高等院校教材同步辅导及考研复习用书

丛书主编 马德高

燎原教育

经济应用数学基础（一）

微积分

辅导及习题精解

（人大·第三版）

本册主编 张天德 张 锋

教材习题全解 指导同步学习

考研真题精讲 剖析考研重点

全国百佳图书出版单位

时代出版传媒股份有限公司

安徽人民出版社

丛书主编 马德高

经济应用数学基础（一）

微积分

辅导及习题精解

（人大·第三版）

本册主编 张天德 张 锋

副 主 编 宋振彬 侯方圆

主 审 吴 臻

全国百佳图书出版单位

APCTIME 时代出版

时代出版传媒股份有限公司

安徽人民出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分辅导及习题精解 ：人大第3版 / 马德高主编. —合肥 ：安徽人民出版社，2013.6

ISBN 978-7-212-06606-2

Ⅰ. ①微… Ⅱ. ①马… Ⅲ. ①微积分—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 123633 号

微积分辅导及习题精解(人大第3版)

马德高　主编

出 版 人:胡正义　　　　责任编辑:杜宇民　吴　筠

封面设计:燎原视觉设计中心

出版发行:时代出版传媒股份有限公司　http://www.press-mart.com

安徽人民出版社 http://www.ahpeople.com

合肥市政务文化新区翡翠路1118号出版传媒广场八楼

邮　编:230071

营销部电话:0551—63533258　0551—63533292(传真)

印　　刷:山东鸿杰印务有限公司

(如发现印装质量问题,影响阅读,请与印刷厂商联系调换)

开本:880×1230　1/32　　印张:15　　字数:380千

版次:2013年6月第1版　　2013年6月第1次印刷

标准书号:ISBN　978-7-212-06606-2　　定价:23.80元

前言

微积分是经济管理专业重要的基础课程。为了帮助读者学好微积分，我们根据多年的教学经验编写了这本与中国人民大学赵树嫄主编的《微积分》第三版完全配套的《微积分辅导及习题精解》，以使读者加深对基本概念的理解，加强对基本解题方法与技巧的掌握，最终提高应试能力和数学思维水平。

讲解结构三大部分

一、教材内容讲解　这部分由两块组成：教材知识全解、典型例题解析。

1. 教材知识全解　用表格形式对每节涉及的基本概念、基本定理和公式进行系统的梳理，并指出在理解与应用基本概念、定理、公式时需注意的问题以及各类考试中经常考查的重要知识点；

2. 典型例题解析　这一部分是每一节讲解中的核心内容，也是全书的核心内容。作者基于多年的教学经验和研究生入学考试试题研究经验，将该节教材内容中学生需要掌握的、考研中经常考到的重点、难点、考点，归纳为一个个的在考试中可能出现的基本题型，然后针对每一个基本题型，举出大量的精选例题深入讲解，使您对每一个知识点扎实掌握，并能熟练运用在具体解题中。可谓基础知识梳理、重点考点深讲、联系考试解题三重互动、一举突破，从而获得实际应用及应试能力的全面提升。例题讲解中穿插出现的"思路探索"、"方法点击"，更是巧妙点拨，让您举一反三、触类旁通。

二、每章知识整合　包括本章考研要求、本章知识结构、常考题型总结。

1. 本章考研要求　帮助读者了解本章内容在考研中的考点及题型，为复习备考指明方向，使读者准备考试更加轻松。

2. 本章知识结构　用网络结构图的形式揭示出本章知识点之间的有机联系，便于读者从总体上系统地掌握本章知识体系和核心内容。

3. 常考题型总结　分类总结每章重点题型以及重要定理，使读者能更扎实地掌握各个知识点，最终提升读者应试能力。

前言

三、教材习题详解　对教材里全部习题作了详细解答。有的习题还给出了一题多解，以提高读者的分析能力和发散思维能力。

内容编写三大特色

一、知识梳理清晰、简洁　直观、形象的条目总结，精练、准确的考点提炼，权威、独到的方法归纳，将教材内容抽丝剥茧、层层展开，呈现给读者简明扼要、层次分明的知识结构，便于读者快速复习、高效掌握，形成稳固、扎实的知识网，为提高解题能力和思维水平夯实基础。

二、能力提升迅速、持续　所有重点、难点、考点，统统归纳为一个个在考试中可能出现的基本题型，然后针对每一个基本题型，举出丰富的精选例题、考研例题，举一反三、深入讲解，真正将知识掌握和解题能力提升高效结合、一举完成。

