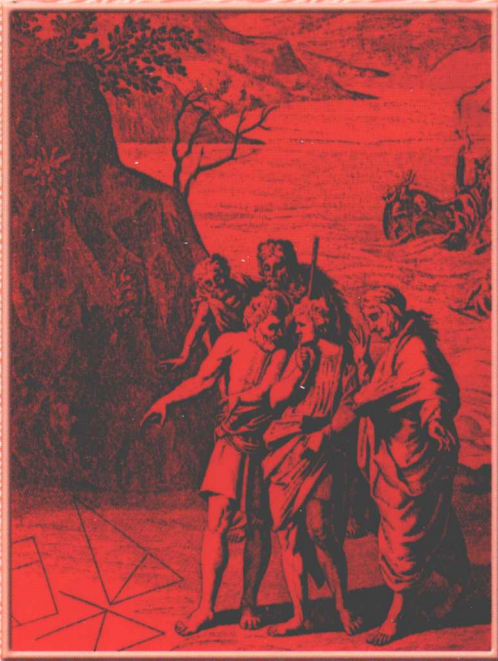


《数学中的小问题大定理》丛书（第三辑）

# 差分方程的拉格朗日方法

——从一道2011年全国高考理科试题的解法谈起

曹珍富 刘培杰 编著



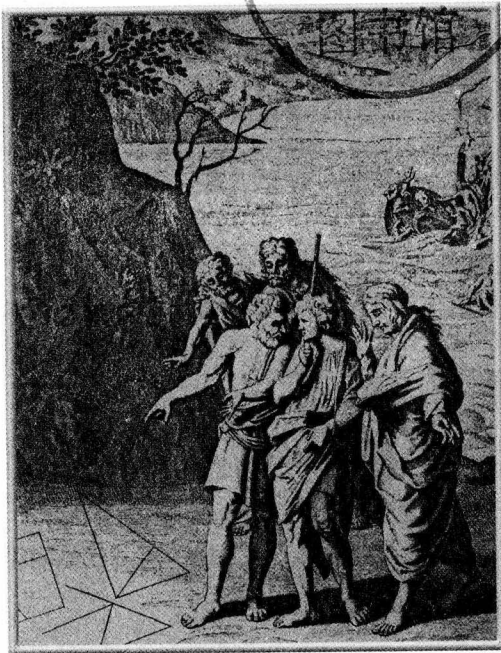
- ◎ 某些特殊的递推数列的通项
- ◎ 拉格朗日变易常数法
- ◎ 差分方程在结构力学上的应用
- ◎ 线性偏差方程的一般解与边界条件
- ◎ 差分方程的稳定性概念



哈尔滨工业大学出版社  
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

013043288

0241.3  
09



《数学中的小问题大定理》丛书（第三辑）

# 差分方程的拉格朗日方法

——从一道2011年全国高考理科试题的解法谈起

曹珍富 刘培杰 编著

- ◎ 某些特殊的递推数列的通项
- ◎ 拉格朗日变易常数法
- ◎ 差分方程在结构力学上的应用
- ◎ 线性偏差方程的一般解与边界条件
- ◎ 差分方程的稳定性概念



哈尔滨工业大学出版社  
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



北航

C1650877

0241.3  
09

885540510

## 内容简介

递推数列多年来一直是数学竞赛的命题来源,对于今天的竞赛选手及教练来说已不是难题。而利用差分方法求解数列问题有很多优点。本书从一道 2011 年全国理科试题的解法谈起,首先全文摘录了一篇作者 23 年前发表的小文章。然后再进行现实的联系并进而介绍差分方程理论的完整体系。并进一步介绍了俄罗斯数学家在差分方程解的稳定性方面的前沿结果。

本书适合于优秀的初高中学生尤其是数学竞赛选手、初高中数学教师和中学数学奥林匹克教练员使用,也可作为高等院校教师和学习用书及数学爱好者的兴趣读物。

## 图书在版编目(CIP)数据

差分方程的拉格朗日方法:从一道 2011 年全国高考理科试题的解法谈起/曹珍富,刘培杰编著. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2012. 8

