工业和信息化普通高等教育“十二五”规划教材
立项项目

微积分
（经管类）
（上册）

■ 顾聪 姜永艳 主编
■ 王宁 李晓 卜维春 丁 何建营 副主编

人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

工业和信息化普通高等教育“十二五”规划教材
立项项目

微积分

（经管类）

（上册）

顾聪 姜永艳 主编
王宁 李晓 卜维春 丁箭飞 何建营 副主编

人民邮电出版社
北京

01306431 5

图书在版编目（CIP）数据

微积分 ：经管类. 上册 / 顾聪，姜永艳主编. --
北京 ：人民邮电出版社，2013.8
ISBN 978-7-115-31996-8

Ⅰ. ①微… Ⅱ. ①顾… ②姜… Ⅲ. ①微积分－教材
Ⅳ. ①O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第142399号

内 容 提 要

本套《微积分（经管类）》教材共有10章，分上、下两册。本书为上册部分，具体内容包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理（作为一元函数微分学的组成部分），以及在此基础上的多元函数微分学.

本书的主要特点是：突出专业的特点和特色，按照专业需要进行教学内容的组织和教材的编写，突出应用性，解决实际问题，着重培养应用型人才的数学素养和创新能力. 本教材打破传统教材的编排特点，将一元函数和多元函数的微分学作为一个完整的体系编排在上册，而将一元函数和多元函数的积分学编排在下册，更加有利于学生对于微分学和积分学的学习方法和理论的延续和类比.

本教材可作为高等学校经济与管理等非数学本科专业的高等数学或微积分课程的教材，也可作为部分专科学校的同类课程教材使用.

◆ 主　　编　顾　聪　姜永艳
　副 主 编　王　宁　李　晓　卜维春　丁箭飞　何建营
　责任编辑　李海涛
　责任印制　彭志环　焦志炜

◆ 人民邮电出版社出版发行　　北京市崇文区夕照寺街14号
　邮编　100061　　电子邮件　315@ptpress.com.cn
　网址　http://www.ptpress.com.cn
　北京鑫正大印刷有限公司印刷

◆ 开本：700×1000　　1/16
　印张：10.75　　2013年8月第1版
　字数：256千字　　2013年8月北京第1次印刷

定价：32.00元

读者服务热线：(010)67170985　印装质量热线：(010)67129223
反盗版热线：(010)67171154

前言
Preface

《国家中长期教育改革与发展规划纲要（2010—2020）》指出，未来 10 年我国将在进一步提高高等教育大众化水平的基础上，全面提高高等教育的质量和人才培养质量. 作为高等教育质量建设的重要组成部分，课程建设处于质量建设的首要位置. 高等数学作为公共基础课程，在整个课程体系中处于核心地位. 高等数学（微积分）是高等院校理工类、经管类、农林类与医药类等各个专业的公共基础课程. 即使是以前对数学要求较低的某些纯文科类专业，也普遍开设了大学数学课程. 在应用型人才培养中，高等数学是本科院校的一门重要的基础理论课，对培养和提高学生的素质、能力、知识结构、逻辑思维、创新思维等方面起着极其重要的作用，直接关系到未来建设者能否适应现代社会经济、科学技术等方面发展变化的要求.

目前应用型高等院校所使用的高等数学或微积分课程的教材大多直接选自传统普通高校教材，教学内容多为理工类专业高等数学教学内容的精简和压缩，在知识体系大体相同，教学时间却大幅压缩的情况下，普遍存在重结论轻证明、重知识轻思想、重应用轻推导的授课方式，无法直接有效地满足实际教学需要. 且教学内容缺乏和经济管理知识的有机联系，难以达到“为经管类专业后续课程提供必要的数学工具”这一目标. 根据当前经管类专业学生的人才培养方案和高等数学等课程的实际开设情况，为了更好地适应国家关于应用型高校本科层次的教学要求，更好地培养经济管理类复合型人才，以专业服务和应用为目的，亟需编写本套教材.

本教材以保证理论基础、注重应用为基本原则，在保证知识体系的科学性、系统性和严密性的基础上，有如下特点.

