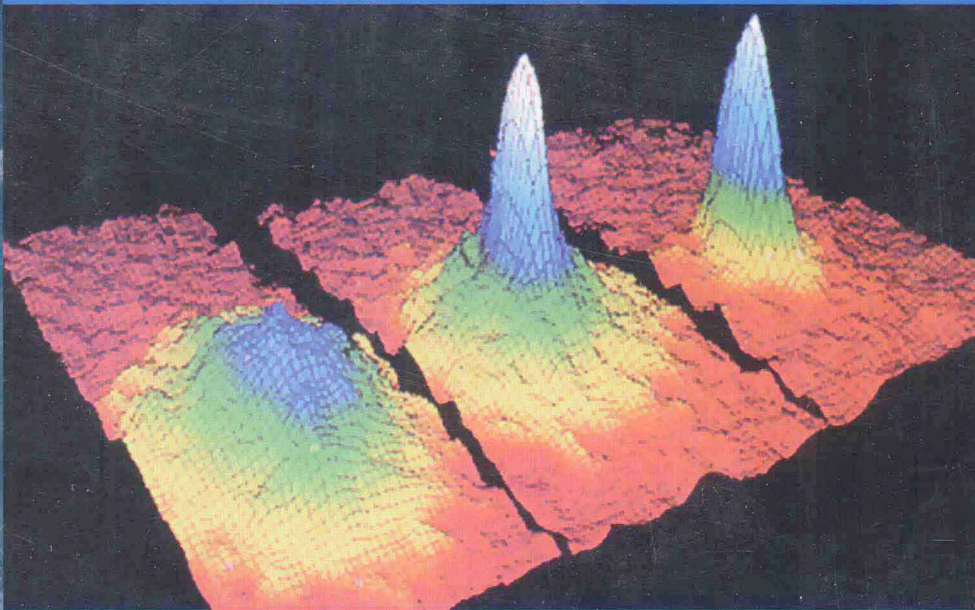




“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材配套参考书

热力学·统计物理(第五版) 学习辅导书

汪志诚



高等教育出版社

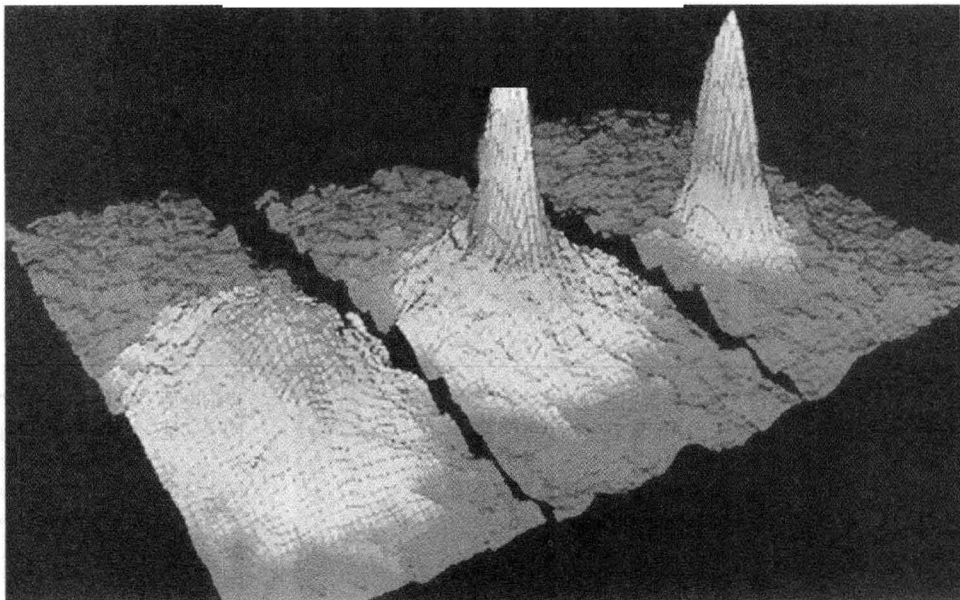
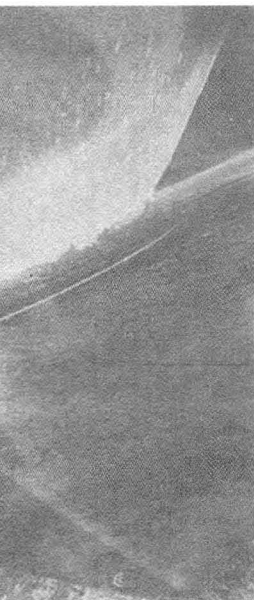