ISBN 978 - 7 - 5603 - 3748 - 7

I. ①差… II. ①曹…②刘… III. ①差分方程  
IV. ①O241. 3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 177409 号

策划编辑 刘培杰 张永芹  
责任编辑 宋晓翠  
封面设计 孙茵艾  
出版发行 哈尔滨工业大学出版社  
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006  
传 真 0451 - 86414749  
网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>  
印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司  
开 本 787mm×960mm 1/16 印张 9.25 字数 100 千字  
版 次 2012 年 8 月第 1 版 2012 年 8 月第 1 次印刷  
书 号 ISBN 978 - 7 - 5603 - 3748 - 7  
定 价 28.00 元

---

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)





# 哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室 已出版(即将出版)图书目录



书 名	出版时间	定 价	编号
新编中学数学解题方法全书(高中版)上卷	2007-09	38.00	7
新编中学数学解题方法全书(高中版)中卷	2007-09	48.00	8
新编中学数学解题方法全书(高中版)下卷(一)	2007-09	42.00	17
新编中学数学解题方法全书(高中版)下卷(二)	2007-09	38.00	18
新编中学数学解题方法全书(高中版)下卷(三)	2010-06	58.00	73
新编中学数学解题方法全书(初中版)上卷	2008-01	28.00	29
新编中学数学解题方法全书(初中版)中卷	2010-07	38.00	75
新编平面解析几何解题方法全书(专题讲座卷)	2010-01	18.00	61

数学眼光透视	2008-01	38.00	24
数学思想领悟	2008-01	38.00	25
数学应用展现	2008-01	38.00	26
数学建模导引	2008-01	28.00	23
数学方法溯源	2008-01	38.00	27
数学史话览胜	2008-01	28.00	28

从毕达哥拉斯到怀尔斯	2007-10	48.00	9
从迪利克雷到维斯卡尔迪	2008-01	48.00	21
从哥德巴赫到陈景润	2008-05	98.00	35
从庞加莱到佩雷尔曼	2011-08	138.00	136
从比勃巴赫到德·布朗斯	即将出版		

数学解题中的物理方法	2011-06	28.00	114
数学解题的特殊方法	2011-06	48.00	115
中学数学计算技巧	2012-01	48.00	116
中学数学证明方法	2012-01	58.00	117
数学趣题巧解	2012-03	28.00	128
含参数的方程和不等式	2012-09	28.00	213

数学奥林匹克与数学文化(第一辑)	2006-05	48.00	4
数学奥林匹克与数学文化(第二辑)(竞赛卷)	2008-01	48.00	19
数学奥林匹克与数学文化(第二辑)(文化卷)	2008-07	58.00	34
数学奥林匹克与数学文化(第三辑)(竞赛卷)	2010-01	48.00	59
数学奥林匹克与数学文化(第四辑)(竞赛卷)	2011-08	58.00	87



