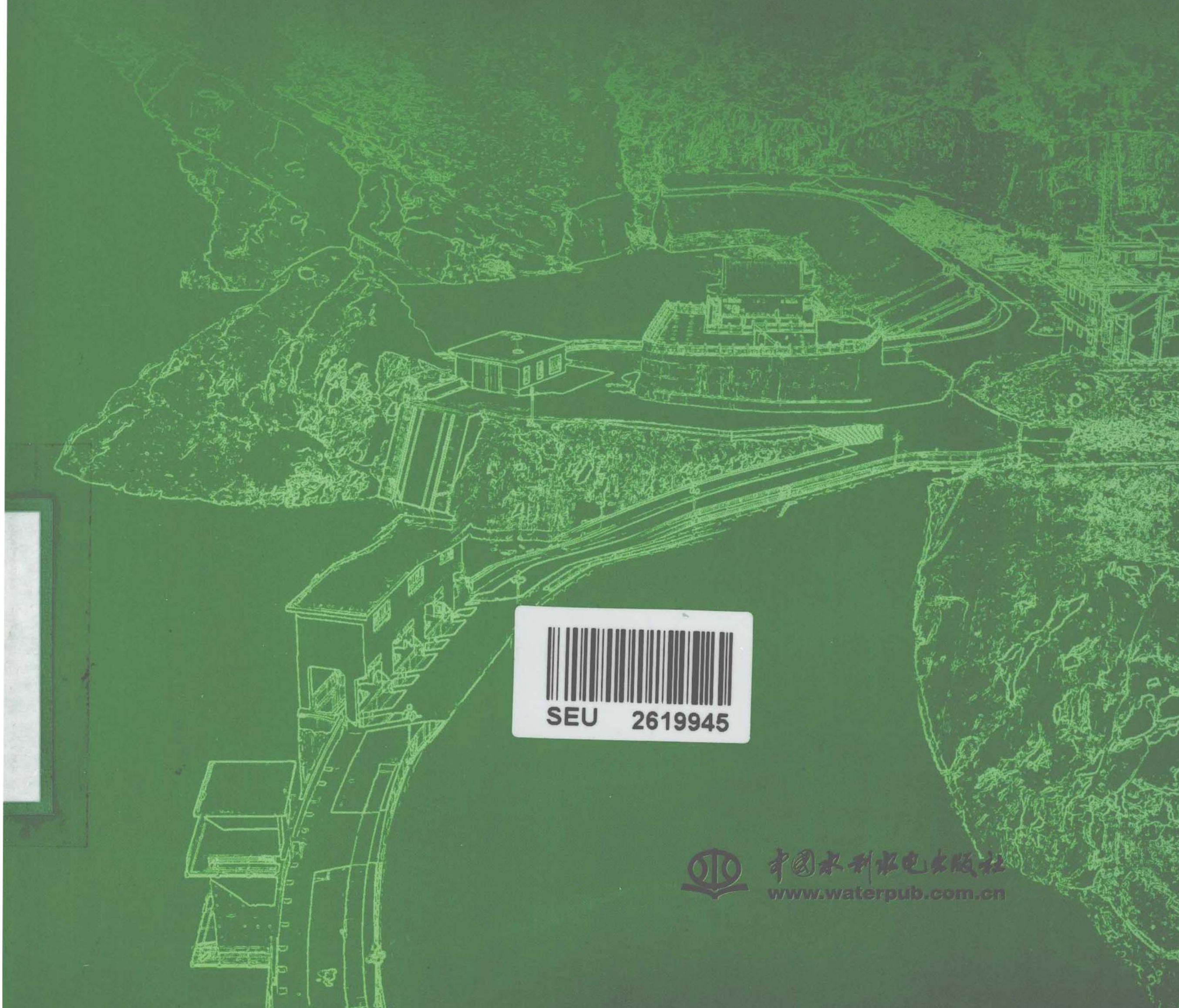
普通高等教育“十二五”规划教材配套辅导书

# 水力学习题解析（上册）

主　编　张志昌
副主编　李国栋　李治勤





中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

普通高等教育“十二五”规划教材配套辅导书

# 水力学习题解析（上册）

主　编　张志昌
副主编　李国栋　李治勤



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

## 内 容 提 要

《水力学习题解析》分为上册和下册，共16章。本书为上册。上册内容包括：绪论、水静力学、水动力学基础、液流形态和水头损失、液体三元流动基本理论、有压管道恒定流、有压管道非恒定流、明渠恒定均匀流。下册内容包括：明渠恒定非均匀流、明渠恒定急变流—水跃和水跌、边界层理论基础、堰顶溢流和孔流、泄水建筑物下游的水流衔接与消能、明渠非恒定流简介、渗流基础、动床水力学基础。

各章分为知识要点、习题解析和练习题与答案三部分，知识要点归纳和提炼出了各章的基本概念、基本公式；习题解析中的题型有基本计算类型和提高类型，涵盖了各章的知识要点；练习题与答案具有广泛性、典型性和代表性。

本书可作为高等工科学校水利类、热能动力类、土建类、机械工程类、环境工程类的学习指导书，还可作为研究生入学考试和相关专业教师、学生和工程技术人员的参考用书。

**图书在版编目（CIP）数据**

水力学习题解析. 上册 / 张志昌主编. -- 北京：中国水利水电出版社，2012.8
普通高等教育“十二五”规划教材配套辅导书
ISBN 978-7-5084-9915-4

Ⅰ. ①水… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①水力学－高等学校－题解 Ⅳ. ①TV13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第136753号

| | |
|---|---|
| 书　　名 | 普通高等教育“十二五”规划教材配套辅导书<br>**水力学习题解析（上册）** |
| 作　　者 | 主编　张志昌　　副主编　李国栋　李治勤 |
| 出版发行 | 中国水利水电出版社<br>（北京市海淀区玉渊潭南路1号D座　100038）<br>网址：www.waterpub.com.cn<br>E-mail：sales@waterpub.com.cn<br>电话：（010）68367658（发行部） |
| 经　　售 | 北京科水图书销售中心（零售）<br>电话：（010）88383994、63202643、68545874<br>全国各地新华书店和相关出版物销售网点 |
| 排　　版 | 中国水利水电出版社微机排版中心 |
| 印　　刷 | 北京纪元彩艺印刷有限公司 |
| 规　　格 | 184mm×260mm　16开本　25.25印张　598千字 |
| 版　　次 | 2012年8月第1版　2012年8月第1次印刷 |
| 印　　数 | 0001—3000册 |
| 定　　价 | **48.00**元 |