三、联系考研密切、实用　本书既是一本教材同步辅导，也是一本考研复习用书，书中处处联系考研：例题中有考研试题，同步自测中也有考研试题，更不用说讲解中处处渗透考研经常考到的考点、重点等，为的就是让同学们同步完成考研备考，达到考研要求的水平。

本书注意博采众家之长，参考了多本同类书籍，吸取了不少养分。在此向这些书籍的编著者表示感谢。由于我们水平有限，书中疏漏与不妥之处，在所难免，敬请广大读者提出宝贵意见，以便再版时更正、改进。

编者

教材知识全解+教材习题详解

目 录

教材知识全解

目录

目录

教材知识全解+教材习题详解

教材习题详解

第一章 函 数

函数是微积分的主要研究对象，后面关于微积分性质的研究都是对函数性质的研究．本章首先引入集合，然后研究两个实数集合之间的一种对应关系——函数关系，并介绍函数的基本性质和常见初等函数．

第一节 集 合

教材知识全解

知识点一 集合的描述与运算

表示法	列举法	按任意顺序列出集合的所有元素，并用大括号{}括起来
	描述法	设 $P(a)$ 为某个与 a 有关的条件或法则，A 为满足 $P(a)$ 的一切 a 构成的集合，则记为 $A=\{a \mid P(a)\}$
全集、空集与子集	全 集	由所研究的一切事物构成的集合称为**全集**，记为 U
	空 集	不包含任何元素的集合称为**空集**，记为 $\varnothing$
	子 集	如果集合 A 的每一个元素都是集合 B 的元素，即"如果 $a\in A$，则 $a\in B$"，则称 **A 为 B 的子集**．记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$，读作 A 包含于 B 或 B 包含 A
运 算	并 集	$A\cup B=\{x \mid x\in A 或 x\in B\}$
	交 集	$A\cap B=\{x \mid x\in A 且 x\in B\}$
	差 集	$A-B=\{x \mid x\in A 且 x\notin B\}$
	补 集	$A'=\{x \mid x\in U 且 x\notin A\}$
	笛卡尔乘积	设有集合 A 和 B．$x\in A, y\in B$，所有二元有序数组 (x,y) 构成的集合，称为**集合 A 与 B 的笛卡尔乘积**，记为 $A\times B$，即 $A\times B=\{(x,y) \mid x\in A, y\in B\}$

知识点二 集合运算律

交换律	$A\cup B=B\cup A$；$A\cap B=B\cap A$
结合律	$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$；$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$
分配律	$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$；$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$
摩根律	$(A\cup B)'=A'\cap B'$；$(A\cap B)'=A'\cup B'$

典型例题解析

基本题型Ⅰ：集合的表示法

【例1】 用列举法表示下列集合.

(1) 由1,3,5,7,9,11组成的集合；

(2) 由方程 $x^2+6x-27=0$ 的根所组成的集合.

解:(1) $A=\{1,3,5,7,9,11\}$ 或 $A=\{3,1,5,7,9,11\}$ 等.

(2) $B=\{-9,3\}$.

方法点击:在用列举法表示集合时,必须列出集合中的所有元素,不计较顺序,但不能遗漏和重复.

【例2】 用描述法表示下列集合.

(1) 由方程 $x^2+6x-5=0$ 的根所组成的集合；

(2) 由非负数全体组成的集合.

解:(1) $A=\{x\mid x^2+6x-5=0\}$.

(2) $B=\{x\mid x\geqslant 0\}$.

方法点击:用描述法表示集合是指把集合中元素所具有的某个共同属性描述出来,用$\{x\mid x$具有的共同属性$\}$表示.

基本题型Ⅱ:集合的运算

【例3】 对下面给定的集合进行相应的运算:

(1) 设集合 $A=\{1,2,3,4\}$,$B=\{2,4,7,8\}$,求 $A\cup B$,$A\cap B$,$A-B$;

(2) 设集合 $A=\{x\mid -1\leqslant x<2\}$,$B=\{x\mid x\geqslant 0\}$,$C=\{x\mid -1<x<3\}$,求 $A\cup(B\cap C)$.

(3) 设 $U=\{-1,0,1,2,3,4\}$,$M=\{x\mid x^2-5x+6=0\}$,$R=\{1,3\}$,求 M',R',$M'\cup R'$,$M'\cap R'$,$(M\cup R)'\cap M$.

解:(1) $A\cup B=\{1,2,3,4,7,8\}$,$A\cap B=\{2,4\}$,$A-B=\{1,3\}$.

(2) $\because B\cap C=\{x\mid 0\leqslant x<3\}$

$\therefore A\cup(B\cap C)=\{x\mid -1\leqslant x<3\}$.