# 哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室 已出版(即将出版)图书目录



书 名	出版 时间	定 价	编 号
发展空间想象力	2010-01	38.00	57
走向国际数学奥林匹克的平面几何试题诠释(上、下)(第1版)	2007-01	68.00	11,12
走向国际数学奥林匹克的平面几何试题诠释(上、下)(第2版)	2010-02	98.00	63,64
平面几何证明方法全书	2007-08	35.00	1
平面几何证明方法全书习题解答(第1版)	2005-10	18.00	2
平面几何证明方法全书习题解答(第2版)	2006-12	18.00	10
最新世界各国数学奥林匹克中的平面几何试题	2007-09	38.00	14
数学竞赛平面几何典型题及新颖解	2010-07	48.00	74
初等数学复习及研究(平面几何)	2008-09	58.00	38
初等数学复习及研究(立体几何)	2010-06	38.00	71
初等数学复习及研究(平面几何)习题解答	2009-01	48.00	42
世界著名平面几何经典著作钩沉——几何作图专题卷(上)	2009-06	48.00	49
世界著名平面几何经典著作钩沉——几何作图专题卷(下)	2011-01	88.00	80
世界著名平面几何经典著作钩沉(民国平面几何老课本)	2011-03	38.00	113
世界著名数论经典著作钩沉(算术卷)	2012-01	28.00	125
世界著名数学经典著作钩沉——立体几何卷	2011-02	28.00	88
世界著名三角学经典著作钩沉(平面三角卷 I)	2010-06	28.00	69
世界著名三角学经典著作钩沉(平面三角卷 II)	2011-01	28.00	78
世界著名初等数论经典著作钩沉(理论和实用算术卷)	2011-07	38.00	126
几何学教程(平面几何卷)	2011-03	68.00	90
几何学教程(立体几何卷)	2011-07	68.00	130
几何变换与几何证题	2010-06	88.00	70
几何瑰宝——平面几何 500 名题暨 1000 条定理(上、下)	2010-07	138.00	76,77
三角形的解法与应用	2012-07	18.00	183
近代的三角形几何学	2012-07	48.00	184
一般折线几何学	即将出版	58.00	203
三角形的五心	2009-06	28.00	51
三角形趣谈	2012-08	28.00	212
俄罗斯平面几何问题集	2009-08	88.00	55
俄罗斯平面几何 5000 题	2011-03	58.00	89
计算方法与几何证题	2011-06	28.00	129
463 个俄罗斯几何老问题	2012-01	28.00	152
近代欧氏几何学	2012-03	48.00	162
罗巴切夫斯基几何学及几何基础概要	2012-07	28.00	188



# 哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室 已出版(即将出版)图书目录



书 名	出版时间	定 价	编 号
超越吉米多维奇——数列的极限	2009-11	48.00	58
Barban Davenport Halberstam 均值和	2009-01	40.00	33
初等数论难题集(第一卷)	2009-05	68.00	44
初等数论难题集(第二卷)(上、下)	2011-02	128.00	82,83
谈谈素数	2011-03	18.00	91
平方和	2011-03	18.00	92
数论概貌	2011-03	18.00	93
代数数论	2011-03	48.00	94
初等数论的知识与问题	2011-02	28.00	95
超越数论基础	2011-03	28.00	96
数论初等教程	2011-03	28.00	97
数论基础	2011-03	18.00	98
解析数论基础	2012-08	28.00	216
数论入门	2011-03	38.00	99
数论开篇	2012-07	28.00	194
解析数论引论	2011-03	48.00	100
基础数论	2011-03	28.00	101
超越数	2011-03	18.00	109
三角和方法	2011-03	18.00	112
谈谈不定方程	2011-05	28.00	119
整数论	2011-05	38.00	120
初等数论 100 例	2011-05	18.00	122
初等数论经典例题	2012-07	18.00	204
最新世界各国数学奥林匹克中的初等数论试题(上、下)	2012-01	138.00	144,145
算术探索	2011-12	158.00	148
初等数论(I)	2012-01	18.00	156
初等数论(II)	2012-01	18.00	157
初等数论(III)	2012-01	28.00	158
组合数学浅谈	2012-03	28.00	159
同余理论	2012-05	38.00	163
丢番图方程引论	2012-03	48.00	172



