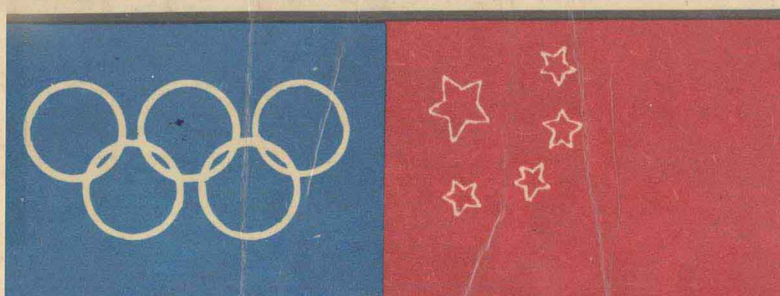
中学 奥林匹克 全国竞赛 丛书

初中数学

奥林匹克 全国竞赛

基础教程及应试指导

顾问 苏步青
主编 刘鸿坤



明日报出版社

中学数学奥林匹克全国竞赛基础教程及应试指导

（初中分册）

顾　问　苏步青

主　编　刘鸿坤

编　著　（即编委　以姓氏笔划为序）

叶声扬　刘鸿坤

李大元　李家生

乔　理　余应龙

顾鸿达　康士凯

熊　斌

(京)新登字 101 号

中学数学 奥林匹克 全国竞赛 基础教程及应试指导
初中分册

☆

光明日报出版社出版发行
(北京永安路 106 号)
邮政编码:100050
电话:3017733－225
新华书店北京发行所经销
冶金印刷总厂印刷
*
787×1092　1/32　13.25 印张　300 千字
1994 年 1 月第 1 版　1994 年 1 月第 1 次印刷
印数: 1－10050 册
ISBN 7－80091－296－5/G・603
定价 7:20 元

前　　言

自 1894 年匈牙利首次举行中学生数学竞赛以来，距今已将一百年了。国际数学奥林匹克(IMO)自 1959 年开办，迄今为止已举办了 33 届，而且规模正在不断扩大，每年都有五、六十个国家和地区参加，几乎所有的发达国家都参与了这项活动。

数学竞赛之所以受到各国的普遍重视，是由于数学竞赛是选拔和培养人材的一种有效途径，它活跃了学校的课外活动，促进了初等数学的研究。中国选手多次在 IMO 中荣获世界第一，今年又取得了历史上最好的成绩，不但团体总分名列第一，而且六名选手全部获得了金牌。这些成绩极大地鼓舞了全国广大师生，数学竞赛活动必将在我国深入持久地开展下去。

本书是作者们在多年从事数学竞赛命题、培训工作的基础上，结合现行中学数学教学大纲和数学竞赛大纲编写而成的。全书共分代数、几何、数论、组合、常用解题方法与技巧五个部分，共 38 讲。系统地介绍了初中数学竞赛所要用到的知识、方法和技能，每一讲按 3 学时的讲座内容安排。书中的例、习题大都选自国内外的优秀数学竞赛试题，也有一些是作者自拟的。希望本书能对数学爱好者有所帮助和启迪。

全体编委参加了本书的编写工作，全书最后由刘鸿坤修

改审定。

在编写过程中，尽管全体编写人员作了很大的努力，力求使本书完美，然而错误是难免的，恳请广大读者不吝赐教。

编　者

一九九二年七月

目　　录

代　　数

几　　何

数　论

组　合

常用解题方法与技巧

代　　数

第一讲　因式分解

把一个多项式化成几个整式的积的形式，叫做因式分解，也可以叫做分解因式。它对于式的恒等变形、求值、解方程都起着十分重要的作用。

1. **提公因式法**

如果一个多项式的各项含有公因式，就可以提出这个公因式作为多项式的一个因式；用这个因式去除原来的多项式所得的商式就是另一个因式；再把多项式写成两个因式的积，这种分解因式的方法叫做提公因式法。

