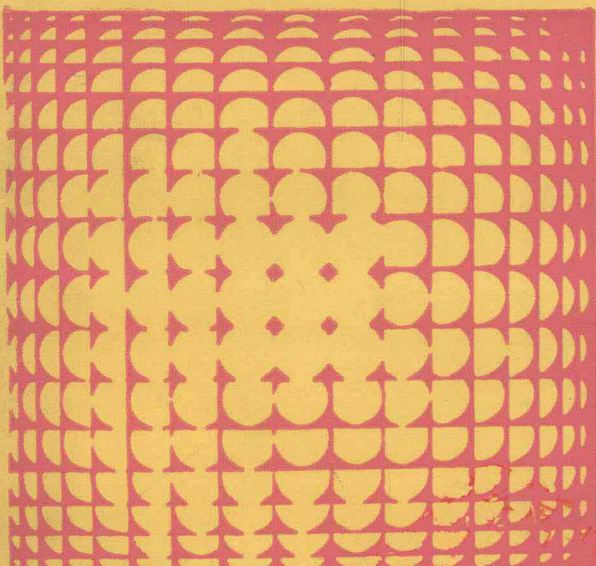
九年制义务教育初中数学读物

主编 罗四维 杨泰良

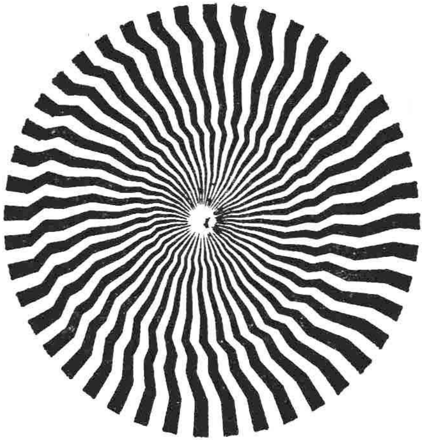
方程组

李光忠



四川教育出版社

九年制义务教育初中数学读物



主编 罗四维 杨泰良

方程组

李光忠

四川教育出版社
一九九二年二月·成都

前言

这套读物主要是为初中学生而写的．我们当然希望，这套书对于执教中学数学的老师们也非常适用．

中学生的书包已经很沉了，在推出这套读物之前，我们已深有感触．作为教师和家长，我们常见到孩子们老是摆弄他们那些堆积如丘的题集，并深埋其间．书店里又似乎难于使这些小读者们满意地挑出几本自己真正喜爱的数学图书，这无疑是一桩憾事．在今天，在大力倡导“素质教育”、“公民教育”的九年制义务教育的时代要求下，该做些什么呢？

我们主张激励学生学习的自发因素，让孩子们在志趣的牵引下主动、愉快地学习；主张开阔学生的知识视界，让他们能见多识广；主张启动学生的高级心理活动，发展他们的思维能力和认识能力．为此，编写一些有益于启迪学生智力、开拓知识视野、激发学习兴趣、加深对课本知识理解的数学读物是十分必要的．这就是编写这套读物的初衷．

这套书是按知识专题来编写的（个别册子除外）．各专题都紧扣九年制义务教育初中数学课本的基础知识，并适当加深、拓广，联系知识的产生及其发展过程，揭示知识之间的内在联系，着重分

析内容反映的数学思想、原理、方法和实际应用。本书注重取材的新颖、叙述的生动、思想方法的引导，力求能适应初中不同层次学生的需要，能为九年制义务教育的发展起积极的配合和促进作用．我们也编拟了适量的练习题，以巩固、加深对课本知识的理解掌握，也提供一部分给学有余力或热心参加数学竞赛的学生选用．

我们的意愿未必能都形诸于笔端，呈现给读者的这套图书，尚祈请各方指正．

本套读物由杨泰良、罗四维修改、统稿．

1992年2月

目录

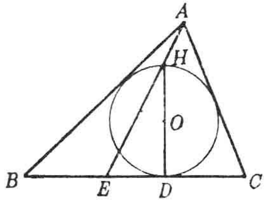
有奖征解题的启示

学校《初中数学园地》的一组有奖征解题，引起了学生们的极大兴趣．这组题是：

1．解方程$\sqrt[4]{96-x}+\sqrt[4]{x+1}=5$．

2．设a、b、c、d都是正整数，且$a^5=b^4$，$c^3=d^2$，$c-a=19$，求$d-b$．

3．如图，$\triangle ABC$的内切圆O与BC切于D，DH为$\odot O$的直径，连结AH延长交BC于E，求证$BE=CD$．



这些题似乎并没有难倒那些喜欢上了“数学这家伙”的学生，他们研究起数学来总是那么津津有味，乐此不疲．这次在规定时间内，解对至少一个题的就有47人．遗憾的是，三个题全部解答正确的获奖学生只有2人．

