普通高等教育"十二五"规划教材

线性代数

（第二版）

杨万才 主编

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}, \quad A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}$$

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

线性代数

（第二版）

杨万才　主　编

李二强　李培峦　李小朝　副主编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书内容主要包括导论、行列式、矩阵、线性方程组、特征值与特征向量、二次型、线性空间与线性变换、线性方程组与矩阵特征值的数值解法、MATLAB软件应用，以及常见的线性代数模型，共10章. 书中每章配有习题，且编有总结，书末附有习题答案，以便读者预习和自学.

本书可作为普通高等院校的工科类、非数学专业的理科类、经济类、管理类、农学类的本科生学习线性代数课程的教材，也可作为教师的教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数 / 杨万才主编. —2版. —北京 ：科学出版社，2013. 4
普通高等教育"十二五"规划教材
ISBN 978-7-03-037276-5

Ⅰ. 线… Ⅱ. 杨… Ⅲ. 线性代数 Ⅳ. O151. 2

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第071615号

责任编辑：昌　盛　胡海霞 / 责任校对：邹慧卿
责任印制：阎　磊 / 封面设计：迷底书装

科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
骏杰印刷厂印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2008年8月第 一 版　开本：720×1000　B5
2013年4月第 二 版　印张：15 1/4
2013年4月第五次印刷　字数：332 000

定价：27.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

教育部颁布实施的《普通高中数学课程标准》(简称高中新课标)，已贯穿于全国普通高中新课程教学中，河南省于 2008 年起普遍使用于普通高中的数学课程教学. 新课标中的教学要求已涵盖了部分大学数学课程的知识，以至于目前大学数学教学与高中新课标培养出来的入校学生(2011 级始)基础不相适应，高校教师的大学数学教学遇到了困难和问题. 鉴于此种现状，河南省教育厅高教处、基础教育教学研究室，郑州大学，河南科技大学等单位针对新课标实施后大学数学的教学改革召开了座谈会、研讨会，并以河南省教育教学改革立项形式开展了研究. 河南省数学会的教学、科研研讨会上，不少专家、教授对此问题发表了看法，并提出了改革意见. 通过多种形式的会议研讨及意见征询，大家普遍认为高等数学、线性代数、概率论与数理统计是大学理、工、经、管、农、医等学科专业的必修基础课，也是大学数学教学与高中新课标教学联系最为紧密的课程，所以这三门公共基础数学的课程体系、教学内容及教学要求必须与中学数学教学接轨，否则在各高校课程教学学时减少的情况下，会产生时间上的浪费及教学效果的低下，不利于因材施教、人才培养，影响教学质量的提高. 因此，这三门课程的教材建设是一个十分紧迫而又重要的工作，是大学数学教学改革的核心问题之一.

本书第二版是在线性代数的课程体系、教学内容及教学要求与高中新课标接轨的情况下编写而成的. 编写的基本指导思想和目的是：以教育部数学教学指导委员会制定的线性代数教学体系、教学内容、教学基本要求为指导，以做好与中学新课标的衔接为原则，以现行的教学大纲、教学要求为基础，以兼顾部分学生继续深造的入学要求为基本点，以为教师、学生提供一套使用方便、适于现实教学的良好教材为目的. 编写中基本保留了第一版的编写风格和内容框架，对第一版中涉及的与中学数学内容重复的知识点做了较大修改，其中 Mathematica 软件应用改为第 9 章 MATLAB 软件应用，例题、习题也做了精选、调整和补充. 为便于学生了解线性代数课程的基本知识，作为知识背景增加了导论一章，对相关知识给予直观的几何解释，为后继章节起着引导和铺垫作用. 为帮助学生系统掌握每章知识，提高学习效果，增加了每章小结.

参加本书编写的有杨万才(第 5，6 章)，李二强(第 1，2，3，10 章)，李培峦(第 7，

8,9章),李小朝(第4章及全书习题答案).其中,杨万才教授担任主编,李二强、李培峦、李小朝担任副主编.郑州大学、河南理工大学、河南工业大学、许昌学院、华北水利水电学院、郑州轻工业学院、洛阳师范学院、安阳师范学院、周口师范学院、洛阳理工学院、黄淮学院等高校同仁为本书的编写提出了一些意见和建议,科学出版社的编辑为本书的出版付出了辛勤劳动,对此我们表示衷心感谢.

