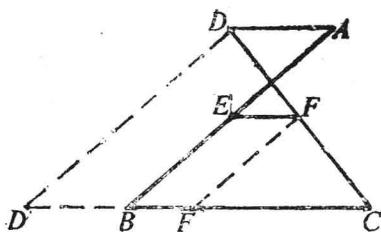


图 1.1.2

证 以 $\overrightarrow{AB}$ 为投射方向, 把点 D, F 射影到直线 BC 上分别得点 D', F' , 则 F' 为 $D'C$ 的中点 (即 $\overline{D'F'} = \overline{F'C}$), 故

$$\begin{aligned}\overline{BC} + \overline{AD} &= (\overline{BF'} + \overline{F'C}) + \overline{BD'} = (\overline{BF'} + \overline{D'F'}) \\ &+ (\overline{BF'} + \overline{F'D'}) = 2\overline{BF'} = 2\overline{EF}.\end{aligned}$$

附注 此例说明利用两直线间的平行射影，可将图形中不共线的点和线段投射成共线的点和线段，从而可使一些问题的证明简化。本例也可以 $\overrightarrow{DC}$ 为投射方向把点 A, E 射影到直线 BC 上，请读者思考。

§1.2 仿射变换的定义与性质

1. 平面上的透视仿射变换和仿射变换

前面提到，利用平行射影可以建立两相交平面 π 与 π^* 间的透视仿射对应，这时有一条由自身对应点组成的直线 l （对应轴）。现在让 π^* 绕 l 旋转，直到与 π 重合时为止，且假定对应关系不改变（图1.2.1），那么两相交平面间的点

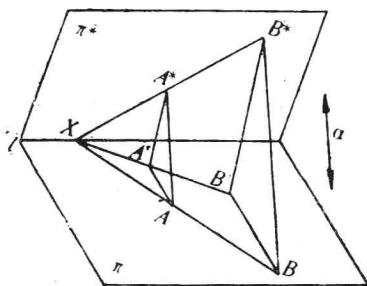


图 1.2.1

对应变为同一平面上的点对应了。我们称这种平面到自身的透视仿射对应为透视仿射变换，由透视仿射变换链组成的变换叫做仿射变换。透视仿射变换的特征是：对应点的连线互

相平行，对应直线的交点在同一直线（对应轴）上或者对应直线平行于对应轴。使平面上每个点都变为自身的恒等变换可看作透视仿射变换的特例。

附注 平面上的透视仿射变换 T 是两相交平面间的透视仿射对应 T_1 和绕对应轴 l 的旋转 T_2 的乘积 $T_2 T_1$ （如图 1.2.1： $A \xrightarrow{T_1} A^* \xrightarrow{T_2} A'$ ）， T 也是两个透视仿射对应的乘积（因绕对应轴 l 的旋转是透视仿射对应的特例），故平面上的透视仿射变换乃是两平面间的仿射对应的特例。■

显然，平面上的仿射变换是两平面间的仿射对应的特例，故得下述定理。

定理1.2.1 同素性、接合性、平行性及简比在仿射变换下不变，它们都是仿射性质（即经过仿射变换不变的性质）。

定理1.2.2 平面上的透视仿射变换由对应轴与一对对应点唯一决定。

证 设已知对应轴 l 与一对对应点 A, A' ，对任一点 B ，作直线 AB 设交 l 于点 X （图1.2.2），过点 B 引 AA' 的平行线，它与直线 $A'X$ 的交点 B' 就是 B 的对应点，且从作图可知这样决定的点 B' 是唯一的。

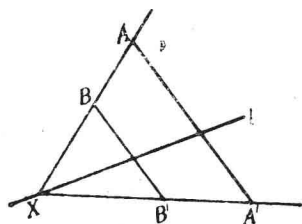


图 1.2.2

当 $AB \parallel l$ 或 B 在 AA' 上时， B' 如何确定呢？请读者思考。