2. **运用公式法**

根据因式分解的意义，可以看出，如果把乘法公式反过来，就可以用来把某些多项式分解因式。这种分解因式的方法叫做运用公式法。

除了现行课本中所规定应掌握的公式及二次三项式的十字相乘法外，在数学竞赛中还常常用到如下的公式：

(1) $a^3+b^3+c^3-3abc$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ 〔公式 1〕

$=\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$

〔公式 2〕

$=(a+b+c)[(a+b+c)^2-3(ab+bc+ca)]$

〔公式 3〕

(2)$a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)=(a+b+c)^3$

(3)对于自然数 n,有

$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots\cdots+b^{n-1})$

对于奇数 n,有

$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}b^{n-1})$

〔**例** 1〕 分解因式 $x^{12}-y^{12}$。

〔**解**〕 $x^{12}-y^{12}=(x^6)^2-(y^6)^2$

$$
\begin{aligned}
&=(x^6+y^6)(x^6-y^6)\\
&=(x^3+y^3)(x^3-y^3)[(x^2)^3+(y^2)^3]\\
&=(x^3+y^3)(x^3-y^3)(x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)\\
&=(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2+y^2)\\
&\quad(x^2+\sqrt{3}xy+y^2)(x^2-\sqrt{3}xy+y^2)
\end{aligned}
$$

注意:本题可分别写成 $x^{12}-y^{12}$、$(x^2)^6-(y^2)^6$、$(x^3)^4-(y^3)^4$、$(x^4)^3-(y^4)^3$、$(x^6)^2-(y^6)^2$ 等多种形式,再应用不同的公式分解。通常采用乘方次数最低的公式,往往可迅速求解。如果采用 12 次方的公式,那么后面一个因式 $x^{11}+x^{10}y+\cdots\cdots+xy^{10}+y^{11}$的分解将变得十分困难。

〔**例** 2〕 分解因式 $x^6+64y^6+12x^2y^2-1$。

〔**解**〕 原式$=(x^2)^3+(4y^2)^3+(-1)^3-3\cdot(-1)\cdot x^2\cdot 4y^2$

$$
=(x^2+4y^2-1)(x^4+16y^4-4x^2y^2+x^2+4y^2+1)。
$$

本题应用了公式 $a^3+b^3+c^3-3abc$ 的分解,公式中的 $a=x^2$,$b=4y^2$,$c=-1$。

〔例 3〕 分解因式 $(x-1)^3+(x-2)^3+(3-2x)^3$。

〔分析〕 设 $a=x-1, b=x-2, c=3-2x$，那么 $a+b+c=(x-1)+(x-2)+(3-2x)=0$，再运用公式 $a^3+b^3+c^3-3abc$ 的分解式。

〔解〕 因为 $(x-1)^3+(x-2)^3+(3-2x)^3-3(x-1)(x-2)(3-2x)$

$$=[(x-1)+(x-2)+(3-2x)]\cdot[(x-1)^2+(x-2)^2+(3-2x)^2-(x-1)(x-2)-(x-2)(3-2x)-(3-2x)(x-1)]$$