(3) $\because M=\{2,3\}$

$\therefore M'=U-M=\{-1,0,1,4\}$

$R'=U-R=\{-1,0,2,4\}$

$M'\cup R'=\{-1,0,1,2,4\}$

$M'\cap R'=\{-1,0,4\}$

又 $M\cup R=\{1,2,3\}$

故 $(M\cup R)'=U-(M\cup R)=\{-1,0,4\}$

或由$(M\cup R)'=M'\cap R'=\{-1,0,4\}$

所以$(M\cup R)'\cap M=\{-1,0,4\}\cap\{2,3\}=\varnothing$.

方法点击:求不等式所构成集合的并、交运算,最好借助于数轴表示,显得一目了然;进行并、交的混合运算应注意并、交无先后,但括号优先,先里后外;抽象集合的并、交运算特点是并集取“全部”;交集取“公共”.

【例4】 集合的笛卡尔乘积.

(1) 设$A=\{1,3,5,7\}$,$B=\{2,5\}$,求$A\times B$,$B\times B$.

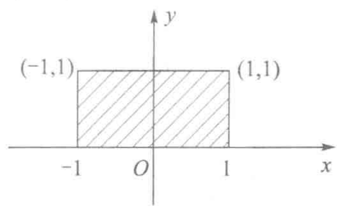
(2) 设$A=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 1\}$,$B=\{y\mid 0\leqslant y\leqslant 1\}$,求$A\times B$.

解:(1) $A\times B=\{(1,2),(1,5),(3,2),(3,5),(5,2),(5,5),(7,2),(7,5)\}$

$B\times B=\{2,5\}\times\{2,5\}=\{(2,2),(2,5),(5,2),(5,5)\}$.

(2) $A\times B=\{(x,y)\mid -1\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$.

它表示平面直角坐标系中如图L1-1所示的矩形区域.



图L1-1

方法点击:集合的笛卡尔乘积与集合的次序有关,一般地,$A\times B$与$B\times A$是不相同的两个集合.

第二节 实 数 集

教材知识全解

知识点一 实数绝对值的定义及性质

定 义	一个实数x的绝对值定义为 $\lvert x\rvert=\begin{cases}x & x\geqslant 0\\ -x & x<0\end{cases}$
性 质	$\lvert x\rvert\geqslant 0$ $\lvert x\rvert=\sqrt{x^2}$ $\lvert -x\rvert=\lvert x\rvert$ $-\lvert x\rvert\leqslant x\leqslant\lvert x\rvert$
	$\{x\mid \lvert x\rvert<a\}=\{x\mid -a<x<a\}$ $\{x\mid \lvert x\rvert>b,b>0\}=\{x\mid x<-b\}\cup\{x\mid x>b\}$
	$\lvert x+y\rvert\leqslant\lvert x\rvert+\lvert y\rvert$ $\lvert x-y\rvert\geqslant\lvert x\rvert-\lvert y\rvert$ $\lvert xy\rvert=\lvert x\rvert\lvert y\rvert$ $\left\lvert\dfrac{x}{y}\right\rvert=\dfrac{\lvert x\rvert}{\lvert y\rvert}(y\neq 0)$

知识点二　区间与邻域

区　间	有限区间	开区间	$(a,b)=\{x \mid a<x<b\}$
		闭区间	$[a,b]=\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$
		半开半闭区间	$(a,b]=\{x \mid a<x\leqslant b\}$ $[a,b)=\{x \mid a\leqslant x<b\}$
	无限区间	$(-\infty,+\infty)=\{x \mid x\in \mathbf{R}\}$ $(a,+\infty)=\{x \mid x>a\}$ $[a,+\infty)=\{x \mid x\geqslant a\}$ $(-\infty,b)=\{x \mid x<b\}$ $(-\infty,b]=\{x \mid x\leqslant b\}$	
邻　域	点 a 的 δ 邻域	$U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta)=\{x \mid \lvert x-a\rvert<\delta\}$	
	点 a 的去心 δ 邻域	$\mathring{U}(a,\delta)=\{x \mid 0<\lvert x-a\rvert<\delta\}$	

典型例题解析

基本题型:求解含绝对值的不等式

【例】 用区间表示满足下列不等式的所有 x 的集合.

(1) $|x|\leqslant 2$; (2) $|x-5|\leqslant 1$; (3) $|x-x_0|<\varepsilon(\varepsilon>0,x_0$ 为常数);

(4) $|x|>1$; (5) $|x+2|\geqslant 3$; (6) $|x|>|x-2|$.

解:(1) 由 $-2\leqslant x\leqslant 2$ 知区间为 $[-2,2]$.