由于编者水平有限,加之时间仓促,书中定有一些不当之处,恳请各位读者能惠予批评,不吝赐教.

编　者

2012年7月

目 录

第1章 导 论

线性代数源于欧几里得(Euclid,约公元前330～前275)几何、解析几何及线性方程组理论. 随着数学抽象水平的提高及公理化方法的发展,佩亚诺(Peano,1858～1932)于1888年第一次提出了实数域上的线性空间(向量空间)的公理化定义. 20世纪中叶以后,线性空间的公理化定义得到普遍认可. 现在线性代数作为数学的一个分支,主要研究线性空间及它们之间的线性映射,理论颇为抽象;此外,随着计算机的普及,这些抽象的理论结果得到了广泛而实际的应用.

n维欧几里得空间$\mathbf{R}^n$是线性空间的基本模型. 由于$\mathbf{R}^2$,$\mathbf{R}^3$中的向量及运算有鲜明的几何意义,领悟它们的基本特性对于摹想抽象的有限维线性空间不无裨益. 本章以$\mathbf{R}^2$为背景介绍线性代数的一些基本概念.

1.1 $\mathbf{R}^2$的线性变换

1.1.1 线性空间$\mathbf{R}^2$

考虑集合$\mathbf{R}^2=\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(a_1,a_2)\mid a_1,a_2\in\mathbf{R}\}$. 在$\mathbf{R}^2$中定义两种运算:

向量的加法:

$$(a_1,a_2)+(b_1,b_2)=(a_1+b_1,a_2+b_2); \tag{1.1}$$

数与向量的乘法(数量乘法):

$$k(a_1,a_2)=(ka_1,ka_2),\quad k\in\mathbf{R}. \tag{1.2}$$

配置了加法和数量乘法运算的集合$\mathbf{R}^2$就构成实数域上的**线性空间**,仍记作$\mathbf{R}^2$,并将其中的元素称为**向量**. 通常用黑体希腊字母$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\cdots$表示向量.

$\mathbf{R}^2$中的加法和数量乘法运算满足下列运算律(设$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}\in\mathbf{R}^2,k,l\in\mathbf{R}$).

(1)$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$;

(2)$(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$;

(3)在$\mathbf{R}^2$中存在零元(记作$\mathbf{0}$),满足对于任何$\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{R}^2$,都有$\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=$

(4)对任何 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{R}^2$，存在唯一的 $\boldsymbol{\beta}\in\mathbf{R}^2$，使得 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$，称此 $\boldsymbol{\beta}$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的负元，记作$\boldsymbol{\beta}=-\boldsymbol{\alpha}$；

(5)$1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$；

(6)$k(l\boldsymbol{\alpha})=(kl)\boldsymbol{\alpha}$；

(7)$(k+l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}$；

(8)$k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}$.

注　(i)零元(也称为零向量)是$(0,0)$，而 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2)$的负元是$(-a_1,-a_2)$，定义向量的减法 $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\beta})$.

(ii)在中学，我们把既有大小、又有方向的量称为向量，并用有向线段表示向量. 在平面直角坐标系 xOy 中，以 $A(a_1,a_2)$为起点、$B(b_1,b_2)$为终点的平面向量记为$\overrightarrow{AB}$. 如果$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{AB}$，则 M 点坐标为(b_1-a_1,b_2-a_2). 将平面向量$\overrightarrow{AB}$对应于 $\mathbf{R}^2$ 中向量(b_1-a_1,b_2-a_2)，即把对应向量的起点置于坐标原点时向量终点的坐标(图 1-1). 以后，说到 $\mathbf{R}^2$ 中向量(向量集)对应的点(点集)总是在此对应下理解.