面对答案，同学们惊奇地发现，这三个题居然都是用列方程组解出来的！

张老师在把精致的笔记本和少年读物丛书发给获奖学生的时候，告诫同学们说：“解数学题与学习数学一样，需要掌握和运用数学的思想和方法．

从这些题的解答中，我们可以看到，方程组确实是解答数学问题的有力工具．这几个题若采用常规解法难度较大，有的同学就是因此中途受挫．第一题若化成一般四次方程是很难求解的，第三题若直接用几何方法证明，很不容易找到已知和结论的联系，为此曾使不少人大伤脑筋．而用设辅助未知数的方法，列出方程组，可顺利沟通已知与结论的联系，从而使问题得到解决．在这里，引入中间变量代换的转化思想，列方程组沟通数量关系的思想和方法，都是基本而重要的数学思想方法．掌握并恰当运用这种思想方法，会进一步提高我们的解题能力，为今后继续学习打好基础．”

※　　※　　※

我们抄录了这几个题，并在本书中作了详细解答．看来，对方程组值得作一番探讨．

回顾历史，方程组作为重要的数学内容，很早就为世界几大文明古国所研究，其中我国的研究更为突出．早在约两千年前（西汉末东汉初）成书的数学专著《九章算术》中，第八章《方程》，就专门研究方程组问题．这里的“方程”和现在的方程不是一个意思，它指的是多个未知数的方程组．在“方程”章里，共有十八道一次方程组问题．其中有二元的八道，三元的六道，四元、五元的各二道．其解法为“直除”法，它与现在的加减消元法在理论和步骤上完全一致．这种思想方法，比欧洲至少早一千多年．至于多元高次方程组，在宋、元

时期，我国数学家就创造了解某些二、三、四元高次方程组的消元法．在西方，直到1779年，法国数学家培祖才有这方面的研究，比我国晚了近五百年．在不定方程组的研究方面，我国也最早，成绩也很突出．如《九章算术》中记载的不定方程组问题“五家共井”，比西方研究不定方程著名的丢番都还早二百多年．我国数学家创立的不定方程组的一些解法，如“孙子算法”、“大衍求一术”，不但在我国古代有名，在世界也有相当地位，被称为“中国剩余定理”．

本书是对初中所学方程组的总结和深化．第一、二两部分，包括第三部分一些内容，是初中方程组的概括和总结，希望能帮助大家系统理解教材，掌握所学知识．第三、四、五部分，是在教材基础上，适当拓广、综合、提高．特别是第四、五部分，以方程组为纵线，综合了初中代数、几何的有关内容和一些重要的解题思想方法．其中一些例题（包括一些习题）是国内外数学竞赛题．因此，本书可供初中不同程度的学生阅读．对于需要充实加强基础的，可阅读前面第一、二、三部分；对于希望进一步提高，或参加数学竞赛的，可继续阅读第四、五部分．总之，你可以根据自己的实际情况，选择所需要的部分阅读．

一　二元一次方程组

§1　二元一次方程与直线
——数与形的优美结合

我们知道，实数可用数轴上的点表示，数轴上的点也可以用实数表示．和数轴一样，在直角坐标平面内，有序实数对可以用坐标平面上的点表示，平面上的点也可以用有序实数对表示．这样，数轴或坐标平面的建立，就实现了数与形的结合．利用它们，就能将二元一次方程转化为图形，实现方程与图形的结合．

对于任意一个已知的二元一次方程，如像$2x-y+1=0$，有无数个解，下表列出了它的一些解．

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	…
y	…	-5	-3	-1	1	3	5	…

将这些解用坐标平面内的点表示，就得到一系列的点，如图1—1．可以证明，所有这样的点组成的图形是一条直线．

一般地说，二元一次方程$ax+by+c=0$的解所构成的图形是一条直线，或称二元一次方程的图像

是一条直线．这样，研究二元一次方程解的问题，可转化为研究直线上点的问题．

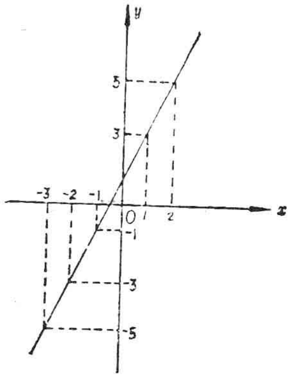


图1—1

二元一次方程系数变化时，它们的图像在坐标平面内的位置也发生变化．下面我们来研究这种变化情况．

例 1　画出$y=x$的图像．

解：由前面知道，它的图像是一条直线．画出这条直线，只要确定两个点即可．为简单起见，取点（0，0）和（1，1）．此直线为一、三象限角平分线（见图1—2）．由此看出方程的简单、整齐性，确定了直线在坐标平面的协调、对称性．