# 哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室

## 已出版(即将出版)图书目录



书 名	出版时间	定 价	编 号
历届 IMO 试题集(1959—2005)	2006-05	58.00	5
历届 CMO 试题集	2008-09	28.00	40
历届加拿大数学奥林匹克试题集	2012-08	38.00	215
历届美国数学奥林匹克试题集:多解推广加强	2012-08	38.00	209
历届国际大学生数学竞赛试题集(1994—2010)	2012-01	28.00	143
全国大学生数学夏令营数学竞赛试题及解答	2007-03	28.00	15
全国大学生数学竞赛辅导教程	2012-07	28.00	189
历届美国大学生数学竞赛试题集	2009-03	88.00	43
前苏联大学生数学竞赛试题及解答(上)	2012-04	28.00	169
前苏联大学生数学竞赛试题及解答(下)	2012-04	38.00	170
<b>整函数</b>	2012-08	18.00	161
俄罗斯初等数学问题集	2012-05	38.00	177
俄罗斯函数问题集	2011-03	38.00	103
俄罗斯组合分析问题集	2011-01	48.00	79
博弈论精粹	2008-03	58.00	30
多项式和无理数	2008-01	68.00	22
模糊数据统计学	2008-03	48.00	31
受控理论与解析不等式	2012-05	78.00	165
解析不等式新论	2009-06	68.00	48
反问题的计算方法及应用	2011-11	28.00	147
建立不等式的方法	2011-03	98.00	104
数学奥林匹克不等式研究	2009-08	68.00	56
不等式研究(第二辑)	2012-02	68.00	153
初等数学研究(I)	2008-09	68.00	37
初等数学研究(II)(上、下)	2009-05	118.00	46,47
中国初等数学研究 2009 卷(第 1 辑)	2009-05	20.00	45
中国初等数学研究 2010 卷(第 2 辑)	2010-05	30.00	68
中国初等数学研究 2011 卷(第 3 辑)	2011-07	60.00	127
中国初等数学研究 2012 卷(第 4 辑)	2012-07	48.00	190
数阵及其应用	2012-02	28.00	164
绝对值方程一折边与组合图形的解析研究	2012-07	48.00	186
不等式的秘密(第一卷)	2012-02	28.00	154
初等不等式的证明方法	2010-06	38.00	123
数学奥林匹克不等式散论	2010-06	38.00	124
数学奥林匹克不等式欣赏	2011-09	38.00	138
数学奥林匹克超级题库(初中卷上)	2010-01	58.00	66
数学奥林匹克不等式证明方法和技巧(上、下)	2011-08	158.00	134,135



# 哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室

## 已出版(即将出版)图书目录



书 名	出版时间	定 价	编号
500个最新世界著名数学智力趣题	2008-06	48.00	3
400个最新世界著名数学最值问题	2008-09	48.00	36
500个世界著名数学征解问题	2009-06	48.00	52
400个中国最佳初等数学征解老问题	2010-01	48.00	60
500个俄罗斯数学经典老题	2011-01	28.00	81
1000个国外中学物理好题	2012-04	48.00	174
300个日本高考数学习题	2012-05	38.00	142
500个前苏联早期高考数学试题及解答	2012-05	28.00	185

数学 我爱你	2008-01	28.00	20
精神的圣徒 别样的人生——60位中国数学家成长的历程	2008-09	48.00	39
数学史概论	2009-06	78.00	50
斐波那契数列	2010-02	28.00	65
数学拼盘和斐波那契魔方	2010-07	38.00	72
斐波那契数列欣赏	2011-01	28.00	160
数学的创造	2011-02	48.00	85
数学中的美	2011-02	38.00	84

最新全国及各省市高考数学试卷解法研究及点拨评析	2009-02	38.00	41
高考数学的理论与实践	2009-08	38.00	53
中考数学专题总复习	2007-04	28.00	6
向量法巧解数学高考题	2009-08	28.00	54
新编中学数学解题方法全书(高考复习卷)	2010-01	48.00	67
新编中学数学解题方法全书(高考真题卷)	2010-01	38.00	62
新编中学数学解题方法全书(高考精华卷)	2011-03	68.00	118
高考数学核心题型解题方法与技巧	2010-01	28.00	86
数学解题——靠数学思想给力(上)	2011-07	38.00	131
数学解题——靠数学思想给力(中)	2011-07	48.00	132
数学解题——靠数学思想给力(下)	2011-07	38.00	133
2011年全国及各省市高考数学试题审题要津与解法研究	2011-10	48.00	139
新课标高考数学——五年试题分章详解(2007~2011)(上、下)	2011-10	78.00	140,141
30分钟拿下高考数学选择题、填空题	2012-01	48.00	146
高考数学压轴题解题诀窍(上)	2012-02	78.00	166
高考数学压轴题解题诀窍(下)	2012-03	28.00	167