(2) 由 $-1\leqslant x-5\leqslant 1$ 知 $4\leqslant x\leqslant 6$,区间为 $[4,6]$.

(3) 由 $-\varepsilon<x-x_0<\varepsilon$ 知 $x_0-\varepsilon<x<x_0+\varepsilon$,区间为 $(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$.

(4) 即 $x>1$ 或 $x<-1$,区间为 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

(5) 由 $x+2\geqslant 3$ 或 $x+2\leqslant -3$ 知 $x\geqslant 1$ 或 $x\leqslant -5$,故区间为 $(-\infty,-5]\cup[1,+\infty)$.

(6) 由 $|x|>|x-2|$ 知 $x^2>(x-2)^2$,即 $4x-4>0$,$x>1$,故区间为 $(1,+\infty)$.

方法点击:求解含绝对值的不等式关键是要正确去掉绝对值符号.

第三节　函数关系

教材知识全解

知识点一　函数的定义

名称	定义	说明
函数	若 D 是一个非空实数集合，设有一个对应规则 f，使每一个 $x \in D$，都有一个确定的实数 y 与之对应，则称这个对应规则 f 为定义在 D 上的一个函数关系，或称**变量 y 是变量 x 的函数**. 记作 $y = f(x), x \in D$. 其中 x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为定义域，记作 D_f，即 $D = D_f$. 全体函数值的集合 $\{y \mid y = f(x), x \in D_f\}$ 称为**函数 $y = f(x)$ 的值域**，记作 Z 或 Z_f	(1) f 表示自变量 x 和因变量 y 之间的对应法则，而 $f(x)$ 表示与自变量 x 对应的函数值；(2) 表示函数的记号可以任意选取；(3) 构成函数的要素是定义域 D_f 及对应法则 f；(4) 当且仅当两个函数的定义域及对应法则都相同时，两个函数相等
隐函数	由二元方程 $F(x,y) = 0$ 所确定的 y 与 x 的函数关系称为隐函数	因变量能用自变量直接表示出来（如 $y = f(x)$）的函数称为**显函数**，否则为**隐函数**

知识点二　函数的三种表示法

名称	定义
解析法	把一个函数关系用解析式表示的方法称为**函数解析法**，也叫**公式法**
表格法	把自变量所取的值和对应的函数值列成表，用以表示函数关系，如我们所用的各种数学用表 —— 平方表、对数表、三角函数表等，函数的这种表示法称为**表格法**
图形法	用某个坐标系中的一条曲线来表示两个变量之间的对应关系，称为**图形法**或**图示法**

典型例题解析

基本题型 Ⅰ：判定两个函数是否相同

【例 1】 下列各对函数中，相同的一对函数是（　　）.

(A) $y = \dfrac{x^3}{x}$ 与 $y = x^2$　　　　(B) $y = \ln x^2$ 与 $y = 2\ln x$

(C) $y=\sqrt{x^2}$ 与 $y=x$ (D) $y=x^2$ 与 $u=v^2$

解:排除法可知选项(D)中的两个函数相同.

∵ 选项(A)中两个函数的定义域 $D_1=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,$D_2=(-\infty,+\infty)$ 不相同;选项(B)中的 $D_1=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)\neq D_2=(0,+\infty)$;而选项(C)中的两个函数定义域虽相同,但对应法则不相同,其中函数 $y=x$,当 $x>0$ 时,$y>0$;当 $x<0$ 时,$y<0$.而函数 $y=\sqrt{x^2}$,当 $x>0$ 时 $y>0$;当 $x<0$ 时 $y>0$.

对于选项(D)中的两个函数,只是变量的表示字母不同,但定义域和对应法则完全相同.

∴ 仅选项(D)是正确的.

方法点击:区分两个函数是否相同,关键是研究确定函数关系的两个要素——定义域和对应法则,而与变量用什么字母表示无关.

基本题型Ⅱ:求函数的定义域

【例2】 求下列函数的定义域.

(1) $y=\ln(x^2-1)+\arcsin\dfrac{1}{x+1}$;

(2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-x-6}}+\lg(3x-8)$.

解:(1) 欲使函数有意义,则 $\begin{cases}x^2-1>0,\\x+1\neq 0,\\\left|\dfrac{1}{x+1}\right|\leqslant 1.\end{cases}$ 由 $x^2-1>0$,得 $x<-1$ 或 $x>1$;

由 $\left|\dfrac{1}{x+1}\right|\leqslant 1$,得 $x\leqslant -2$ 或 $x\geqslant 0$,故原函数定义域为 $(-\infty,-2]\cup(1,+\infty)$.