$$=0,$$

所以 $(x-1)^3+(x-2)^3+(3-2x)^3=3(x-1)(x-2)(3-2x)$。

从本题可以看出，对公式的掌握不能仅停留在直接应用，而应该善于灵活，变形的应用。

〔例 4〕 分解因式 $2x^2-7xy+3y^2+5xz-5yz+2z^2$。

〔分析〕 如果被分解的多项式中出现的字母较多，如果某一字母的次数最高，那么可按这个字母的降幂排列，设法用公式或者十字相乘法进行分解。

〔解〕 原式 $=2x^2-(7y-5z)x+(3y^2-5yz+2z^2)$

$$=2x^2-(7y-5z)x+(y-z)(3y-2z)$$

$$=[x-(3y-2z)][2x-(y-z)]$$

$$=(x-3y+2z)(2x-y+z)。$$

本题也可按字母 y(或 z)的降幂排列进行分解。

〔例 5〕 分解因式 $(x+y)(y+z)(z+x)+xyz$。

〔分析〕 原式可看成关于字母 x(或 y、或 z)的二次三项式，故可按字母 x(或 y、或 z)降幂排列，再用十字相乘法分解。

〔**解**〕 原式$=(y+z)[x^2+(y+z)x+yz]+xyz$

$=(y+z)x^2+[(y+z)^2+yz]x+yz(y+z)$

$=[x+(y+z)][(y+z)x+yz]$

$=(x+y+z)(xy+yz+zx)$

3. **分组分解法**

利用分组来分解因式的方法叫做分组分解法。通过分组后，至少有一组能提取公因式或运用公式或十字相乘法，从而达到分解该多项式的目的。

〔**例** 6〕 分解因式 $acx^3+bcx^2+adx+bd$。

〔**分析**〕 用分组分解法进行因式分解时，当式中某一字母仅以同次乘幂形式出现时，可把含该字母的项结合成一组。本题中字母 a、b、c 均以一次幂形式出现，如把含字母 a 的项分成一组，是一种可以尝试的分组方法。

〔**解**〕 原式$=(acx^3+adx)+(bcx^2+bd)$

$=ax(cx^2+d)+b(cx^2+d)$

$=(ax+b)(cx^2+d)$。

〔**例** 7〕 分解因式 $(x+1)^4+(x^2-1)^2+(x-1)^4$。

〔**解**〕 原式$=\{[(x+1)^2]^2+2(x+1)^2(x-1)^2+[(x-1)^2]^2\}-(x^2-1)^2$

$=[(x+1)^2+(x-1)^2]^2-(x^2-1)^2$

$=(2x^2+2)^2-(x^2-1)^2$

$=(3x^2+1)(x^2+3)$。

本题的分组方法是设法把被分解式凑成两个式的平方差，这也是常用的方法之一。

〔**例** 8〕 分解因式 $x^8+98x^4y^4+y^8$。

〔**解**〕 原式$=(x^4+y^4)^2+96x^4y^4$

$=[(x^4+y^4)^2+16x^2y^2(x^4+y^4)+64x^4y^4]-$

$$16x^2y^2(x^4+y^4)+32x^4y^4$$
$$=(x^4+8x^2y^2+y^4)^2-16x^2y^2(x^2-y^2)^2$$
$$=[(x^4+8x^2y^2+y^4)-4xy(x^2-y^2)][(x^4+8x^2y^2+y^4)+4xy(x^2-y^2)]$$
$$=(x^4-4x^3y+8x^2y^2+4xy^3+y^4)\cdot(x^4+4x^3y+8x^2y^2-4xy^3+y^4)。$$

〔**例** 9〕 分解因式 $x^{5n}+x^n+1$。(n 为自然数)

〔**解**〕 原式$=(x^{5n}-x^{2n})+(x^{2n}+x^n+1)$
$$=x^{2n}(x^{3n}-1)+(x^{2n}+x^n+1)$$
$$=(x^{2n}+x^n+1)(x^{3n}-x^{2n}+1)$$

本题采用配成立方差的公式,即分组后至少有一组能提取公因式或用公式(包括十字相乘法),这是分组的原则。

对于 n 的某些特殊值,本题如能分解那么必须继续分解,直到不能分解为止。在初中阶段因式分解一般是在实数范围内进行。

除上述情况外,当被分解的多项式 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n(a_0\neq0)$的系数和 $a_0+a_1+\cdots\cdots+a_n=0$ 时,必有因式 $x-1$,这是因为它可以看成方程 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$ 以 $x=1$ 代入后,显然满足该方程,故可分解出因式 $x-1$,而另一因式则可用 $x-1$ 除原式得出的商来表示。例如:分解因式 $x^3-6x^2+11x-6$,因系数和 $1-6+11-6=0$,故可分解出因式 $x-1$,用 $x-1$ 除 $x^3-6x^2+11x-6$ 得到商式 x^2-5x+6。所以 $x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x^2-5x+6)=(x-1)(x-2)(x-3)$。