如果方程中未知数的系数不是1，而是其他常数，则图像也随之变化，请看下例．

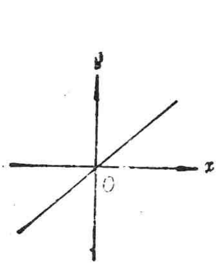


图1—2

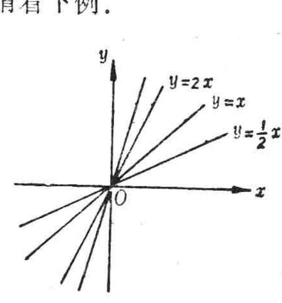


图1—3

例 2　分别画出$y=\frac{1}{2}x$，$y=2x$，$y=3x$的图像.

解：这些方程的图像都是经过坐标原点的直线，因此，各直线上再取一个点就可以画出这些直线了（见图1—3）．可以看出，这些直线虽然不像直线$y=x$那样平分坐标轴所成的角，使图形具有对称性，但它们可以看成是由直线$y=x$绕坐标原点旋转而得.

下面我们再研究常数项不为零的情况.

例 3　画出方程$y=x+1$，$y=x+3$，$y=x-2$的图像.

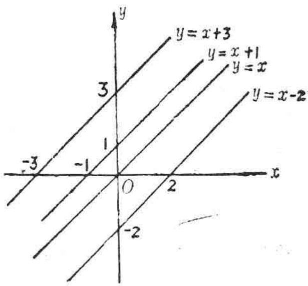


图1—4

解：利用描点的方法不难画出这些直线（见图1—4）．可以看出这些直线可由直线$y=x$上、下平移而得．即方程$y=x+1$、$y=x+3$、$y=x-2$的图像，可由$y=x$的图像分别向上平移1个单位、向上平移3个单位、向下平移2个单位而得．同样，方程$y=2x+1$、$y=3x-2$、$y=\frac{1}{2}x+3$的图像，也可以分别由直线$y=2x$、$y=3x$、$y=\frac{1}{2}x$上、下平移而得.

上面这些例子，使我们看到二元一次方程中的

系数和常数变化时，引起它们的图像在坐标平面内位置的变化，这种变化表现为时而旋转，时而平移．显得与方程这样和谐、统一，充分体现了数形的优美结合．

例 4　画出方程$y=|x|$的图像．

解：先去掉绝对值符号．由绝对值的定义有：

①　当$x\geqslant 0$时，原方程化为$y=x$，它的图像就是例 1 中$y=x$的图像$x\geqslant 0$那一部分，即$\angle xOy$的平分线．