# 哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室 已出版(即将出版)图书目录



书 名	出 版 时 间	定 价	编 号
格点和面积	2012-07	18.00	191
射影几何趣谈	2012-04	28.00	175
斯潘纳尔引理——从一道加拿大数学奥林匹克试题谈起	即将出版		
李普希兹条件——从几道近年高考数学试题谈起	即将出版		
拉格朗日中值定理——从一道北京高考试题的解法谈起	2012-10	18.00	197
闵科夫斯基定理——从一道清华大学自主招生试题谈起	2012-10	18.00	198
哈尔测度——从一道冬令营试题的背景谈起	2012-08	28.00	202
切比雪夫逼近问题——从一道中国台北数学奥林匹克试题谈起	即将出版		
伯恩斯坦多项式与贝齐尔曲面——从一道全国高中数学联赛试题谈起	即将出版		
卡塔兰猜想——从一道普特南竞赛试题谈起	即将出版		
麦卡锡函数和阿克曼函数——从一道前南斯拉夫数学奥林匹克试题谈起	2012-08	18.00	201
贝蒂定理与拉姆贝克莫斯尔定理——从一个拣石子游戏谈起	2012-09	18.00	217
皮亚诺曲线和豪斯道夫分球定理——从无限集谈起	2012-08	18.00	211
平面凸图形与凸多面体	即将出版		
斯坦因豪斯问题——从一道二十五省市自治区中学数学竞赛试题谈起	2012-07	18.00	196
纽结理论中的亚历山大多项式与琼斯多项式——从一道北京市高一数学竞赛试题谈起	2012-07	28.00	195
原则与策略——从波利亚“解题表”谈起	即将出版		
转化与化归——从三大尺规作图不能问题谈起	2012-08	28.00	214
代数几何中的贝祖定理——从一道 IMO 试题的解法谈起	2012-07	18.00	193
成功连贯理论与约当块理论——从一道比利时数学竞赛试题谈起	2012-04	18.00	180
磨光变换与范·德·瓦尔登猜想——从一道环球城市竞赛试题谈起	即将出版		
素数判定与大数分解	2012-08	18.00	199
置换多项式及其应用	即将出版		
许瓦兹引理——从一道西德 1981 年数学奥林匹克试题谈起	即将出版		



# 哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室 已出版(即将出版)图书目录



书 名	出版时间	定 价	编号
椭圆函数与模函数——从一道美国加州大学洛杉矶分校(UCLA)博士资格考试谈起	即将出版		
差分方程的拉格朗日方法——从一道2011年全国高考理科试题的解法谈起	2012-08	28.00	200
拉姆塞定理——从王诗成院士的一个问题谈起	即将出版		
力学在几何中的一些应用	即将出版		
高斯散度定理、斯托克斯定理和平面格林定理——从一道国际大学生数学竞赛试题谈起	即将出版		
康托洛维奇不等式——从一道全国高中联赛试题谈起	即将出版		
西格尔引理——从一道第18届IMO试题的解法谈起	即将出版		
罗斯定理——从一道前苏联数学竞赛试题谈起	即将出版		
拉克斯定理和阿廷定理——从一道IMO试题的解法谈起	即将出版		
毕卡大定理——从一道美国大学数学竞赛试题谈起	即将出版		
贝齐尔曲线——从一道全国高中联赛试题谈起	即将出版		
拉格朗日乘子定理——从一道2005年全国高中联赛试题谈起	即将出版		
雅可比定理——从一道2005年全国高中联赛试题谈起	即将出版		
李天岩—约克定理——从一道波兰数学竞赛试题谈起	即将出版		
整系数多项式因式分解的一般方法——从克朗耐克算法谈起	即将出版		
布劳维不动点定理——从一道美国数学奥林匹克试题谈起	即将出版		
压缩不动点定理——从一道高考数学试题的解法谈起	即将出版		
伯恩赛德定理——从一道英国数学奥林匹克试题谈起	即将出版		
布查特—莫斯特定理——从一道上海市初中竞赛试题谈起	即将出版		
数论中的同余数问题——从一道普特南竞赛试题谈起	即将出版		
范·德蒙行列式——从一道美国数学奥林匹克试题谈起	即将出版		
中国剩余定理——从一道美国数学奥林匹克试题的解法谈起	即将出版		
牛顿程序与方程求根——从一道全国高考试题解法谈起	即将出版		
库默尔定理——从一道IMO预选试题谈起	即将出版		
卢丁定理——从一道冬令营试题的解法谈起	即将出版		
沃斯滕霍姆定理——从一道IMO预选试题谈起	即将出版		
卡尔松不等式——从一道莫斯科数学奥林匹克试题谈起	即将出版		
信息论中的香农熵——从一道近年高考压轴题谈起	即将出版		
约当不等式——从一道希望杯竞赛试题谈起	即将出版		
拉比诺维奇定理	即将出版		
刘维尔定理——从一道《美国数学月刊》征解问题的解法谈起	即将出版		