# 前言

编写《水力学习题解析》（上册）、（下册）的目的是使学生熟练掌握水力学的基本概念、基本原理，拓宽学生的解题思路、解题方法、掌握解题技巧，结合工程实际培养学生理论联系实际的方法、分析问题和解决工程问题的能力。

《水力学习题解析》（上册）、（下册）：上册内容包括绪论、水静力学、水动力学基础、液流形态和水头损失、液体三元流动基本理论、有压管道恒定流、有压管道非恒定流、明渠恒定均匀流；下册内容内括：明渠恒定非均匀流、明渠恒定急变流—水跃和水跌、边界层理论基础、堰顶溢流和孔流、泄水建筑物下游的水流衔接与消能、明渠非恒定流简介、渗流基础和动床水力学基础。各章分为知识要点、习题解析和练习题与答案。

本书可作为高等学校本科生学习水力学或工程流体力学的指导书，硕士学位研究生入学考试复习和相关专业教师、学生以及工程技术人员设计的参考书。

全书共有1113道习题，其中习题解析621题，练习题与答案492题。这些习题主要来自书后参考文献中的习题，例题以及作者自编的习题。

本书由西安理工大学张志昌主编。参加编写的还有西安理工大学的魏炳乾、李国栋，太原理工大学的李治勤、郝瑞霞。其中张志昌编写了上册的第1～4章、第6章、下册的第1章、第3～5章，魏炳乾编写了下册的第2章、第8章，李国栋编写了上册的第5章、第7章，李治勤编写了上册第8章、下册的第6章，郝瑞霞编写了下册的第7章。

本书的出版得到了水力学课程国家教学团队建设资金、陕西省国家重点学科建设专项基金和西安理工大学教材建设基金的资助。

由于时间和水平所限，书中缺点和错误在所难免，恳请读者批评指正。

**编 者**

2012年8月

# 目录

# 第1章 绪 论

## 1.1 知 识 要 点

### 1.1.1 液体的主要物理性质

1. 惯性——质量和密度

惯性就是反映物体所具有的反抗改变原有运动状况的物理性质，质量是惯性大小的量度。设物体的质量为 $m$，加速度为 $a$，则惯性力可以表示为

$$F=-ma \tag{1.1}$$

质量 $m$ 的单位用千克或公斤（kg），加速度的单位为米/秒$^2$（$m/s^2$），力 $F$ 的单位为牛顿（N），即 $1N=1kg\cdot m/s^2$。

液体单位体积内所具有的质量称为密度，用 $\rho$ 表示，对于均质液体，设其体积为 $V$，质量为 $m$，则

$$\rho=m/V \tag{1.2}$$

或

$$\rho=\gamma/g \tag{1.3}$$

$\rho$ 的单位为千克/米$^3$（$kg/m^3$）。

2. 万有引力特性——重量和重度

在液体运动中，地球对液体的引力就是重力，用重量 $G$ 表示，则

$$G=mg \tag{1.4}$$

重力的单位为牛顿（N）。

液体单位体积内所具有的重量称为重度，或称容重、重率，用符号 $\gamma$ 表示。对于均质液体

$$\gamma=G/V \tag{1.5}$$

重度 $\gamma$ 的单位为牛顿/米$^3$（$N/m^3$）。

液体的重度也随压强和温度而变化，但变化很小，在一般情况下可视为常数。水的重度常采用的数值是 $9800N/m^3$，不同温度情况下水的重度和密度见表 1-1。

表 1-1　　不同温度下表示水的物理性质的数值

| 温度（℃） | 重度 $\gamma$（$kN/m^3$） | 密度 $\rho$（$kg/m^3$） | 动力黏滞系数 $\mu$（$10^{-3}N\cdot s/m^3$） | 运动黏滞系数 $\nu$（$10^{-6}m^2/s$） | 体积弹性系数 $K$（$10^9N/m^2$） | 表面张力系数 $\sigma$（$N/m\times10^{-2}$） | 蒸汽压强 $P_v$（$N/m^2$） |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 9.806 | 999.9 | 1.792 | 1.792 | 2.04 | 7.62 | 0.588 |
| 5 | 9.807 | 1000.0 | 1.519 | 1.519 | 2.06 | 7.54 | 0.883 |
| 10 | 9.804 | 999.7 | 1.308 | 1.308 | 2.11 | 7.48 | 1.177 |

续表

| 温度 (℃) | 重度 $\gamma$ ($kN/m^3$) | 密度 $\rho$ ($kg/m^3$) | 动力黏滞系数 $\mu$ ($10^{-3}N\cdot s/m^3$) | 运动黏滞系数 $\nu$ ($10^{-6}m^2/s$) | 体积弹性系数 $K$ ($10^9N/m^2$) | 表面张力系数 $\sigma$ ($N/m\times10^{-2}$) | 蒸汽压强 $P_v$ ($N/m^2$) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 15 | 9.798 | 999.1 | 1.100 | 1.141 | 2.14 | 7.41 | 1.667 |
| 20 | 9.789 | 998.2 | 1.005 | 1.007 | 2.20 | 7.36 | 2.452 |
| 25 | 9.779 | 997.1 | 0.894 | 0.897 | 2.22 | 7.26 | 3.236 |
| 30 | 9.765 | 995.7 | 0.801 | 0.804 | 2.23 | 7.18 | 4.315 |
| 35 | 9.749 | 994.1 | 0.723 | 0.727 | 2.24 | 7.10 | 4.903 |
| 40 | 9.731 | 992.2 | 0.656 | 0.661 | 2.27 | 7.01 | 7.453 |
| 45 | 9.711 | 990.2 | 0.599 | 0.605 | 2.29 | 6.92 | 9.611 |
| 50 | 9.690 | 988.1 | 0.549 | 0.556 | 2.30 | 6.82 | 12.356 |
| 55 | 9.666 | 985.7 | 0.506 | 0.513 | 2.31 | 6.74 | 15.789 |
| 60 | 9.642 | 983.2 | 0.469 | 0.477 | 2.28 | 6.68 | 19.908 |
| 65 | 9.616 | 980.6 | 0.436 | 0.444 | 2.26 | 6.58 | 25.105 |
| 70 | 9.589 | 977.8 | 0.406 | 0.415 | 2.25 | 6.50 | 31.381 |
| 75 | 9.561 | 974.9 | 0.380 | 0.390 | 2.23 | 6.40 | 38.834 |
| 80 | 9.530 | 971.8 | 0.357 | 0.367 | 2.21 | 6.30 | 47.660 |
| 85 | 9.499 | 968.6 | 0.336 | 0.347 | 2.17 | 6.20 | 58.153 |
| 90 | 9.467 | 965.3 | 0.317 | 0.328 | 2.16 | 6.12 | 70.412 |
| 95 | 9.433 | 961.9 | 0.299 | 0.311 | 2.11 | 6.02 | 84.533 |
| 100 | 9.399 | 958.4 | 0.284 | 0.296 | 2.07 | 5.94 | 101.303 |