〔**例** 10〕 分解因式$(l+m)x^3-(3l+2m-n)x^2+(2l-m-3n)x+2(m+n)$。

〔**分析**〕 由系数和$(l+m)-(3l+2m-n)+(2l-m-

$3n)+2(m+n)=0$，可知该多项式有因式 $x-1$。

〔**解**〕 原式 $=(x-1)[(l+m)x^2-(2l+m-n)x-2(m+n)]$

$=(x-1)(x-2)(lx+mx+m+n)$。

同理可得，对于多项式 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n$ $(a_0\neq 0)$，当 $a_0+a_2+a_4+\cdots\cdots=a_1+a_3+a_5+\cdots\cdots$ 时，原多项式可分解出因式 $x+1$（更一般的情况，可用因式定理）。

4. **运用恒等变换**

在因式分解中，还可通过恒等变换，使得被分解式中构成一些相同的部分，从而简化原式。

(1)形如 $e(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)+f(x)$ 的多项式，当 a、b、c、d、e 为常数，且 $f(x)$ 仅含常数项，或仅含二次项，或仅含四次项时，应用恒等变换，能较好地解决分解因式。

当 $f(x)$ 是常数，即形如 $e(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)+f$ 时，如果 $a+b=c+d$ 成立，那么把 $(x+a)(x+b)$ 与 $(x+c)(x+d)$ 分别相乘后，构成有相同部分 $x^2+(a+b)x=x^2+(c+d)x$ 的项，使原式得到简化，然后进行分解。

〔**例 11**〕 分解因式 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-24$。

〔**分析**〕 因为 $f(x)=-24$ 为常数，而 $1+4=2+3$，因此把 $(x+1)(x+4)$ 及 $(x+2)(x+3)$ 先分别作乘法后，再分解。

〔**解**〕 原式 $=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-24$

$=(x^2+5x+4)[(x^2+5x+4)+2]-24$

$=(x^2+5x+4)^2+2(x^2+5x+4)-24$

$=[(x^2+5x+4)+6][(x^2+5x+4)-4]$

$=x(x+5)(x^2+5x+10)$。

当 $f(x)$ 仅含二次项，即形如 $e(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)+f\cdot x^2$ 时，如果 $a\cdot b=c\cdot d$，那么把 $(x+a)(x+b)$ 与 $(x+$

c)(x＋d)分别先作乘法，构成具有相同部分 $x^2+ab=x^2+cd$ 的某些项，再进行分解。

〔**例** 12〕 分解因式 $(x-5)(x+3)(x+6)(x-10)-20x^2$。

〔**分析**〕 本题 $f(x)=-20x^2$，仅含二次项。而 $3\times(-10)=(-5)\cdot 6$，因此先把 $(x+3)(x-10)$ 与 $(x-5)(x+6)$ 分别先作乘法。

〔**解**〕 原式 $=(x^2+x-30)(x^2-7x-30)-20x^2$

$$=(x^2-30)^2-6x(x^2-30)-27x^2$$

$$=(x^2-9x-30)(x^2+3x-30)$$

$$=\left(x-\frac{9+\sqrt{201}}{2}\right)\left(x-\frac{9-\sqrt{201}}{2}\right)\left(x-\frac{-3+\sqrt{129}}{2}\right)\left(x-\frac{-3-\sqrt{129}}{2}\right)。$$

当 $f(x)$ 仅含四次项，即形如 $e(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)+f\cdot x^4$ 时，那么设法找出两个二次三项式，除了二次项外，其余部分均相同，然后进行因式分解。