“十二五”普通高等教育本科国家级规划

热力学·统计物理(第五版) 学习辅导书

Relixue·Tongji Wuli Xuexi Fudaoshu

汪志诚



 高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容简介

本书是与《热力学·统计物理》(第五版)配套的学习辅导书。该书的主教材是被高校热力学统计物理课程广泛选用的一本经典教材。本书对主教材中的全部习题给出了分析和解题思路,对部分习题还介绍了科研实际中的背景,帮助学生加强对所学知识的理解,巩固和提高学习效果。

本书可供高等学校物理专业的师生作为教学和学习参考书使用,也可供其他相关专业的师生和社会读者参考。

图书在版编目(CIP)数据

热力学·统计物理(第5版)学习辅导书 / 汪志诚编.
—北京:高等教育出版社,2013.3
ISBN 978-7-04-035171-2

I. ①热… II. ①汪… III. ①热力学-高等学校-教学参考资料②统计物理学-高等学校-教学参考资料
IV. ①O414

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第232148号

策划编辑	马天魁	责任编辑	马天魁	封面设计	张楠	版式设计	余杨
责任绘图	尹莉	责任校对	李大鹏	责任印制	朱学忠		

出版发行 高等教育出版社
社址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印刷 高教社(天津)印务有限公司
开本 787mm × 960mm 1/16
印张 14.5
字数 270千字
购书热线 010-58581118

咨询电话 400-810-0598
网址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landaco.com>
<http://www.landaco.com.cn>
版次 2013年3月第1版
印次 2013年3月第1次印刷
定价 23.10元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物料号 35171-00

编写说明

本书是与编者编写的《热力学·统计物理》(第五版)配套的参考书。书中包含《热力学·统计物理》(第五版)教材中全部习题和一些补充题的解答。本书注重物理内涵的分析和物理背景的阐述,有的习题还介绍了有关的预备知识。希望本书对初学者学习热力学统计物理课程能有所帮助。

本书的编排与《热力学·统计物理》(第五版)教材一致,分为十一章。教材中原有的习题和补充题按习题内容统一编序。为了便于查阅,在编号后加了注,例如1-1(原1.1题),1-7(补充题)等。《热力学·统计物理》(第五版)教材中的公式和章节将不加说明直接引用,例如式(1.15.4),§2.7等,其他文献和书籍引用时将说明出处。

本书在编写过程中得到兰州大学物理学院领导的大力支持,在此表示衷心的感谢。

编者水平有限,书中错误和不足、不妥之处在所难免,欢迎读者指正。

编者

目 录

第一章	热力学的基本规律	1
第二章	均匀物质的热力学性质	24
第三章	单元系的相变	47
第四章	多元系的复相平衡和化学平衡 热力学第三定律	66
第五章	不可逆过程热力学简介	80
第六章	近独立粒子的最概然分布	89
第七章	玻耳兹曼统计	96
第八章	玻色统计和费米统计	135
第九章	系综理论	171
第十章	涨落理论	204
第十一章	非平衡态统计理论初步	215

第一章 热力学的基本规律

1-1 (原 1.1 题)

试求理想气体的体胀系数 α , 压强系数 β 和等温压缩系数 κ_T .

解 已知理想气体的物态方程为

$$pV = nRT, \quad (1)$$

由此易得

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = \frac{nR}{pV} = \frac{1}{T}, \quad (2)$$

$$\beta = \frac{1}{p} \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v = \frac{nR}{pV} = \frac{1}{T}, \quad (3)$$

$$\kappa_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T = \left(-\frac{1}{V} \right) \left(-\frac{nRT}{p^2} \right) = \frac{1}{p}. \quad (4)$$

1-2 (原 1.2 题)

试证明任何一种具有两个独立参量 T, p 的物质, 其物态方程可由实验测得的体胀系数 α 及等温压缩系数 κ_T , 根据下述积分求得:

$$\ln V = \int (\alpha dT - \kappa_T dp).$$

如果 $\alpha = \frac{1}{T}$, $\kappa_T = \frac{1}{p}$, 试求物态方程.