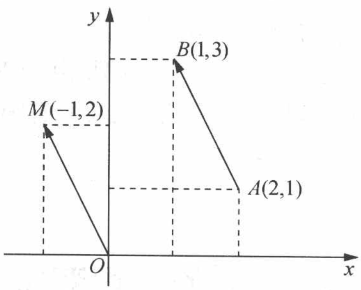

图 1-1　平面向量与 $\mathbf{R}^2$ 的对应

(iii)有时也把平面向量写成一列，即考虑集合$\left\{\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}\middle| a_1,a_2\in\mathbf{R}\right\}$. 类似的定义加法和数量乘法运算分别为

$$\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\end{pmatrix},\tag{1.3}$$

$$k\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ka_1\\ka_2\end{pmatrix},\quad k\in\mathbf{R}.\tag{1.4}$$

它们也满足运算律(1)～(8)，仍用 $\mathbf{R}^2$ 表示此集合，称其元素为**列向量**. 以后总是讨论列向量.

定义 1.1　设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in\mathbf{R}^2$. 若存在实数 $k\in\mathbf{R}$，使得 $\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\beta}$，或存在实数 $l\in\mathbf{R}$，使得 $\boldsymbol{\beta}=l\boldsymbol{\alpha}$，则称 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ **线性相关**，否则称 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ **线性无关**.

定义 1.2　设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in\mathbf{R}^2$. 若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性无关，则称 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为 $\mathbf{R}^2$ 的**基**.

定理 1.1　设 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性相关的充分必要条件是

$$a_1b_2-b_1a_2=0.$$

定理 1.2 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $\mathbf{R}^2$ 的基,则对于任何 $\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{R}^2$,存在唯一的一对实数 $k_1,k_2\in\mathbf{R}$,使得 $\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2$.

注 称定理 1.2 中的 k_1,k_2 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 下的**坐标**,记作 $\begin{pmatrix}k_1\\k_2\end{pmatrix}$. 又由于 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}=a_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$,故 $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$ 本身可以看成在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\varepsilon}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 下的坐标. 以后总是用 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2$ 表示 $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 这组基. 关于基与坐标更深入的概念将在第 4 章、第 7 章中介绍.

1.1.2 $\mathbf{R}^2$ 的线性变换

对于轴对称平面图形 F,如果将 y 轴置于其对称轴上建立直角坐标系,那么图形 F 关于 y 轴对称等价于在映射 σ: $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}-x\\y\end{pmatrix}$ 下 F 的像集为其自身,即 $\sigma(F)=F$(图 1-2). 这表明取定 $\mathbf{R}^2$ 的基后,可以通过代数方法研究几何问题. 下面讨论 $\mathbf{R}^2$ 到自身的一类特殊的映射.

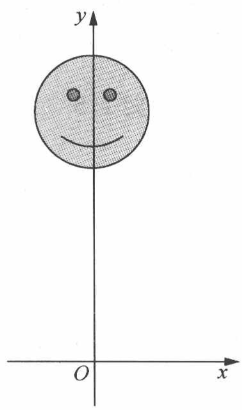

图 1-2　轴对称图形

定义 1.3 称映射 $\sigma:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ 为 $\mathbf{R}^2$ 的一个线性变换,若对任意 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in\mathbf{R}^2$ 及任意实数 $k\in\mathbf{R}$,成立

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\sigma(\boldsymbol{\alpha})+\sigma(\boldsymbol{\beta}),\tag{1.5}$$

$$\sigma(k\boldsymbol{\alpha})=k\sigma(\boldsymbol{\alpha}).\tag{1.6}$$

例 1.1 设 c 为任意给定的实数,映射 $\sigma:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$,$\sigma(\boldsymbol{\alpha})=c\boldsymbol{\alpha}$ 为 $\mathbf{R}^2$ 的线性变换.

证明 对任意 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in\mathbf{R}^2$,有

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=c(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=c\boldsymbol{\alpha}+c\boldsymbol{\beta}=\sigma(\boldsymbol{\alpha})+\sigma(\boldsymbol{\beta});$$

又对任意实数 $k\in\mathbf{R}$,

$$\sigma(k\boldsymbol{\alpha})=c(k\boldsymbol{\alpha})=(ck)\boldsymbol{\alpha}=(kc)\boldsymbol{\alpha}=k(c\boldsymbol{\alpha})=k\sigma(\boldsymbol{\alpha}).$$

称此变换为由 c 决定的**数乘变换**. 当 $c=1$ 时称为**恒等变换**,当 $c=0$ 时称为**零变换**.