3. 液体的易流动性

静止时，液体不能承受切力及抵抗剪切变形的特性称为易流动性。

4. 黏滞性——黏滞系数

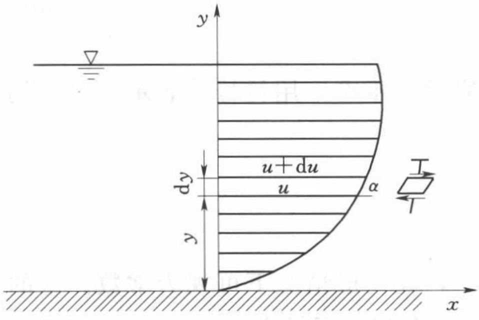



图 1.1

液体在运动时具有抵抗剪切变形的能力，称为液体的黏滞性，如图 1.1 所示。在剪切变形过程中，液体质点之间存在着相对运动，使液体内部出现成对的切力，称为内摩擦阻力或黏滞力。

液体中的内摩擦力（或称切力）$F$，其大小与液体的性质有关，并与流速梯度 $du/dy$ 和接触面积 $A$ 成正比，其表达式为

$$F=\mu A du/dy \tag{1.6}$$

式中：$\mu$ 称为动力黏滞系数，单位为牛顿・秒/米$^2$（$N\cdot s/m^2$），即帕・秒（$Pa\cdot s$），或千克/(米・秒) [$kg/(m\cdot s)$]。

设 $\tau$ 代表单位面积上的内摩擦力，即黏滞切应力，则

$$\tau=F/A=\mu du/dy \tag{1.7}$$

水的 $\mu$ 值可由表 1-1 查算，也可用式 (1.8) 计算

$$\mu=\frac{0.00179}{1+0.0357T+0.00018T^2} \tag{1.8}$$

水力学中常用 $\mu$ 与密度 $\rho$ 的比值来反映液体黏滞性的大小，即

$$\nu=\mu/\rho \tag{1.9}$$

式中：$\nu$ 称为运动黏滞系数，$\nu$ 值可查表 1-1，也可用式（1.10）计算

$$\nu=\frac{0.01775}{1+0.0337T+0.000221T^2} \tag{1.10}$$

式（1.8）～式（1.10）中，$T$ 为水的温度，以℃计；$\mu$ 的单位为 $N\cdot s/m^2$；$\nu$ 的单位为 $cm^2/s$。

5. 压缩性——体积压缩系数或弹性系数

液体的体积随所受压力的增大而减小的特性称为液体的压缩性。液体压缩性可以用体积压缩系数来表示。设液体原状体积为 $V$，当所受压强（单位面积上的压力）的增量为 $dp$ 时，体积增量为 $dV$，则体积压缩系数 $\beta$ 为

$$\beta=-(dV/V)/dp \tag{1.11}$$

$\beta$ 的单位为 $m^2/N$；$dV/V$ 称为液体的相对压缩值。

$\beta$ 的倒数称为体积弹性系数，用 $K$ 来表示为

$$K=-dp/(dV/V) \tag{1.12}$$

$K$ 的单位为 $N/m^2$。水的压缩系数 $\beta$ 和体积弹性系数 $K$ 值随温度变化的关系见表 1-1。

6. 表面张力特性——表面张力系数

表面张力是由于两种介质交界面两边分子引力不平衡而在交界面上产生的拉力，液体表面单位长度上所受的拉力 $\sigma$ 称为表面张力系数，单位为 N/m。$\sigma$ 随液体种类和温度而变化。水的 $\sigma$ 值随温度变化见表 1-1，在水温为 20℃时，水的 $\sigma=0.736$N/m，水银的 $\sigma=0.54$N/m。

由于表面张力的作用，使液体在细的玻璃管中上升或下降值（图 1.2）由式（1.13）给出

$$h=2\sigma\cos\alpha/(r\gamma) \tag{1.13}$$

式中：$h$ 为液体在细的玻璃管中上升或下降的高度；$\gamma$ 为液体的重度；$r$ 为管的半径；$\alpha$ 为液体与固体壁面的接触角，水与玻璃的接触角 $\alpha\approx0$，水银与玻璃的接触角 $\alpha\approx140°$。

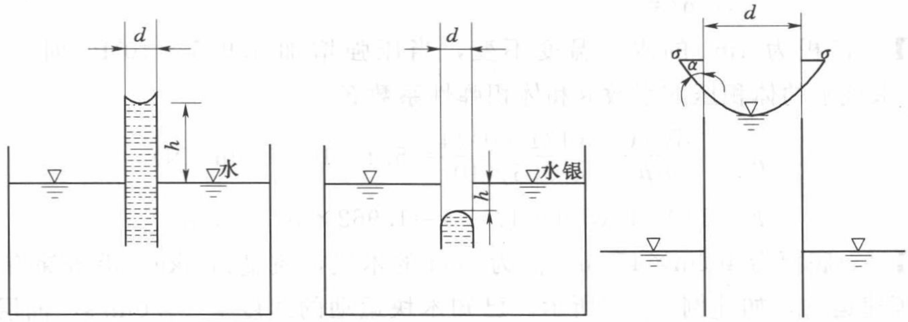



图 1.2

### 1.1.2 液体的作用力

1. 面积力

面积力（包括液体的表面积和内部截面积）也称为表面力：作用于被研究液体的表面上，并与受作用的液体表面积成比例。面积力主要有压应力（压强）和切应力。压应力和切应力的单位为 $N/m^2$。