解 以 T, p 为自变量, 物质的物态方程为

$$V = V(T, p),$$

其全微分为

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p dT + \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T dp. \quad (1)$$

全式除以 V , 有

$$\frac{dV}{V} = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p dT + \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T dp.$$

根据体胀系数 α 和等温压缩系数 κ_T 的定义, 可将上式改写为

$$\frac{dV}{V} = \alpha dT - \kappa_T dp. \quad (2)$$

上式是以 T, p 为自变量的完整微分, 沿一任意的积分路线积分, 有

$$\ln V = \int (\alpha dT - \kappa_T dp). \quad (3)$$

如果实验测得 α 和 κ_T 作为 T, p 的函数, 由上式可得物质的物态方程。

若 $\alpha = \frac{1}{T}, \kappa_T = \frac{1}{p}$, 式(3)可表示为

$$\ln V = \int \left(\frac{1}{T} dT - \frac{1}{p} dp \right). \quad (4)$$

选择图 1-1 所示的积分路线, 从 (T_0, p_0) 积分到 (T, p_0) , 再积分到 (T, p) , 相应地, 体积由 V_0 最终变到 V , 有

$$\ln \frac{V}{V_0} = \ln \frac{T}{T_0} - \ln \frac{p}{p_0},$$

即

$$\frac{pV}{T} = \frac{p_0 V_0}{T_0} = C \text{ (常量)},$$

或

$$pV = CT. \quad (5)$$

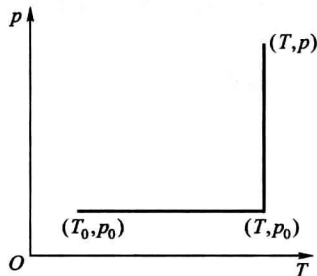


图 1-1

式(5)就是由所给 $\alpha = \frac{1}{T}, \kappa_T = \frac{1}{p}$ 求得的物态方程。

确定常量 C 需要进一步的实验数据。

1-3 (原 1.3 题)

简单固体和液体的体胀系数 α 和等温压缩系数 κ_T 数值都很小, 在一定温度范围内可以把 α 和 κ_T 看作常量. 试证明简单固体和液体的物态方程可近似表示为[式(1.3.14)]

$$V(T, p) = V_0(T_0, 0) [1 + \alpha(T - T_0) - \kappa_T p].$$

解 以 T, p 为状态参量, 物质的物态方程为

$$V = V(T, p).$$

根据习题 1-2 式(2), 有

$$\frac{dV}{V} = \alpha dT - \kappa_T dp. \quad (1)$$

将上式沿图 1-1 所示的路线求线积分, 在 α 和 κ_T 可以看作常量的情形下, 有

$$\ln \frac{V}{V_0} = \alpha(T - T_0) - \kappa_T(p - p_0), \quad (2)$$

或

$$V(T, p) = V(T_0, p_0) e^{\alpha(T - T_0) - \kappa_T(p - p_0)}. \quad (3)$$

考虑到 α 和 κ_T 的数值很小, 将指数函数展开, 准确到 α 和 κ_T 的线性项, 有

$$V(T, p) = V(T_0, p_0) [1 + \alpha(T - T_0) - \kappa_T(p - p_0)]. \quad (4)$$

如果取 $p_0 = 0$, 即有

$$V(T, p) = V(T_0, 0) [1 + \alpha(T - T_0) - \kappa_T p]. \quad (5)$$

1-4 (原 1.4 题)

在 0°C 和 1 atm ^① 下, 测得一铜块的体胀系数和等温压缩系数分别为 $\alpha = 4.85 \times 10^{-5}\text{ K}^{-1}$ 和 $\kappa_T = 7.8 \times 10^{-7}\text{ atm}^{-1}$. α 和 κ_T 可近似看作常量. 今使铜块加热至 10°C . 问:

(a) 压强要增加多少 atm 才能使铜块的体积维持不变?

(b) 若压强增加 100 atm, 铜块的体积改变多少?