（1）当前中学数学教学改革力度加大，造成了现有高等数学教材内容与中学数学内容有不少脱节和重复. 例如中学数学教学内容中未列入“极坐标”、“数学归纳法”、“反三角函数”等，却已讲过“极限”、“导数”等内容. 因此，本教材的选取和编写更加注重中学数学与高等数学的教学衔接.

（2）强调数学工具为经管类专业知识学习服务，不过于强调数学理论的完整性，淡化纯数学的抽象性，突出专业的特点和特色，按照专业需要进行教学内容的组织和教材的编写，突出应用性，解决实际问题，注重培养应用型人才的数学素养和创新能力. 例如把微积分在经济学中的应用作为完整独立的一章，既可以不打破微积分学知识体系的完整性，又可以为经管类学生提供重新认识微积分的应用价值的全新视角.

（3）传统的教材在教学内容上基本都是将一元函数微积分学和多元函数微积分学分开安排在上、下册，造成了学生经过一个学期的时间学习了一元函数微积分学之后，第二个学期在学习多元函数微积分学时，许多概念和公式需要重新复习对比. 本教材打破传统教材的编排特点，将一元函数和多元函数的微分学作为一个完整的体系编排在上册，而将一元函数和多元函数的积分学编排在下册，更加有利于学生对于微分学和积分学的学习方法和理论的延续和类比.

（4）应用型本科院校的学生在中学阶段的数学基础不一样，进入大学后数学知识水平参差不齐，致使学生的接受水平和接受能力存在差异，因而需要实行分层次教学，因材施教. 本教材在编写上由浅入深，设置部分带*号的内容以适应分层次教学的需要，并在附录中加入预备知识等，供学生查阅. 同时在复习题的选取上，分为基本题（A 级）和提高题（B 级）两级，A 级以教学大纲为本，B 级则和考研的要求接轨.

全书共分 10 章内容，分上、下两册. 上册由第 1 章到第 4 章组成，包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理（作为一元函数微分学的组成部分），以及在此基础上的多元函数微分学. 下册由第 5 章到第 10 章组成，包括不定积分、定积分、二重积分（组成积分学的内容），还包括无穷级数、微分方程与差分方程，最后是微积分在经济学中的应用.

本教材可作为应用型高等学校经济与管理等非数学本科专业的高等数学或微积分课程的教材，也可作为部分专科学校的同类课程教材使用.

编 者

2013 年 5 月

目录

Contents

第1章 函数与极限

函数是现代数学的基本概念之一，是高等数学的主要研究对象．函数反映了现实世界中量与量之间的关系．我们在初等数学中已经学习过函数的相关知识．本章中将对函数的概念进行系统复习和必要补充，为以后的学习打下必要的基础．同时对数列和函数的权限的概念、运算性质及计算方法进行系统的回顾和介绍．

第1节 函 数

一、集合

1．集合的概念

一般，具有某种特定性质的事物的总体称为集合，简称集．其中组成集合的各事物叫作集合的元素或简称元．例如，某间教室里的全体学生构成一个集合，其中每一个学生为该集合的一个元素；自然数的全体组成自然数集合，每个自然数就是它的元素；等等．

通常用大写英文字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合，用小写的英文字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合的元素．若 a 是集合 A 的元素，则称 a 属于 A，记作 $a\in A$；若 a 不是集合 A 的元素，则称 a 不属于 A，记作 $a\notin A$．含有有限个元素的集合称为有限集；由无限个元素组成的集合称为无限集；不含任何元素的集合称为空集，用 $\varnothing$ 表示．

表示集合的方法通常有以下两种：列举法和描述法．

列举法就是将集合中的全体元素一一列举出来，写在一个大括号内．例如，由元素 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 构成的集合 B 可以表示成

$$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}.$$

描述法是指明集合元素所具有的性质．若集合 A 由具有某种性质 P 的元素 x 的全体所组成，则 A 就可以表示成

$$A=\{x|x\text{ 具有性质 }P\}.$$

例如，由方程 $x^2+5x+6=0$ 的根构成的集合，可记为

$$M=\{x|x^2+5x+6=0\}.$$

由数所构成的集合称为数集，有时我们在表示数集的字母的右上角标上“*”来表示该数集内排除0的集，标上“+”来表示该数集内排除负数和0的集．

习惯上，自然数集合记作 $\mathbf{N}$，即 $\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$；

全体正整数集合记作 $\mathbf{N}^+$，即 $\mathbf{N}^+=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$.