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $\mathbf{R}^2$ 的基,$\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2$. 若 σ 为 $\mathbf{R}^2$ 的线性变换,则

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\sigma(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2)=\sigma(k_1\boldsymbol{\alpha}_1)+\sigma(k_2\boldsymbol{\alpha}_2)=k_1\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1)+k_2\sigma(\boldsymbol{\alpha}_2).\tag{1.7}$$

可见线性变换 σ 由其对基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 的作用完全决定.

取 $\mathbf{R}^2$ 的基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\boldsymbol{\varepsilon}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. 若设

$$\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_1)=a_{11}\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_{21}\boldsymbol{\varepsilon}_2=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\end{pmatrix},$$

$$\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_2)=a_{12}\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_{22}\boldsymbol{\varepsilon}_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\end{pmatrix},\tag{1.8}$$

则对于任意 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$，有

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha})=x\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_1)+y\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_2)=x\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}x+a_{12}y\\a_{21}x+a_{22}y\end{pmatrix}.\tag{1.9}$$

由式(1.8)及式(1.9)可知，当取定基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2$ 后，线性变换 σ 完全由两个向量 $\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_1),\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_2)$ 决定，且把 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ 对应到 $\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\begin{pmatrix}a_{11}x+a_{12}y\\a_{21}x+a_{22}y\end{pmatrix}$.

定义 1.4　称两行两列的数表 $\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}$ 为**二阶矩阵**，其中 $a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$ 称为**矩阵的元素**，记作 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$. 通常用大写的英文字母 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\cdots$表示矩阵. 本书重点讨论 a_{ij} 为实数的矩阵，这样的矩阵称为**实矩阵**.

定义 1.5　设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$，规定矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的乘积为向量 $\begin{pmatrix}a_{11}x+a_{12}y\\a_{21}x+a_{22}y\end{pmatrix}$，记作 $\boldsymbol{A\alpha}$ 或 $\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$，即

$$\boldsymbol{A\alpha}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}x+a_{12}y\\a_{21}x+a_{22}y\end{pmatrix}.\tag{1.10}$$

定义 1.6　设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $\mathbf{R}^2$ 的基，σ 为 $\mathbf{R}^2$ 的线性变换. 若

$$\begin{aligned}\sigma(\boldsymbol{\alpha}_1)&=a_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{21}\boldsymbol{\alpha}_2,\\\sigma(\boldsymbol{\alpha}_2)&=a_{12}\boldsymbol{\alpha}_1+a_{22}\boldsymbol{\alpha}_2,\end{aligned}\tag{1.11}$$

则称 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}$ 为线性变换 σ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 下的**矩阵**.

注　若线性变换 σ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{A}$，则 $\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{A\alpha}$.

若 σ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{\alpha}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 下的坐标为 $\begin{pmatrix}k_1\\k_2\end{pmatrix}$，则 $\sigma(\boldsymbol{\alpha})$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 下的坐标为 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\end{pmatrix}$.

这样就实现了用二阶矩阵与向量乘积表示线性变换的目的，也就是说 $\mathbf{R}^2$ 的线性变换在指定基下表现为二阶矩阵与向量的乘积.

例 1.2　求由 c 决定的数乘变换、恒等变换及零变换在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2$ 下的矩阵.

解　由数乘变换的定义知 $\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_1)=c\boldsymbol{\varepsilon}_1=\begin{pmatrix}c\\0\end{pmatrix}$，$\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_2)=c\boldsymbol{\varepsilon}_2=\begin{pmatrix}0\\c\end{pmatrix}$，从而数乘变换

在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2$ 下的矩阵为 $\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$，特别地，恒等变换在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2$ 下的矩阵为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，零变换在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2$ 下的矩阵为 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

例 1.3　线性变换 $\boldsymbol{R}_\theta:\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 把每个向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 逆时针旋转 θ 角，故此变换称为 $\mathbf{R}^2$ 的**旋转变换**. 事实上，设 A 点的极坐标为 (r,φ)，则 $x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$，从而

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r\cos\theta\cos\varphi - r\sin\theta\sin\varphi \\ r\sin\theta\cos\varphi + r\cos\theta\sin\varphi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r\cos(\varphi+\theta) \\ r\sin(\varphi+\theta) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

例 1.4　设 $\boldsymbol{A}$ 是二阶矩阵，$\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\in\mathbf{R}^2$，$k$ 为任意实数，则

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta},$$
$$\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{\alpha})=k(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}).$$

证明　直接计算可得.