(2) 欲使函数有意义,则 $\begin{cases}x^2-x-6>0,\\3x-8>0,\end{cases}$ 由 $x^2-x-6>0$,得 $x>3$ 或 $x<-2$;

由 $3x-8>0$,得 $x>\dfrac{8}{3}$,故函数的定义域为 $(3,+\infty)$.

方法点击:求初等函数的定义域有下列原则:① 分母不能为零;② 偶次根式的被开方数大于等于零;③ 对数的真数大于零;④$\arcsin x$ 或 $\arccos x$ 的定义域为 $|x|\leqslant 1$;⑤$\tan x$ 的定义域为 $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$;⑥$\cot x$ 的定义域为 $x\neq k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$.

第四节 分段函数

教材知识全解

知识点 分段函数

名 称	定 义	说 明
分段函数	对于其定义域内自变量x不同的取值，不能用一个统一的数学表达式表示，而要用两个或两个以上的式子表示的一类函数称为**"分段函数"**	分段函数是用几个公式合起来表示一个函数，而不是表示几个函数

典型例题解析

基本题型Ⅰ:求分段函数的定义域

【例1】 求函数 $y=\dfrac{1}{\ln|x|}$ 的定义域.

解:绝对值函数可以化为分段函数

$$y=\frac{1}{\ln|x|}=\begin{cases}\dfrac{1}{\ln x} & x>0\text{ 且 }x\neq1\\[2ex] \dfrac{1}{\ln(-x)} & x<0\text{ 且 }x\neq-1\end{cases}$$

其中第一段的定义域为$(0,1)\cup(1,+\infty)$,第二段的定义域为$(-\infty,-1)\cup(-1,0)$,再取各段定义域的并集$(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$,即定义域为$\{x\mid-\infty<x<+\infty,x\neq0,x\neq\pm1\}$.

方法点击:分段函数的定义域就是将每段表达式的定义域并在一起.

基本题型Ⅱ:分段函数求值

【例2】 设 $f(x)=\begin{cases}2^x & -1<x<0\\ 2 & 0\leqslant x<1\\ x+1 & 1\leqslant x\leqslant3\end{cases}$,求 $f(3),f(2),f(0),f(\frac{1}{2})$,

$f(-\frac{1}{2})$ 及 $f(x+1)$.

解:$f(3)=(x+1)\mid_{x=3}=4$

$f(2)=(x+1)\mid_{x=2}=3$

$f(0)=2\mid_{x=0}=2$

$f(\frac{1}{2})=2\mid_{x=\frac{1}{2}}=2$

$$f(-\frac{1}{2})=2^x\big|_{x=-\frac{1}{2}}=2^{-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$f(x+1)=\begin{cases}2^{x+1} & -1<x+1<0\\ 2 & 0\leqslant x+1<1\\ x+1+1 & 1\leqslant x+1\leqslant 3\end{cases}$$

即 $f(x+1)=\begin{cases}2^{x+1} & -2<x<-1\\ 2 & -1\leqslant x<0\\ x+2 & 0\leqslant x\leqslant 2\end{cases}$

方法点击: 由于分段函数在各段上的对应法则是不同的,所以求分段函数在某点的函数值时,关键要弄清该自变量所在区间段对应的函数表达式是哪一个,然后再代入求值.

【例 3】 设 $f(x)=\begin{cases}e^{-x} & x\leqslant 0\\ \cos x & x>0\end{cases}$,则 $f(-x)=$ ________.

(A) $f(-x)=\begin{cases}-e^{-x} & x\leqslant 0\\ -\cos x & x>0\end{cases}$ (B) $f(-x)=\begin{cases}e^{-x} & x\leqslant 0\\ \cos x & x>0\end{cases}$

(C) $f(-x)=\begin{cases}-\cos x & x<0\\ e^{-x} & x\geqslant 0\end{cases}$ (D) $f(-x)=\begin{cases}\cos x & x<0\\ e^{x} & x\geqslant 0\end{cases}$

解:当 $-x\leqslant 0$ 时,即 $x\geqslant 0$,

$f(-x)=e^{-(-x)}=e^x$

当 $-x>0$ 时,即 $x<0$,

$f(-x)=\cos(-x)=\cos x$

故 $f(-x)=\begin{cases}e^x & x\geqslant 0\\ \cos x & x<0\end{cases}=\begin{cases}\cos x & x<0\\ e^x & x\geqslant 0\end{cases}$

故选项(D) 正确.

第五节 建立函数关系的例题

教材知识全解

知识点 建立函数关系的基本步骤

步 骤	① 明确问题中的因变量与自变量,并以适当记号表示
	② 根据题意建立等式,从而得出函数关系
	③ 确定函数的定义域