2. 质量力

作用于液体的每一质点上并与液体的质量成正比的力称为质量力。在均质液体中，质量力与体积成比例，所以又称为体积力。如果液体的质量为 $m$，所受的质量力为 $F$，在各个坐标轴上的分力分别为 $F_x$、$F_y$、$F_z$，则单位质量力在各个坐标轴上的分力 $X$、$Y$、$Z$ 为

$$X=F_x/m \quad Y=F_y/m \quad Z=F_z/m \tag{1.14}$$

单位质量力的单位为 $m/s^2$。

## 1.2 习 题 解 析

**【例1】** 已知煤油的密度 $\rho=850\text{kg/m}^3$，求它的重度。

**解：**
$$\gamma_{煤油}=\rho g=850\times9.8=8330[\text{kg}/(\text{m}^2\cdot\text{s}^2)]$$
$$=8330[\text{kg}\cdot\text{m}/(\text{m}^3\cdot\text{s}^2)]=8330(\text{N/m}^3)$$

**【例2】** 水的重度 $\gamma=9.71\text{kN/m}^3$，动力黏滞系数 $\mu=0.599\times10^{-3}\text{N}\cdot\text{s/m}^2$，求：(1) 其密度和运动黏滞系数 $\nu$。(2) 空气的重度 $\gamma_{空气}=11.5\text{N/m}^3$，运动黏滞系数 $\nu=0.167\text{cm}^2/\text{s}$，求其动力黏滞系数 $\mu$。

**解：**（1）求水的运动黏滞系数。

$$\rho=\gamma/g=9.71/9.8=0.99082[(\text{kN/m}^3)/(\text{m/s}^2)]=990.82\ (\text{N}\cdot\text{s}^2/\text{m}^4)$$

因为 $1\text{N}=1\text{kg}\cdot\text{m/s}^2$，所以 $\rho=990.82\text{kg/m}^3$

$$\nu=\frac{\mu}{\rho}=\frac{0.599\times10^{-3}\text{N}\cdot\text{s/m}^2}{990.82\text{N}\cdot\text{s}^2/\text{m}^4}=6.05\times10^{-7}\ (\text{m}^2/\text{s})$$

（2）求空气的动力黏滞系数。

$$\mu=\rho\nu=\frac{\gamma}{g}\nu=\frac{11.5\text{N/m}^3}{9.8\text{m/s}^2}\times0.167\times(1/100)^2\text{m}^2/\text{s}=1.96\times10^{-5}\ (\text{N}\cdot\text{s/m}^2)$$

**【例3】** 容积为 $4\text{m}^3$ 的水，温度不变，当压强增加 $4.905\times10^5\text{Pa}$ 时，容积减小 $1000\text{cm}^3$，求该水的体积压缩系数 $\beta$ 和体积弹性系数 $K$。

**解：**
$$\beta=-\frac{\text{d}V/V}{\text{d}p}=\frac{(1/1000)/4}{4.905\times10^5}=5.1\times10^{-10}\ (\text{m}^2/\text{N})$$
$$K=1/\beta=1/(5.1\times10^{-10})=1.962\times10^9\ (\text{N/m}^2)$$

**【例4】** 一底面为 $40\text{cm}\times45\text{cm}$，高为 $1\text{cm}$ 的木块，质量为 $5\text{kg}$，沿着涂有润滑油的斜面向下等速运动，如［例4］图所示。已知木块运动的速度 $u=1.0\text{m/s}$，油层厚度 $\delta=1\text{mm}$，由木块带动的油层的运动速度呈直线分布，求油的动力黏滞系数。

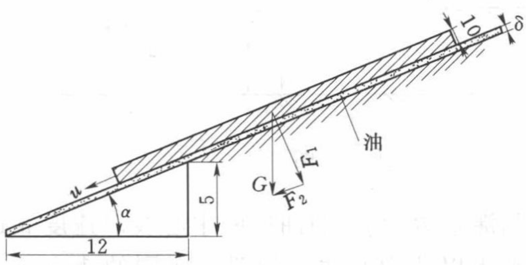
**解：**
$$G=mg=5\times9.8=49\ (\text{kg}\cdot\text{m/s}^2)\ =49\ (\text{N})$$

如［例 4］图所示，设木块下滑的力为 $F_2$，则

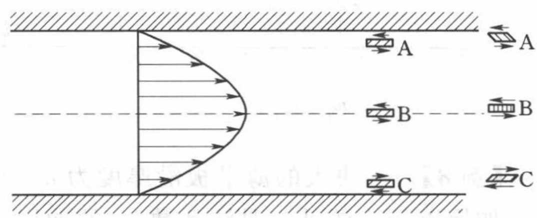
$$F_2=G\sin\alpha=49\times\frac{5}{\sqrt{12^2+5^2}}=\frac{245}{13}\ (\mathrm{N})$$

因为
$$F_2=\mu A\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=\mu A\frac{u}{\delta}$$

所以
$$\mu=\frac{F_2\delta}{Au}=\frac{(245/13)\times0.001}{0.4\times0.45\times1}=0.1047\ (\mathrm{N\cdot s/m^2})$$




［例 4］图




［例 5］图

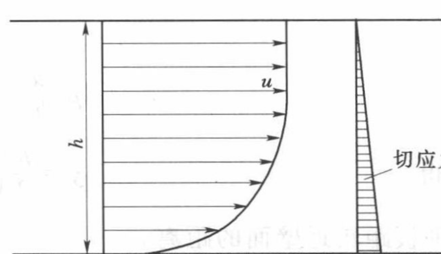
【例 5】 在两平行壁面之间流动的液体的流速分布如［例 5］图所示。试说明：(1) 最大最小切应力的位置和最小应力的值；(2) 作用于各微小矩形块 A、B、C 上下两面的内摩擦力的方向；(3) 经微小时段 d$t$ 后，各液块将变成什么形状。