# 哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室 已出版(即将出版)图书目录



书 名	出 版 时 间	定 价	编 号
卡塔兰恒等式与级数求和——从一道 IMO 试题的解法谈起	即将出版		
勒让德猜想与素数分布——从一道爱尔兰竞赛试题谈起	即将出版		
天平称重与信息论——从一道基辅市数学奥林匹克试题谈起	即将出版		
艾思特曼定理——从一道 CMO 试题的解法谈起	即将出版		
一个爱尔特希问题——从一道西德数学奥林匹克试题谈起	即将出版		
有限群中的爱丁格尔问题——从一道北京市初中二年级数学竞赛试题谈起	即将出版		
贝克码与编码理论——从一道全国高中联赛试题谈起	即将出版		

中等数学英语阅读文选	2006-12	38.00	13
统计学专业英语	2007-03	28.00	16
统计学专业英语(第二版)	2012-07	48.00	193
幻方和魔方(第一卷)	2012-05	68.00	173
尘封的经典——初等数学经典文献选读(第一卷)	2012-07	48.00	205
尘封的经典——初等数学经典文献选读(第二卷)	2012-07	38.00	206

实变函数论	2012-06	78.00	181
初等微分拓扑学	2012-07	18.00	182
方程式论	2011-03	38.00	105
初级方程式论	2011-03	28.00	106
Galois 理论	2011-03	18.00	107
代数方程的根式解及伽罗瓦理论	2011-03	28.00	108
线性偏微分方程讲义	2011-03	18.00	110
N 体问题的周期解	2011-03	28.00	111
代数方程式论	2011-05	28.00	121
动力系统的不变量与函数方程	2011-07	48.00	137
基于短语评价的翻译知识获取	2012-02	48.00	168
应用随机过程	2012-04	48.00	187

闵嗣鹤文集	2011-03	98.00	102
吴从妍数学活动三十年(1951~1980)	2010-07	99.00	32

吴振奎高等数学解题真经(概率统计卷)	2012-01	38.00	149
吴振奎高等数学解题真经(微积分卷)	2012-01	68.00	150
吴振奎高等数学解题真经(线性代数卷)	2012-01	58.00	151
钱昌本教你快乐数学(上)	2011-12	48.00	155
钱昌本教你快乐数学(下)	2012-03	58.00	171