设 A,B 为两个集合，若 A 中的任意元素都属于 B，则称 A 是 B 的子集，记为 $A\subset B$(读作 A 包含于 B)或 $B\supset A$（读作 B 包含 A）．若 $A\subset B$，且有元素 $a\in B$ 但 $a\notin A$，则称 A 是 B 的真子集，记作 $A\subsetneqq B$，例如，$\mathbf{N}\subsetneqq\mathbf{Z}\subsetneqq\mathbf{Q}\subsetneqq\mathbf{R}$．空集是任何集合的子集，是任何非空集的真子集．任何集合是它本身的子集．子集、真子集都具有传递性．如果集合 A 与集合 B 互为子集，即 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称集合 A 与集合 B 相等，记作 $A=B$．

2. 集合的运算

集合的基本运算有以下几种：并、交、差．

设 A,B 是两个集合，由所有属于 A 或者属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的并集（简称并），记作 $A\cup B$，即

$$A\cup B=\{x\,|\,x\in A\text{ 或 }x\in B\}.$$

设 A,B 是两个集合，由所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的交集（简称交），记作 $A\cap B$，即

$$A\cap B=\{x\,|\,x\in A\text{ 且 }x\in B\}.$$

设 A,B 是两个集合，由所有属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的差集（简称差），记作 $A\setminus B$，即

$$A\setminus B=\{x\,|\,x\in A\text{ 但 }x\notin B\}.$$

如果我们将研究某个问题限定在一个大的集合 I 中进行，所研究的其他集合 A 都是 I 的子集，此时，我们称集合 I 为全集或基本集，称 $I\setminus A$ 为 A 的余集或补集，记作 A^c．例如，在实数集 $\mathbf{R}$ 中，集合 $A=\{x\,|\,-1<x<1\}$，则 $A^c=\{x\,|\,x\leqslant -1\text{ 或 }x\geqslant 1\}$．

集合的运算法则：

设 A，B，C 为任意三个集合，则

（1）交换律　$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

（2）结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，
$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

（3）分配律　$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，
$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$；

（4）对偶律　$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$，
$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$．

二、区间与邻域

1. 区间

设 a，b 是两个实数，且 $a<b$，我们规定：

（1）满足不等式 $a<x<b$ 的实数 x 的集合，称为开区间，表示为 (a,b)；

（2）满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的实数 x 的集合，称为闭区间，表示为 $[a,b]$；

（3）满足不等式 $a<x\leqslant b$ 或 $a\leqslant x<b$ 的实数 x 的集合，称为半开半闭区间，分别表示为 $(a,b],[a,b)$.

以上区间分别如图 1-1（a）～（d）所示.

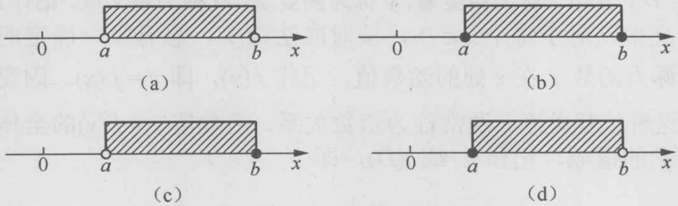

图 1-1

在图 1-1 中，用实心点表示包括在区间内的端点，用空心圈表示不包括在区间内的端点.