**解：**(1) 最大切应力在平壁表面，最小切应力在两平壁面之间的中线上，其值为零。

(2) 作用于各微小矩形块上下的内摩擦力的方向如［例 5］图所示。

(3) 经微小时段 d$t$ 后，各液块变形如［例 5］图所示。

【例 6】 有一矩形断面的宽渠道，其水流的流速分布为 $u=0.002\dfrac{\gamma}{\mu}(hy-0.5y^2)$，式中水的重度 $\gamma=9807\mathrm{N/m^3}$；$\mu$ 为动力黏滞系数；$h$ 为渠中水深，如［例 6］图所示。已知 $h=0.5$m，求 $y=0$、$y=0.25$m、$y=0.5$m 处的水流切应力 $\tau$，并绘出沿垂线的切应力分布图。




［例 6］图

**解：**对流速分布公式求导得 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=0.002\dfrac{\gamma}{\mu}(h-y)$

切应力的表达式为 $\tau=\mu\mathrm{d}u/\mathrm{d}y=0.002\gamma(h-y)$

当 $y=0$ 时 $\tau_0=0.002\gamma(h-y)=0.002\times9807\times(0.5-0)=9.807\ (\mathrm{N/m^2})$

同理得 $y=0.25$m 和 $y=0.5$m 处的切应力为

$$\tau_{0.25}=0.002\gamma(h-y)=0.002\times9807\times(0.5-0.25)=4.9035\ (\mathrm{N/m^2})$$

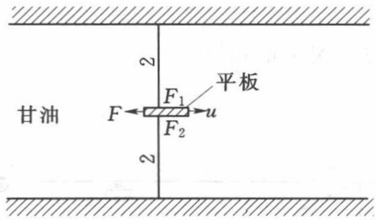
$$\tau_{0.5}=0.002\gamma(h-y)=0.002\times9807\times(0.5-0.5)=0$$

切应力分布如［例 6］图所示。

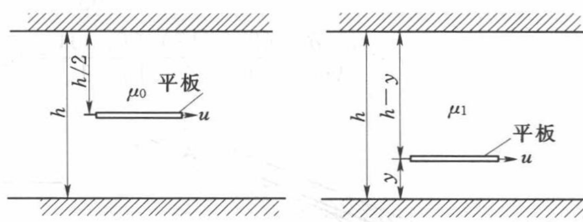
【例 7】 有一边长为 0.5m 的正方形极薄平板在两壁面间充满甘油的缝隙中以 $u=1$m/s 的速度运动，如［例 7］图所示。已知平板与两侧壁面的距离均为 2cm，甘油的动力黏滞

系数 $\mu=0.86\text{N}\cdot\text{s/m}^2$，求平板的拖曳力 $F$。

**解：**
$$F_1=\mu A\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=\mu A\frac{u}{h}=0.86\times0.5^2\times\frac{1}{0.02}=10.75\ (\text{N})$$
$$F_2=F_1=10.75\text{N},\ F=2F_1=21.5\text{N}$$




［例 7］图




［例 8］图

**【例 8】** 一块大的薄平板沿厚度为 $h$、动力黏滞系数为 $\mu_0$ 的油层的中心线以速度 $u$ 运动。如换以较小的动力黏滞系数 $\mu_1$ 的油层，当平板以非中心线的位置以相同的速度运动时，其拖曳力相等，求平板与较近壁面的距离。

**解：** 平板在油层中线两侧的总切应力为

$$\tau_0=2\mu_0\frac{u}{h/2}=4\mu_0\frac{u}{h}$$

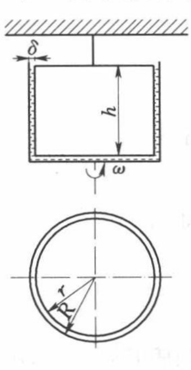
设在 $\mu_1$ 的情况下，平板距较近壁面的距离为 $y$，则平板两侧的总切应力为 $\tau=\mu_1\dfrac{u}{y}+\mu_1\dfrac{u}{h-y}$。

依题意
$$4\mu_0\frac{u}{h}=\mu_1\frac{u}{y}+\mu_1\frac{u}{h-y}$$

由上式得
$$y=\frac{h}{2}\left(1\pm\sqrt{1-\frac{\mu_1}{\mu_0}}\right)$$

$y$ 即为平板距较近壁面的距离。

**【例 9】** 有两个同心圆筒，如［例 9］图所示。内筒半径 $r=20\text{cm}$，高度 $h=40\text{cm}$，两桶间距 $\delta=0.3\text{cm}$，两筒之间盛以液体，内筒固定不动。当外筒以角速度 $\omega=10\text{rad/s}$ 旋转时，由于液体内摩擦力的作用，对内筒中心轴产生 $5\text{N}\cdot\text{m}$ 的力矩。求该液体的动力黏滞系数 $\mu$（不计内筒底部所受的摩擦力矩）。



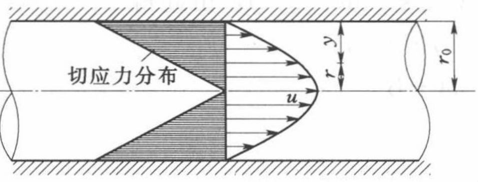

［例 9］图

**解：** 外圆筒的线速度为

$$u=R\omega=(0.2+0.003)\times10=2.03\ (\text{m/s})$$

内圆筒所受的力矩为

$$M=Tr=2\pi rh\tau r=2\pi r^2h\tau$$
$$\tau=\frac{M}{2\pi r^2h}=\frac{5}{2\times\pi\times0.2^2\times0.4}=49.736\ (\text{N/m}^2)$$
$$\mu=\frac{\tau\delta}{u}=\frac{49.736\times0.003}{2.03}=0.0735\ (\text{N}\cdot\text{s/m}^2)$$




［例 10］图

【例 10】 水流通过一半径 $r_0=0.1\text{m}$ 的圆管时，测得管壁处切应力 $\tau=0.32\text{N/m}^2$，管道横断面流速分布为 $u=1397.2(r_0^2-r^2)$，式中 $r$ 为圆管径向坐标，如［例 10］图所示。求水的动力黏滞系数 $\mu$，并画出切应力沿管径的分布图。（提示：$\mathrm{d}u/\mathrm{d}y=-\mathrm{d}u/\mathrm{d}r$，$y$ 为从管壁算起的横向坐标）。