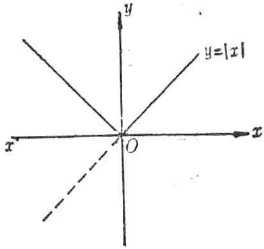


图1—5

②　当$x<0$时，原方程化为$y=-x$，它的图像为$\angle x'Oy$的平分线．

综上可知，$y=|x|$的图像，为图1—5所示的直角形，直角顶点在坐标原点．

例 5　画出方程$y=|x|-1$的图像．

解：仿例 4 的解法有：

①　当$x\geqslant 0$时，原方程为$y=x-1$．画出这条直线，并取$x\geqslant 0$这一部分（即右半平面部分）．

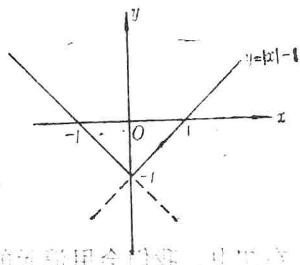


图1—6

②　当$x<0$时，原方程为$y=-x-1$，画出这条直线，并取$x<0$

这一部分（即左半平面部分）．

综上可得$y=|x|-1$的图像，为图1—6中实线部分，也是一个直角形，可以看成是将直角形$y=|x|$向下平移1个单位而得．

例 6　画出$|y|+|x|=1$的图像．

解：此题利用例5的图像，只须去掉y的绝对值符号即可．

① 当$y<0$时，原方程为$-y+|x|=1$，即$y=|x|-1$．其图像为图1—6中$y<0$这一部分，即x轴下半平面部分．

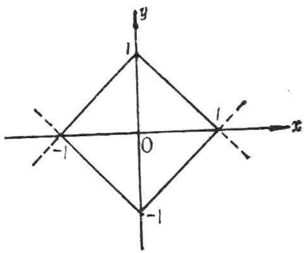


图1—7

② 当$y\geqslant0$时，原方程化为$y+|x|=1$，即$-y=|x|-1$．其图像与$y=|x|-1$的图像关于x轴对称．

综上可得，方程$|x|+|y|=1$的图像是由四条线段所围成的一个正方形（图1—7实线部分）．

§2　消元法——转化的基本途径

在初中，我们会用消元的方法解二元一次方程组，或三元一次方程组．例如：

解方程组$\begin{cases}5x+2y=15, & (1)\\ 8x+3y=-1. & (2)\end{cases}$

解法一：（用代入消元法）

由（1）得 $y=\dfrac{15-5x}{2}$， （3）

将（3）代入（2），得$8x+3\cdot\left(\dfrac{15-5x}{2}\right)=-1$.

解之得 $x=-47$.

将$x=-47$代入（3），得 $y=125$.

所以原方程组的解为$\begin{cases}x=-47,\\ y=125.\end{cases}$

解法二：（用加减消元法）

$2\times(2)-3\times(1)$，得 $x=-47$.

将$x=-47$代入（1）得

$$5\times(-47)+2y=15. \quad \therefore \quad y=125.$$

所以原方程组的解为$\begin{cases}x=-47,\\ y=125.\end{cases}$

从上面的解法可以看到，用代入消元法，或用加减消元法，都能求解二元一次方程组．只是对不同的题，其繁简程度有所不同而已．解题的关键是消元，以达到转化为一元一次方程的目的．由此可见，转化的思想是一种重要的数学思想．在数学学习中，我们应很好地体会和掌握这种思想．

对于多元一次方程组或二元二次方程组，要实现向一元一次方程转化，并不是像二元一次方程组那样简单．这就需要我们仔细观察、认真分析题目特征，巧妙、灵活地运用消元的具体方法．下面举

例说明．

例 1　解方程组

$$\begin{cases} 2x-3y+z=17, & (1) \\ x+2y+z=0, & (2) \\ x+y-2z=-9. & (3) \end{cases}$$

分析：本题采用逐一消元法，会使解法冗长繁琐．仔细观察，发现各方程中，y与z的系数和为0，灵活应用加减消元法，可同时消去这两个未知数．

解：(1)+(2)+(3)得$4x=8$，即$x=2$．

将$x=2$代入(1)、(2)得

$$\begin{cases} 4-3y+z=17, \\ 2+2y+z=0. \end{cases}$$

解之得原方程组的解为 $\begin{cases} x=2, \\ y=-3, \\ z=4. \end{cases}$

例 2　解方程组

$$\begin{cases} x+2y-3z=36, & (1) \\ 9x+18y+16z=63, & (2) \\ 5x-8y+12z=207. & (3) \end{cases}$$

分析：本题若采用逐一消元，相当繁琐．注意到(1)式与(2)式中x、y的系数成比例，用整体代入，可一次消去多个元．

解：由(2)得$9x+18y-27z+27z+16z=63$，

即　$9(x+2y-3z)+43z=63$．　(4)

将(1)代入(4)得$9\times(-36)+43z=63$，

$\therefore\quad z=9.$

又由(3)得$5x-4x-8y+12z+4x=207$,

即 $9x-4(x+2y-3z)=207.$ (5)

将(1)代入(5)得$9x-4\times(-36)=207$,

$\therefore\quad x=7.$

将$x=7$、$z=9$代入(1)得$y=-8$.

所以原方程组的解为$\begin{cases}x=7,\\y=-8,\\z=9.\end{cases}$

注意：本题两次运用了整体代入法，简化了解的过程．整体代入法，是解方程组的一种重要技巧方法．

例3 解方程组

$$\begin{cases}|x+1|+|y-1|=5,\\|x+1|=4y-4.\end{cases}$$

分析：本题按常规解法，去掉绝对值符号，分情况讨论，是事倍功半的做法．注意到(1)式和(2)式有一个相同的绝对值，利用整体消元，并注意隐含条件，可容易求得解．

解：(1)－(2)得$|y-1|=9-4y$. (3)

又由(2)知$y\geqslant1$，即$y-1\geqslant0$，所以由(3)得

$y-1=9-4y$，$\therefore\quad y=2.$

将$y=2$代入(2)可求得原方程组的解为

$$\begin{cases}x=3,\\y=2;\end{cases}\qquad\begin{cases}x=-5,\\y=2.\end{cases}$$

例4 解方程组