1.1.3　$\mathbf{R}^2$ 的线性变换的性质

定理 1.3　设 $\sigma:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ 为 $\mathbf{R}^2$ 的一个线性变换，在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$，则下列三条等价.

(1) σ 为一一映射；

(2) σ 只把零向量 $\mathbf{0}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 映为 $\mathbf{0}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$；

(3) $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$.

证明略.

定理 1.4　设 $\sigma:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ 为 $\mathbf{R}^2$ 的一个线性变换，在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$，且 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$，则线性变换 σ 把 $\mathbf{R}^2$ 上的直线映为直线.

证明　任取平面上一直线 l 以及 l 上不同的两点 $A(a_1,a_2)$，$B(b_1,b_2)$. 记 $\boldsymbol{\alpha}=\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix} b_1-a_1 \\ b_2-a_2 \end{pmatrix}$，则直线（看成向量终点的集合）$l$ 为

$$\{\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}\mid k\in\mathbf{R}\}. \tag{1.12}$$

从而,直线 l 的像集合 $\sigma(l)$ 为

$$\sigma(l)=\{\sigma(\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta})\mid k\in\mathbf{R}\}=\{\sigma(\boldsymbol{\alpha})+k\sigma(\boldsymbol{\beta})\mid k\in\mathbf{R}\}. \tag{1.13}$$

又由定理 1.3 知 σ 为一一映射,从而 $\sigma(\boldsymbol{\alpha})\neq\sigma(\boldsymbol{\beta})$,故 $\sigma(l)$ 是由向量 $\sigma(\boldsymbol{\alpha}),\sigma(\boldsymbol{\beta})$ 的终点确定的直线.

例 1.5　设线性变换 σ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2$ 下的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&2\\1&4\end{pmatrix}$,求正方形区域 $\{x\boldsymbol{\varepsilon}_1+y\boldsymbol{\varepsilon}_2\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$ 在线性变换 σ 下的像.

解　由题意知 $\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_1)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\varepsilon}_1=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$,$\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_2)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\varepsilon}_2=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$,又

$$\{\sigma(x\boldsymbol{\varepsilon}_1+y\boldsymbol{\varepsilon}_2)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}=\{x\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_1)+y\sigma(\boldsymbol{\varepsilon}_2)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\},$$

故所求像集为平行四边形所围区域(图 1-3)

$$\left\{x\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}\,\middle|\,0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\right\}.$$

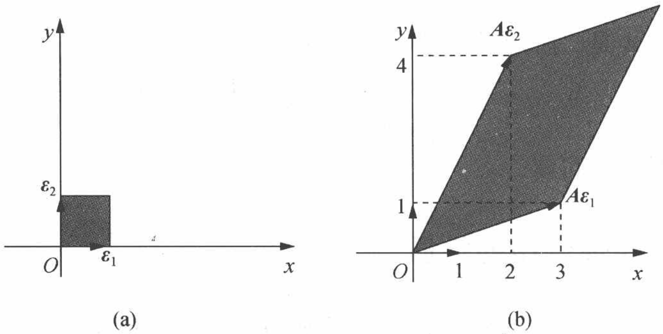

图 1-3　单位正方形及其在线性变换 σ 下的像

1.2　二阶行列式的几何意义

定义 1.7　二阶行列式定义为

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}. \tag{1.14}$$

定义 1.8　称 $\sqrt{a_1^2+a_2^2}$ 为向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$ 的**长度(范数)**,记作 $\|\boldsymbol{\alpha}\|$. 长度为 1 的向量称为**单位向量**. 向量 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 之间的**距离**定义为 $\|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}\|$.