**解：**

$$\mathrm{d}u/\mathrm{d}y=-\mathrm{d}u/\mathrm{d}r=-1397.2(-2r)=2794.4r$$

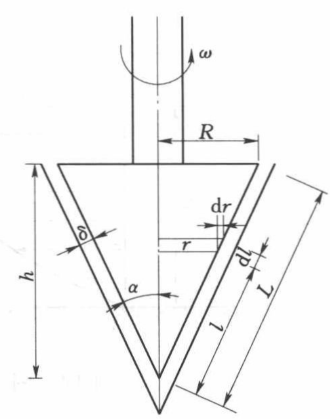
$$\tau=\mu\mathrm{d}u/\mathrm{d}y=-\mu\mathrm{d}u/\mathrm{d}r=2794.4\mu r$$

在管壁处，$r=r_0=0.1\text{m}$，由上式得

$$\mu=\frac{\tau}{2794.4r}=\frac{0.32}{2794.4\times0.1}=1.145\times10^{-3}\ (\text{N}\cdot\text{s/m}^2)$$

在管轴处，$r=0$，$\tau=0$，在管壁处，$r=0.1$，$\tau=0.32\text{N/m}^2$。切应力分布如［例 10］图中的三角形阴影线所示。

【例 11】 一圆锥体绕其铅垂中心轴作等速旋转，如［例 11］图所示。已知锥体与固定壁的间距 $\delta=1\text{mm}$，全部为润滑油所充满。润滑油的动力黏滞系数 $\mu=0.1\text{Pa}\cdot\text{s}$，锥体底部半径 $R=0.3\text{m}$，高 $h=0.5\text{m}$，当旋转角速度 $\omega=16\text{rad/s}$ 时，试求所需的转动力矩。




［例 11］图

**解：** 设某点距转轴的距离为 $r$，其表面积为

$$\mathrm{d}A=2\pi r\mathrm{d}L=\frac{2\pi r}{\sin\alpha}\mathrm{d}r$$

又因为

$$\tau=\mu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=\mu\frac{r\omega}{\delta}$$

$$\mathrm{d}F=\tau\mathrm{d}A=\mu\frac{r\omega}{\delta}\frac{2\pi r}{\sin\alpha}\mathrm{d}r=\frac{2\mu\pi\omega}{\delta\sin\alpha}r^2\mathrm{d}r$$

转动力矩为

$$\mathrm{d}M=r\mathrm{d}F=\frac{2\mu\pi\omega}{\delta\sin\alpha}r^3\mathrm{d}r$$

$$M=\int_0^R\mathrm{d}M=\int_0^R\frac{2\mu\pi\omega}{\delta\sin\alpha}r^3\mathrm{d}r=\frac{\mu\pi\omega}{2\delta\sin\alpha}R^4=\frac{\mu\pi\omega}{32\delta\sin\alpha}D^4$$

式中：$D$ 为圆锥的直径。

$$\sin\alpha=R/L=R/\sqrt{h^2+R^2}=0.3/\sqrt{0.5^2+0.3^2}=0.5145$$

将 $\delta=1\text{mm}$，$\mu=0.1\text{Pa}\cdot\text{s}$，$R=0.3\text{m}$，$h=0.5\text{m}$，$\omega=16\text{rad/s}$，代入上式得

$$M=0.1\times\pi\times16\times0.6^4/(32\times0.001\times0.5145)=39.57\ (\text{N}\cdot\text{m})$$

【例 12】 如［例 12］图所示水流在平板上运动，其靠近边壁附近的流速分布为抛物线分布，$A$ 点为抛物线端点，设水温为 20℃，已知 $y=0.04\text{m}$ 时，流速 $u=1\text{m/s}$，试求 $y=0$、2、4cm 处的切应力和 $y=0$、2cm 处的流速。

**解：** 设抛物线方程为 $u=Ay^2+By+c$

由边界条件确定方程中的各系数。当 $y=0$ 时，$u=0$，所以 $c=0$。

又 $du/dy=2Ay+B$，$y=0.04$m 时，$u=1.0$m/s，$du/dy=0$，由此得

$$1=A\times0.04^2+B\times0.04$$

$$0=2A\times0.04+B$$

解得 $A=-625$，$B=50$。代入公式得

$$u=-625y^2+50y$$

$$du/dy=-1250y+50$$

$$\tau=\mu du/dy=\rho\nu du/dy=\rho\nu\times(-1250y+50)$$

当水温为 20℃时，运动黏滞系数 $\nu=1\times10^{-6}\mathrm{m^2/s}$，取 $\rho=1000\mathrm{kg/m^3}$，则

$$\tau=\rho\nu\times(-1250y+50)=1000\times1\times10^{-6}\times(-1250y+50)$$

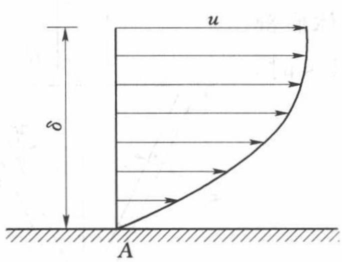
由上式求得切应力为

当 $y=0$，$\tau=1000\times1\times10^{-6}\times50=0.05$（Pa）

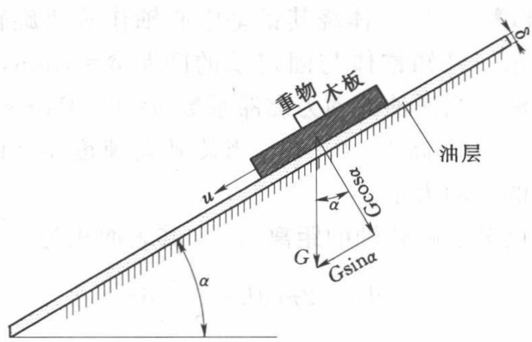
当 $y=0.02$m 时，$\tau=1000\times1\times10^{-6}\times(-1250\times0.02+50)=0.025$（Pa）

当 $y=0.04$m 时，$\tau=1000\times1\times10^{-6}\times(-1250\times0.04+50)=0$

各点的流速为：当 $y=0$，$u=0$；当 $y=0.02$m 时，$u=0.75$m/s。




［例 12］图




［例 13］图

**【例 13】** 倾角 $\alpha=30°$的斜面涂有厚度 $\delta=1$mm 的润滑油，一块重量未知、底面积$A=0.01\mathrm{m^2}$ 的木板沿此斜面以速度 $u=0.15$m/s 下滑，如［例 13］图所示。如果在板上加以重量 $G=4$N 的重物，则下滑速度 $u_1=0.45$m/s。试求润滑油的动力黏滞系数和木板的重量。