引入无穷大的记号 ∞，则以下各区间为无限区间：

$$(a,+\infty)=\{x|a<x<+\infty\}=\{x|x>a\};$$
$$[a,+\infty)=\{x|a\leqslant x<+\infty\}=\{x|x\geqslant a\};$$
$$(-\infty,b)=\{x|-\infty<x<b\}=\{x|x<b\};$$
$$(-\infty,b]=\{x|-\infty<x\leqslant b\}=\{x|x\leqslant b\};$$
$$(-\infty,+\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty\}=\{x|x\in\mathbf{R}\}.$$

应当注意的是，∞ 是一个记号，并不表示一个很大的数，且不能参与运算.

2. 邻域

邻域是一种特殊的开区间，也是一个经常用到的概念. 以点 a 为中心的任何开区间称为点 a 的邻域，记作 $U(a)$.

设 a 为给定的实数，δ 为正数，数集 $\{x\,\big|\,|x-a|<\delta\}$ 称为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$，如图 1-2 所示. 点 a 称为这个邻域的中心，δ 称为这个邻域的半径. 这个邻域去掉中心 a，称为点 a 的去心 δ 邻域，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$，即

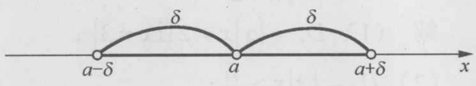

图 1-2

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x|0<|x-a|<\delta\}.$$

为了方便，有时把开区间 $(a-\delta,a)$ 称为点 a 的左 δ 邻域，把开区间 $(a,a+\delta)$ 称为点 a 的右 δ 邻域.

三、函数的概念

1. 函数概念

函数是描述变量间相互依赖关系的一种数学模型，具体有如下定义.

定义 设数集 $D\in R$，则称映射 $f:D\to R$ 为定义在 D 上的函数，通常简记为 $y=f(x)$，$x\in D$，其中 x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为定义域，记作 D_f，即 $D_f=D$.

函数定义中，对于每个 $x\in D$，按对应法则 f，总有唯一确定的值 y 与之对应，这个值称为函数 f 在 x 处的函数值，记作 $f(x)$，即 $y=f(x)$. 因变量 y 与自变量 x 之间的这种依赖关系，通常称为函数关系. 函数值 $y=f(x)$ 的全体所构成的集合称为函数 f 的值域，记作 R_f 或 $f(D)$，即

$$R_f=f(D)=\{y|y=f(x),x\in D\}.$$

若对于确定的 $x_0\in D$，通过对应规律 f，函数 y 有唯一确定的值 y_0 与之相对应，则称 y_0 为 $y=f(x)$ 在 x_0 处的函数值，记作 $y=y\big|_{x=x_0}=f(x_0)$.

例 1 判断下列各对函数是否相同.

（1） $f(x)=\ln x^2$， $g(x)=2\ln x$；

（2） $f(x)=1$， $g(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$；

（3） $f(x)=|x|$， $g(x)=\sqrt{x^2}$.

解 （1）中的 $f(x)$ 与 $g(x)$ 不相同，（2）、（3）中的 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相同.

例 2 求下列函数的定义域.

（1） $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-5x+6}+\sqrt[3]{4x+1}$；

（2） $f(x)=\log_2\log_7 x$；

（3） $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}+\dfrac{1}{x}$.

解 （1） $D_f=\{x|x\neq 2\text{且}x\neq 3\}$；

（2） $D_f=\{x|x>7\}$；

（3） $D_f=\{x|x\neq 0\text{且}x>-2\}$.

例 3 函数 $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1,\ x>0,\\ 0,\ x=0,\\ -1,\ x<0\end{cases}$

称为符号函数. 其定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，值域为 $R_f=\{-1,0,1\}$.

例 4 设 x 为任意实数，不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分. 记作 $[x]$. 函数

$$y=[x]$$

称为取整函数．其定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，值域为 $R_f=\mathbf{Z}$.

例如，$\left[\dfrac{2}{7}\right]=0$，$[\sqrt{2}]=1$，$[\pi]=3, [-2]=-2, [-3.2]=-4$.