定义 1.9　以 $\boldsymbol{\alpha}=\overrightarrow{OA},\boldsymbol{\beta}=\overrightarrow{OB}$ 为邻边的平行四边形的**有向面积**定义为 $S(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\|\boldsymbol{\alpha}\|\,\|\boldsymbol{\beta}\|\sin(\varphi-\theta)$,其中 φ,θ 分别为点 B,点 A 的极角(图 1-4).

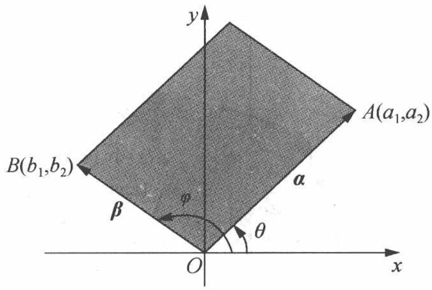

图 1-4 平行四边形的有向面积

例 1.6 设 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$,求证:$S(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\end{vmatrix}$.

证明 若$\|\boldsymbol{\alpha}\|\cdot\|\boldsymbol{\beta}\|=0$,结论显然正确. 下面考虑$\|\boldsymbol{\alpha}\|\neq0$,$\|\boldsymbol{\beta}\|\neq0$的情形. 如图1-4所示,点$A$,点$B$的极坐标分别为$A(\|\boldsymbol{\alpha}\|,\theta)$,$B(\|\boldsymbol{\beta}\|,\varphi)$,故

$$a_1=\|\boldsymbol{\alpha}\|\cos\theta,\quad a_2=\|\boldsymbol{\alpha}\|\sin\theta,\quad b_1=\|\boldsymbol{\beta}\|\cos\varphi,\quad b_2=\|\boldsymbol{\beta}\|\sin\varphi.$$

从而

$$\begin{aligned}S(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})&=\|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|\sin(\varphi-\theta)=\|\boldsymbol{\alpha}\|\|\boldsymbol{\beta}\|(\sin\varphi\cos\theta-\cos\varphi\sin\theta)\\&=a_1b_2-b_1a_2=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\a_2 & b_2\end{vmatrix}.\end{aligned}$$

由例1.5知,若$\mathbf{R}^2$的线性变换σ在基$\boldsymbol{\varepsilon}_1$,$\boldsymbol{\varepsilon}_2$下的矩阵为$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$,则单位正方形像集的面积为$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$的绝对值.

一般地,设D为平面上一个面积有限的区域,记其像集为$\sigma(D)=\{\sigma(\boldsymbol{\alpha})\mid\boldsymbol{\alpha}\in D\}$. 我们对$\sigma(D)$的面积与$D$的面积相对比有何变化感兴趣.

定理 1.5 设$\sigma:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$为$\mathbf{R}^2$的一个线性变换,它在基$\boldsymbol{\varepsilon}_1$,$\boldsymbol{\varepsilon}_2$下的矩阵为$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$,且$\det(a_{ij})=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\neq0$. D为平面上一简单光滑闭曲线所围的有界闭区域,记D的面积为$\mathrm{Area}(D)$,$\sigma(D)$的面积为$\mathrm{Area}(\sigma(D))$,则

$$\mathrm{Area}(\sigma(D))=|\det(a_{ij})|\mathrm{Area}(D).$$

证明 为简单起见,设D的边界曲线C为$x=x(t)$,$y=y(t)$,$t\in[a,b]$,且随着t的增加给出C的正向(图1-5). 由格林公式知

$$\mathrm{Area}(D)=\frac{1}{2}\oint_C x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_a^b\begin{vmatrix}x(t) & x'(t)\\y(t) & y'(t)\end{vmatrix}\mathrm{d}t.$$