**解**：设板的自重为 $G$，则下滑力为 $G\sin\alpha$，板面受到的黏滞切应力为 $\tau=\mu u/\delta$，则黏滞力为 $A\mu u/\delta$，由力的平衡方程得

$$G\sin\alpha=A\mu u/\delta \tag{1}$$

在板上加以物体后，有

$$(G+G_1)\sin\alpha=A\mu u_1/\delta \tag{2}$$

以上两式相减得

$$G_1\sin\alpha=A\mu(u_1-u)/\delta \tag{3}$$

黏滞系数为

$$\mu=\frac{\delta}{A}\frac{G_1\sin\alpha}{(u_1-u)} \tag{4}$$

板的自重为

$$G=\mu\frac{u}{\delta}\frac{A}{\sin\alpha}=\frac{\delta}{A}\frac{G_1\sin\alpha}{(u_1-u)}\frac{u}{\delta}\frac{A}{\sin\alpha}=G_1\frac{u}{u_1-u} \tag{5}$$

将 $G_1=4$N，$u=0.15$m/s，$u_1=0.45$m/s，$\delta=0.001$m，$\alpha=30°$，$A=0.01\mathrm{m^2}$ 代入式（4）、（5）得 $\mu=0.667\mathrm{N\cdot s/m^2}$，$G=2$N。

**【例 14】** 有一半径为 $R$ 的半球，在与凹槽相距为 δ 的间隙中围绕竖轴旋转，凹槽与

半球之间用润滑油充满，如［例 14］图所示。已知球半径 $R=0.15\text{m}$，旋转角速度 $\omega=120\text{rad/min}$，$\delta=1\text{mm}$，润滑油的运动黏滞系数 $\nu=1\times10^{-3}\text{m}^2/\text{s}$，密度 $\rho=900\text{kg/m}^3$，试求所需的旋转力矩。

**解：**

$$\tau=\mu\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=\mu\frac{\omega}{\delta}R\sin\alpha$$

式中 $R\sin\alpha$ 为球面上的点到转轴的距离。

$$M=\iint_A\tau R\sin\alpha\mathrm{d}A$$

因为 $\mathrm{d}A=2\pi R\sin\alpha R\mathrm{d}\alpha$，所以

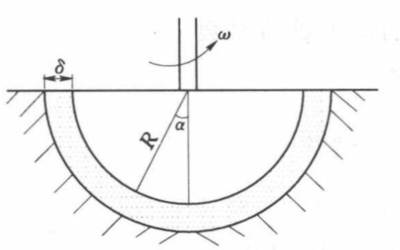
$$M=\iint_A\mu\frac{\omega}{\delta}R\sin\alpha\cdot R\sin\alpha\cdot(2\pi R\sin\alpha R\mathrm{d}\alpha)=\frac{2\pi\omega R^4\mu}{\delta}\int_0^{\pi/2}\sin^3\alpha d\alpha$$

对上式积分得 $$\int_0^{\pi/2}\sin^3\alpha\mathrm{d}\alpha=-\frac{1}{3}(2+\sin^2\alpha)\cos\alpha\,\Big|_0^{\pi/2}=\frac{2}{3}$$

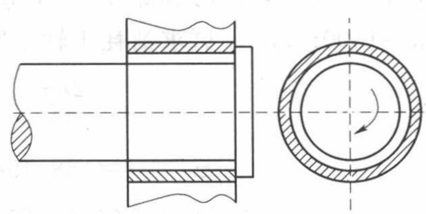
$$M=\frac{2\pi\omega R^4\mu}{\delta}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{3}\frac{\pi\omega\mu R^4}{\delta}=\frac{4}{3}\frac{\pi}{\delta}\frac{2\pi n}{60}\rho\nu R^4$$

将有关数据代入得

$$M=\frac{4}{3}\frac{\pi}{\delta}\frac{2\pi n}{60}\rho\nu R^4=\frac{4}{3}\times\frac{2\times120\pi^2}{0.001\times60}\times900\times1\times10^{-3}\times0.15^4=23.983\ (\text{N}\cdot\text{m})$$




［例 14］图



［例 15］图

**【例 15】** 如［例 15］图所示，直径 76mm 的轴在同心缝隙为 0.03mm，长度为 150mm 的轴承中旋转，轴的转速为 226r/min，测得轴径上的摩擦力矩为 76N·m，试确定缝隙中油液的动力黏滞系数。

**解：**

$$\omega=\frac{2n\pi}{60}=\frac{2\times226\pi}{60}=23.665$$

$$v_0=\omega r=23.665\times0.076/2=0.9\ (\text{m/s})$$

$$\tau=\mu v_0/\delta=\mu\times0.9/(0.03/1000)=29998\mu$$

$$F=A\tau=\pi dl\tau=\pi\times0.076\times0.15\times29998\mu=1074.35\mu$$

$$M=Fd/2=1074.35\mu\times0.076/2=40.825\mu$$

已知 $M=76\text{N}\cdot\text{m}$，代入上式得 $\mu=1.86\text{Pa}\cdot\text{s}$。

**【例 16】** 如［例 16］图所示，水轮机轴径 $d=0.36\text{m}$，轴承长 $l=1.0\text{m}$，同心缝隙 $\delta=0.23\text{mm}$，润滑油的动力黏滞系数为 $\mu=0.072\text{Pa}\cdot\text{s}$，试求水轮机转速 $n=200\text{r/min}$ 时，消耗于轴承上的摩擦功率。