2. 函数的几种特性

（1）函数的有界性．设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$，如果存在一个整数 M，使得对任意一个 $x\in I$，满足

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称 $y=f(x)$ 在 I 上有界；如果不存在这样的 M，则称 $y=f(x)$ 在 I 上无界．

函数 $f(x)$ 在 I 上有界，则当 $x\in I$ 时，曲线 $y=f(x)$ 必介于两条平行线 $y=M$ 与 $y=-M$ 之间（见图 1-3）．

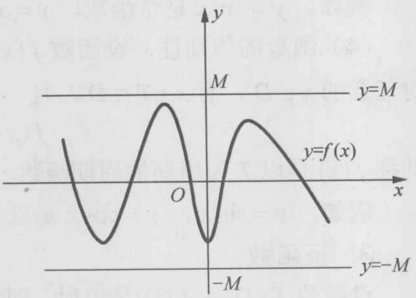

图 1-3

例如，函数 $y=\cos x$，对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，都有不等式 $|\cos x|\leqslant 1$ 成立，所以 $y=\cos x$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的有界函数．

又如，$y=\dfrac{1}{x}$ 在 $[1,2]$ 上有界，在 $(0,1)$ 上无界．

（2）函数的单调性．设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$，如果对于区间 I 上任意两点 x_1,x_2，当 $x_1<x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的．

如果对于区间 I 上任意两点 x_1,x_2，当 $x_1>x_2$ 时，恒有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的．

单调增加函数，其相应的曲线随 x 增大而上升，如图 1-4 所示；单调减少函数，其相应的曲线随 x 增大而下降，如图 1-5 所示．

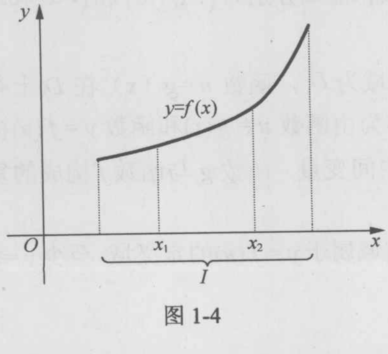

图 1-4

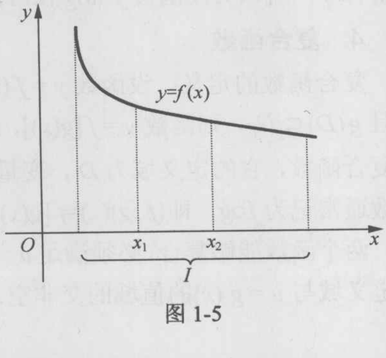

图 1-5

例如，$y=x^2$在$[-1,0]$上单调减少，在$(0,1)$上单调增加，在$(-\infty,+\infty)$上不是单调的.

（3）函数的奇偶性．设函数$f(x)$的定义域D关于原点对称，如果对于任意$x\in D$，恒有

$$f(-x)=f(x),$$

则称$f(x)$为偶函数．如果对于任意$x\in D$，恒有

$$f(-x)=-f(x),$$

则称$f(x)$为奇函数.

例如，$y=\sin x$是奇函数，$y=x^2$是偶函数，$y=x^3+1$是非奇非偶函数.

（4）函数的周期性．设函数$f(x)$的定义域为D，如果存在一个整数T，使得对任意的$x\in D$，有$x\pm T\in D$，且

$$f(x+T)=f(x),$$

则称$f(x)$是以T为周期的周期函数.

例如，$y=\sin x$，$y=\cos x$是以2π为周期的函数.

3. 反函数

设函数$f:D\to f(D)$是单射，则它存在逆映射$f^{-1}:f(D)\to D$，称此映射f^{-1}为函数f的反函数.

按此定义，对每个$y\in f(D)$，有唯一的$x\in D$，使得$f(x)=y$，于是有$f^{-1}(y)=x$. 这就是说，反函数f^{-1}的对应法则是完全由函数f的对应法则所确定的．由于函数的实质是对应法则，只要对应法则不变，自变量和因变量用什么字母并无关系，通常按习惯用y表示因变量，用x表示自变量，而将$y=(x)$的反函数记作$y=f^{-1}(x)$.

例如，函数$y=x^3+1$的反函数$x=\sqrt[3]{y-1}$，通常记作$y=\sqrt[3]{x-1}$.