$\sigma(D)$的边界$\widetilde{C}$为

$$X=a_{11}x(t)+a_{12}y(t),\quad Y=a_{21}x(t)+a_{22}y(t),$$

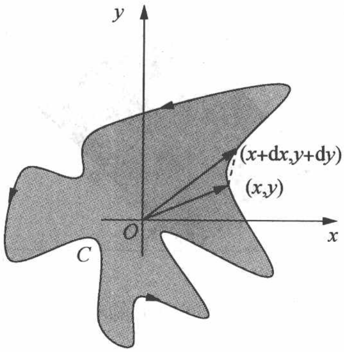

图 1-5　光滑简单闭曲线所围区域的面积

$t\in[a,b]$，从而

$$\begin{aligned}\mathrm{Area}(\sigma(D)) &= \left|\frac{1}{2}\oint_{\tilde{C}} X\mathrm{d}Y - Y\mathrm{d}X\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|\int_a^b \begin{vmatrix} a_{11}x(t)+a_{12}y(t) & a_{11}x'(t)+a_{12}y'(t) \\ a_{21}x(t)+a_{22}y(t) & a_{21}x'(t)+a_{22}y'(t)\end{vmatrix}\mathrm{d}t\right| \\ &= |\det(a_{ij})|\frac{1}{2}\int_a^b \begin{vmatrix} x(t) & x'(t) \\ y(t) & y'(t)\end{vmatrix}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

1.3　特征值与特征向量

在平面直角坐标系 xOy 中，关于直线 $x-y=0$ 的反射 σ 是一个线性变换，且 σ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. 从几何上看，直线 $x-y=0$ 上的向量在线性变换 σ 下不变，而直线 $x+y=0$ 上的向量在线性变换 σ 下变为其负元(从而仍在此直线上)，即

$$\sigma\begin{pmatrix}k\\ k\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}k\\ k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k\\ k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k\\ k\end{pmatrix},$$

$$\sigma\begin{pmatrix}-k\\ k\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}-k\\ k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-k\\ k\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}-k\\ k\end{pmatrix}.$$

作为集合两条直线在线性变换 σ 下不变. 记 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$，则线性变换 σ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$(图 1-6).

对于一般的线性变换 σ，有没有直线在 σ 的作用下保持不变呢？若设线性变换 σ 在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{A}$，此时 $\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$，从而 $\sigma(\boldsymbol{\alpha})=\lambda\boldsymbol{\alpha}$，即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$. 为此，给出矩阵的特征值、特征向量的定义.

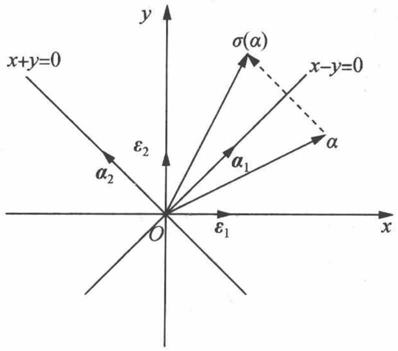

图 1-6　关于直线的反射变换

定义 1.10　对二阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$，如果存在数 λ 以及非零向量 $\boldsymbol{\xi}$，使得

$$\boldsymbol{A\xi}=\lambda\boldsymbol{\xi},\tag{1.15}$$

则称 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个**特征值**，$\boldsymbol{\xi}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 λ 的一个**特征向量**.

设定义中 $\boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$，则式(1.15)即

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix},\tag{1.16}$$

也就是

$$\begin{cases}(\lambda-a_{11})x-a_{12}y=0,\\ -a_{21}x+(\lambda-a_{22})y=0.\end{cases}\tag{1.17}$$

由于方程组(1.17)有非零解的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22}\end{vmatrix}=0,\tag{1.18}$$

即

$$\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})=0,\tag{1.19}$$

称关于 λ 的一元二次方程(1.19)为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**特征方程**. 若 λ_1,λ_2 是特征方程的两个实根，则将 $\lambda=\lambda_1,\lambda=\lambda_2$ 分别代入方程组(1.17)，分别求出它们的非零解，就得到相应的特征向量.

定理 1.6　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$，$\lambda_1,\lambda_2$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个特征值，则

(1) $\lambda_1+\lambda_2=a_{11}+a_{22}$，$\lambda_1\lambda_2=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$；

(2)若 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 分别是 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 λ_1,λ_2 的特征向量且 $\lambda_1\neq\lambda_2$，则 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2$ 线性无关；