〔**例** 13〕 分解因式 $(x+1)(2x+1)(3x+1)(4x+1)-3x^4$。

〔**分析**〕 本题 $f(x)=-3x^4$，仅含四次方项，而 $(x+1)(4x+1)=4x^2+5x+1$，$(2x+1)(3x+1)=6x^2+5x+1$ 除二次项外，含相同部分 $5x+1$，因此先分别作出乘积，再进行分解。

〔**解**〕 原式 $=[4x^2+(5x+1)][6x^2+(5x+1)]-3x^4$

$$=(5x+1)^2+10x^2(5x+1)+21x^4$$

$$=[(5x+1)+3x^2][(5x+1)+7x^2]$$

$$=3(7x^2+5x+1)\left(x-\frac{-5+\sqrt{13}}{6}\right)(x-$$

$\frac{-5-\sqrt{13}}{6}$)。

(2)形如 $ax^4+bx^3+cx^2\pm bx+a$ 的多项式

因为 $ax^4+bx^3+cx^2\pm bx+a=x^2[a(x^2+\frac{1}{x^2})+b(x\pm\frac{1}{x})+c]$,而 $x^2+\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})^2-2=(x-\frac{1}{x})^2+2$,从而构成含相同部分 $x+\frac{1}{x}$(或 $x-\frac{1}{x}$)的某些项,再进行分解。

〔**例** 14〕 分解因式 $15x^4+49x^3+64x^2+49x+15$。

〔**解**〕 原式 $=x^2[15(x^2+\frac{1}{x^2})+49(x+\frac{1}{x})+64]$

$$=x^2[15(x+\frac{1}{x})^2+49(x+\frac{1}{x})+34]$$

$$=x^2[(x+\frac{1}{x})+1][15(x+\frac{1}{x})+34]$$

$$=(x^2+x+1)(15x^2+34x+15)$$

$$=(3x+5)(5x+3)(x^2+x+1)。$$

注意:因式分解的结果应该是若干个整式的乘积,例 17 在分解过程中曾出现分式,但最后结果仍是整式,这是允许的。

(3)应用除法进行分解

〔**例** 15〕 分解因式 $(1+x+x^2+\cdots\cdots+x^n)^2-x^n$。

〔**解**〕 原式 $=(\frac{x^{n+1}-1}{x-1})^2-x^n$

$$=\frac{(x^{2n+2}-2x^{n+1}+1)-x^n(x^2-2x+1)}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{x^{n+2}(x^n-1)-(x^n-1)}{(x-1)^2}$$

$$=\frac{x^n-1}{x-1}\cdot\frac{x^{n+2}-1}{x-1}$$

$$=(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots\cdots+x+1)(x^{n+7}+x^{n}+\cdots\cdots+x+1)。$$

最后结果中两个括号内的多项式是分别采用多项式除法所得出的商式，用除法来进行因式分解是一种较特殊的技巧，也应有所了解。

因式分解的应用十分广泛，仅举恒等式证明的一例作为本节的结束。

〔**例** 16〕 证明 $\underbrace{11\cdots\cdots11}_{n\text{个}1}\underbrace{22\cdots\cdots22}_{(n+1)\text{个}2}5=(\underbrace{33\cdots\cdots33}_{n\text{个}3}5)^2$·

〔**证明**〕 $$\text{左式}=\frac{10^n-1}{9}\times10^{n+2}+10\times\frac{2(10^{n+1}-1)}{9}+5$$

$$=\frac{10^{2n+2}+10^{n+2}+25}{9}$$

$$=\frac{(10^{n+1})^2+2\times5\times10^{n+1}+5^2}{9}$$

$$=(\frac{10^{n+1}+5}{3})^2$$

$$=(30\times\frac{10^n-1}{9}+5)^2$$

$$=(\underbrace{33\cdots\cdots33}_{n\text{个}3}5)^2$$

$=$右式。

习题一

分解因式

1. $x^3+y^3+3xy-1$。

2. $(a^2+b^2+c^2)^3+2(ab+bc+ca)^3-3(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)^2$。

3. $6x^2-13xy+6y^2+22x-23y+20$。