联系地址:哈尔滨市南岗区复华四道街10号 哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室

网 址:<http://lpj.hit.edu.cn/>

邮 编:150006

联系电话:0451-86281378 13904613167

E-mail:lpj1378@yahoo.com.cn



北航需要 C1650877

VIII

◎  
目  
录

第一编 差分方程的解及其应用

第0章	引言	//3
§1	基本问题	//4
§2	常系数线性齐次递推数列的通项	//6
§3	某些特殊的递推数列的通项	//8
第1章	和分与差分	//18
§1	差分	//18
§2	和分	//21
第2章	线性差分方程概论	//23
§1	差分方程	//23
§2	关于线性差分方程的解	//25
§3	拉格朗日变易常数法	//29
第3章	常系数线性差分方程	//33
§1	齐次方程	//33
§2	对称型齐次方程	//39
§3	非齐次方程	//42
§4	特殊的非齐次方程的特解	//46
§5	差分方程在结构力学上的应用	//51
§6	联立方程	//62
第4章	变系数线性差分方程	//68
§1	能化成常系数方程的情形	//68
§2	1阶齐次线性差分方程	//70
§3	Gamma - 函数	//73

- §4 系数为线性函数的差分方程的定积分解法 //76
- 第5章 线性偏差分方程 //88**
  - §1 线性偏差分方程的类型 //88
  - §2 线性偏差方程的一般解与边界条件 //91

## 第二编 差分方程解的稳定性

- 第6章 引言//95**
  - §1 用差分方程逼近微分方程 //95
  - §2 差分方程的稳定性概念 //99
  - §3 收敛性作为稳定性的推论 //103
- 第7章 差分方程的解收敛于微分方程的解//106**
  - §1 基本定义 //106
  - §2 收敛定理 //116
  - §3 所得结果的推广 //125



---

# 第一编

## 差分方程的解及其应用

---





## 引 言

# 第 0 章

1989年哈尔滨工业大学数学系曹珍富教授(当时是全国最年轻的副教授)与刘培杰讲师在哈尔滨师范大学主办的中学数学期刊——《中学数学教育》第4期上发表了一篇关于递推数列的小文章.当时哈尔滨由于哈师大附中学生罗炜刚获得IMO金牌而深受鼓舞,数学竞赛活动开展得十分热烈.作为黑龙江数学奥林匹克专家组组长的曹教授将其在省数学会举办的讲习班上的讲义让笔者整理后交给时任黑龙江省数学会普及工作委员会的贾广聚副教授经其推荐发表.标题是《递推数列一般项的求法》.

递推数列多年来一直是数学竞赛的命题来源,对于今天的参赛选手及教练来说已不是难点了.为了尊重历史,我们先全文摘录这篇23年前的小文章,然后再进行现实的联系并进而介绍差分方程理论的完整体系.并进一步介绍俄罗斯数学家在差分方程解的稳定性方面的前沿成果.

## 差分方程的拉格朗日方法

一个递推数列  $\{a_n\}$  是指给定  $a_1, \dots, a_k$ , 且有递推关系  $a_n = f(a_{n-1}, \dots, a_{n-k}), n = k+1, \dots$  的数列. 本章谈谈如何求这样数列的一般项.

### §1 基本问题

给定  $a_1$ , 求递推数列

$$a_n = pa_{n-1} + f(n) \quad (n \geq 2) \quad (1)$$

的一般项  $a_n (n = 2, 3, \dots)$  是一个基本问题.

当  $p = 1, f(n) = d$  (常数) 时, 式(1)退化为等差数列; 当  $f(n) = 0$  时, 式(1)退化为等比数列.

由式(1)可得

$$\begin{cases} a_n = pa_{n-1} + f(n) \\ a_{n-1} = pa_{n-2} + f(n-1) \\ \vdots \\ a_2 = pa_1 + f(2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_n = pa_{n-1} + f(n) \\ pa_{n-1} = p^2 a_{n-2} + pf(n-1) \\ \vdots \\ p^{n-2} a_2 = p^{n-1} a_1 + p^{n-2} f(2) \end{cases}$$

上面各式相加得数列(1)的一般项公式

$$\begin{aligned} a_n &= p^{n-1} a_1 + f(n) + pf(n-1) + \dots + p^{n-2} f(2) \\ &= p^{n-1} a_1 + \sum_{k=0}^{n-2} p^k f(n-k) \quad (n \geq 2) \end{aligned} \quad (2)$$

例1 给定  $a_1$  和  $a_n = pa_{n-1} + nq + r$  ( $p, q$  和  $r$  是常