**解：**

$$\omega=\frac{2n\pi}{60}=\frac{2\times 200\pi}{60}=20.944$$

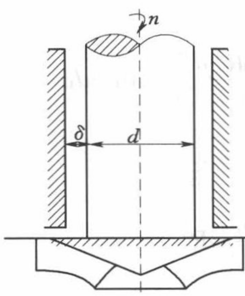
$$v_0=\omega r=20.944\times 0.36/2=3.77\ (\text{m/s})$$

$$\tau=\mu v_0/\delta=0.072\times 3.77/(0.23/1000)=1180.15\ (\text{N/m}^2)$$

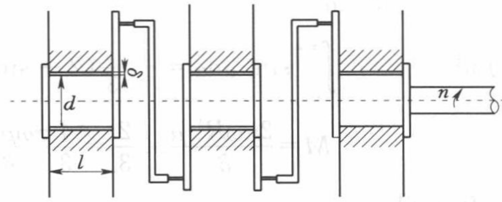
$$F=A\tau=\pi dl\tau=\pi\times 0.36\times 1.0\times 1180.15=1334.714\ (\text{N})$$

$$T=Fd/2=1334.714\times 0.36/2=240.25\ (\text{N}\cdot\text{m})$$

$$P=T\omega=240.25\times 20.944=5031.76\text{W}\approx 5.032\ (\text{kW})$$




［例 16］图




［例 17］图

**【例 17】** 如［例 17］图所示，四缸发动机曲轴上的三个主轴颈尺寸相同，$l=120\text{mm}$，$d=60\text{mm}$，同心缝隙 $\delta=0.1\text{mm}$，润滑油的动力黏滞系数 $\mu=0.05\text{Pa}\cdot\text{s}$，发动机转速 $n=1800\text{r/min}$，试求消耗于轴承摩擦上的功率。

**解：**

$$\omega=\frac{2n\pi}{60}=\frac{2\times 1800\pi}{60}=188.496$$

$$v_0=\omega r=188.496\times 0.06/2=5.655\ (\text{m/s})$$

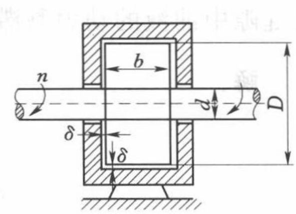
$$\tau=\mu v_0/\delta=0.05\times 5.655/(0.1/1000)=2827.433\ (\text{N/m}^2)$$

$$\tau=3\pi dl=3\pi\times 0.06\times 0.12=0.0679\ (\text{m}^2)$$

$$F=A\tau=0.0679\times 2827.433=191.865\ (\text{N})$$

$$P=Fv_0=191.865\times 5.655=1085\text{W}=1.085\ (\text{kW})$$

**【例 18】** 如［例 18］图所示，液体摩擦测力计的转子直径 $D=110\text{mm}$，宽度 $b=40\text{mm}$，转子与壳体之间的轴向缝隙、径向缝隙均充满动力黏滞系数 $\mu=0.7\text{Pa}\cdot\text{s}$ 的液体，轴的直径 $d=30\text{mm}$，轴的转速 $n=420\text{r/min}$，缝隙 $\delta=0.01\text{mm}$，试求测功计的扭矩和功率。




［例 18］图

**解：**

$$\omega=\frac{2n\pi}{60}=\frac{2\times 420\pi}{60}=43.982$$

$$v_1=\omega D/2=43.982\times 0.11/2=2.419\ (\text{m/s})$$

$$\tau_1=\mu v_1/\delta=0.7\times 2.419/(0.01/1000)=169331.844\ (\text{N/m}^2)$$

$$A_1=\pi Db=\pi\times 0.11\times 0.04=0.01382\ (\text{m}^2)$$

$$F_1=A_1\tau_1=0.01382\times 169331.844=2340.675\ (\text{N})$$

$$T_1=F_1D/2=2340.675\times0.11/2=128.737\ (\mathrm{N\cdot m})$$

$$\tau_2=\mu\frac{v_2}{\delta}=\mu\frac{\omega r}{\delta}$$

$$dA_2=2\pi rdr$$

$$dF_2=\tau_2\ dA_2=\frac{\mu\omega}{\delta}r\times2\pi rdr=\frac{2\pi\mu\omega}{\delta}r^2\ dr$$

$$dT_2=rdF_2=\frac{2\pi\mu\omega}{\delta}r^3\ dr$$

$$T_2=\int_0^{d/2}\frac{2\pi\mu\omega}{\delta}r^3\ dr=\frac{\pi\mu\omega}{32\delta}D^4=\frac{\pi\times0.7\times43.982}{32\times(0.01/1000)}\times0.11^4=44.253\ (\mathrm{N\cdot m})$$

两边 $$T'=2T_2=2\times44.253=88.506\ (\mathrm{N\cdot m})$$

$$T=T_1+T'=128.737+88.506=217.24\ (\mathrm{N\cdot m})$$

$$P=T\omega=217.24\times43.982=9555\mathrm{W}=9.555\ (\mathrm{kW})$$

**【例 19】** 某实验室用玻璃管量测水箱内的水位，如［例 19］图所示。如要测量误差不大于 3mm，问选用的玻璃管的最小内径为若干？

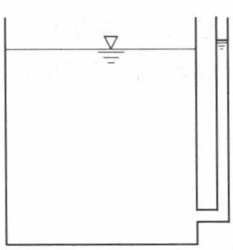
**解：** 由毛细管作用引起的量测误差为

$$h=\frac{2\sigma\cos\theta}{\gamma R}$$

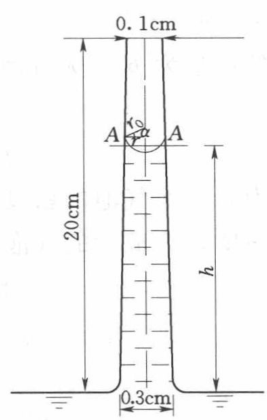
当水温为 10℃时，表面张力系数 $\sigma=0.0748\mathrm{N/m}$，水的重度 $\gamma=9804\mathrm{N/m^3}$，水与玻璃的接触角 $\theta\approx0°$，则玻璃管的半径 $R$ 为

$$R=\frac{2\sigma}{\gamma h}=\frac{2\times0.0748}{9804\times(3/1000)}=0.005\ (\mathrm{m})$$

因此，如要测量误差不大于 3mm，半径应不小于 5mm。



［例 19］图




［例 20］图

**【例 20】** 一直径按线性缩小的玻璃管，下端直径为 0.3cm，上端直径为 0.1cm，长 20cm，现将该管垂直地安放在水面上，使其下端刚刚浸入水面，如［例 20］图所示。如水的表面张力系数 $\sigma=8\times10^{-2}\mathrm{N/m}$，并设其接触角为零，问管中水面升高多少？

**解：** 设水面上升到 $A—A$ 断面，该处的半径为 $r$，水面曲率半径为 $r_0$，如液体与管壁