例5 求函数$y=3^x-1$的反函数，并确定反函数的定义域和值域.

解 由$y=3^x-1$的反函数$x=\log_3(y+1)$，变换x、y的位置，得函数$y=3^x-1$的反函数为$y=\log_3(x+1)$；由于函数$y=3^x-1$的定义域和值域分别为$(-\infty,+\infty)$和$(-1,+\infty)$，所以其反函数$y=\log_3(x+1)$的定义域和值域分别为$(-1,+\infty)$和$(-\infty,+\infty)$.

4. 复合函数

复合函数的定义：设函数$y=f(u)$的定义域为D_1，函数$u=g$（x）在D上有定义且$g(D)\subset D_1$，则函数$y=f[g(x)]$，$x\in D$，称为由函数$u=g(x)$和函数$y=f(u)$构成的复合函数，它的定义域为D，变量u称为中间变量．函数g与函数f构成的复合函数通常记为$f\circ g$，即$(f\circ g)(x)=f[g(x)]$.

两个函数能够复合，必须满足$u=g(x)$的值域属于$y=f(u)$的定义域，至少$y=f(u)$的定义域与$u=g(x)$的值域的交非空.

例如，由 $y=2^u$ 和 $u=\sin x$ 构成的复合函数为 $y=2^{\sin x}$，由 $y=u^3$ 和 $u=\dfrac{x-1}{x+2}$ 构成复合函数 $y=\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)^3$ 等.

应当注意，不是任意几个函数都能够构成复合函数．例如，$y=\arcsin u$ 与 $u=x^2+3$ 就不能构成复合函数. 因为 u 的值域 $[3,+\infty)$ 与 $y=\arcsin u$ 的定义域 $[-1,1]$ 的交集为空集（没有公共部分），所以 $y=\arcsin(x^2+3)$ 毫无意义.

例 6 将下列函数分解为几个简单函数.

（1） $y=(\arctan\sqrt{x})^2$；（2） $y=\ln(1+\sin^2 x)$.

解 （1）可以分解为 $y=u^2$，$u=\arctan v$，$v=\sqrt{x}$；

（2）可以分解为 $y=\ln u$，$u=1+v^2$，$v=\sin x$.

5. 基本初等函数

在高等数学中研究函数，基本初等函数有着重要的地位．常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数这 6 类函数，称为基本初等函数.

常值函数：函数 $y=c$（c 为常数）；

幂函数：$y=x^\mu$（μ 是常数）；

指数函数：$y=a^x$（$a>0$ 且 $a\neq1$），如图 1-6、图 1-7 所示；

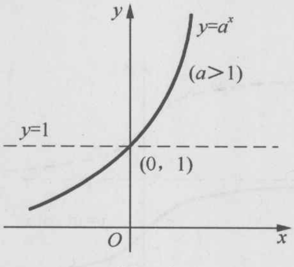

图 1-6

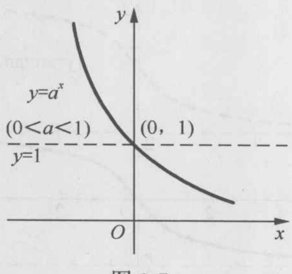

图 1-7

对数函数：$y=\log_a x$（$a>0$ 且 $a\neq1$）．特别当 $a=\mathrm{e}$ 时，记为 $y=\ln x$）．如图 1-8、图 1-9 所示；

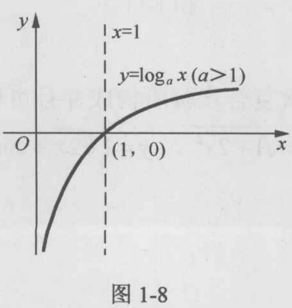

图 1-8

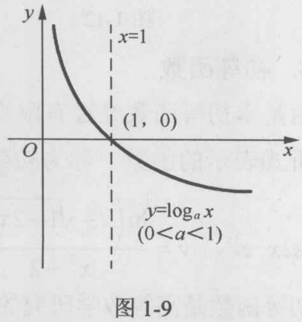

图 1-9