解 (a) 根据 1-2 题式(2), 有

$$\frac{dV}{V} = \alpha dT - \kappa_T dp. \quad (1)$$

上式给出, 在邻近的两个平衡态, 系统的体积差 dV , 温度差 dT 和压强差 dp 之间的关系. 如果系统的体积不变, dp 与 dT 的关系为

$$dp = \frac{\alpha}{\kappa_T} dT. \quad (2)$$

在 α 和 κ_T 可以看作常量的情形下, 将式(2)积分可得

$$p_2 - p_1 = \frac{\alpha}{\kappa_T} (T_2 - T_1). \quad (3)$$

将式(2)积分得到式(3)首先意味着, 经准静态等体过程后, 系统在终态和初态的压强差和温度差满足式(3). 但是应当强调, 只要初态 (V, T_1) 和终态 (V, T_2) 是平衡态, 两态间的压强差和温度差就满足式(3). 这是因为, 平衡状态的状态参量给定后, 状态函数就具有确定值, 与系统到达该状态的历史无关. 本题讨论的铜块加热的实际过程一般不会是准静态过程. 在加热过程中, 铜块各处的温度可以不等, 铜块与热源可以存在温差等, 但是只要铜块的初态和终态是平衡态, 两态的压强和温度差就满足式(3).

将所给数据代入, 可得

$$p_2 - p_1 = \frac{4.85 \times 10^{-5}}{7.8 \times 10^{-7}} \times 10\text{ atm} = 622\text{ atm}.$$

因此, 将铜块由 0°C 加热到 10°C , 要使铜块体积保持不变, 压强要增加 622 atm.

(b) 1-3 题式(4)可改写为

$$\frac{\Delta V}{V_1} = \alpha(T_2 - T_1) - \kappa_T(p_2 - p_1). \quad (4)$$

① $1\text{ atm} = 101\,325\text{ Pa}$.

将所给数据代入,有

$$\begin{aligned}\frac{\Delta V}{V_1} &= 4.85 \times 10^{-5} \times 10 - 7.8 \times 10^{-7} \times 100 \\ &= 4.07 \times 10^{-4}.\end{aligned}$$

因此,将铜块由 0°C 加热至 10°C ,压强由 1 atm 增加 100 atm ,铜块体积将增加原体积的 4.07×10^{-4} 倍.

1-5 (原 1.5 题)

描述金属丝的几何参量是长度 L ,力学参量是张力 \mathcal{F} ,物态方程是

$$f(\mathcal{F}, L, T) = 0.$$

实验通常在 1 atm 下进行,其体积变化可以忽略.

线胀系数定义为

$$\alpha = \frac{1}{L} \left(\frac{\partial L}{\partial T} \right)_{\mathcal{F}}.$$

等温弹性模量定义为

$$E = \frac{L}{A} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial L} \right)_T,$$

其中 A 是金属丝的截面积. 一般来说, α 和 E 是 T 的函数,对 \mathcal{F} 仅有微弱的依赖关系,如果温度变化范围不大,可以看作常量. 假设金属丝两端固定,试证明,当温度由 T_1 降至 T_2 时,其张力将增加

$$\Delta \mathcal{F} = -EA\alpha(T_2 - T_1).$$

解 由物态方程

$$f(\mathcal{F}, L, T) = 0 \quad (1)$$

知偏导数间存在以下关系:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial T} \right)_{\mathcal{F}} \left(\frac{\partial T}{\partial \mathcal{F}} \right)_L \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial L} \right)_T = -1. \quad (2)$$

所以,有

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T} \right)_L &= - \left(\frac{\partial L}{\partial T} \right)_{\mathcal{F}} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial L} \right)_T \\ &= -L\alpha \cdot \frac{A}{L} E \\ &= -\alpha AE.\end{aligned} \quad (3)$$

积分得

$$\Delta \mathcal{F} = -EA\alpha(T_2 - T_1). \quad (4)$$

在 $T_2 < T_1$ 的情形下 $\Delta \mathcal{F}$ 是正的. 与 1-4 题类似,上述结果不限于保持金属丝长度不变的准静态冷却过程,只要金属丝的初态和终态是平衡态,两态的张力差

$$\Delta \mathcal{F} = \mathcal{F}(L, T_2) - \mathcal{F}(L, T_1)$$

就满足式(4),与经历的过程无关.

1-6 (原 1.6 题)

一理想弹性丝的物态方程为

$$\mathcal{F} = bT \left(\frac{L}{L_0} - \frac{L_0^2}{L^2} \right),$$

其中 L 是长度, L_0 是张力 \mathcal{F} 为零时的 L 值, 它只是温度 T 的函数, b 是常量. 试证明:

(a) 等温弹性模量为

$$E = \frac{bT}{A} \left(\frac{L}{L_0} + \frac{2L_0^2}{L^3} \right).$$

式中 A 是弹性丝的截面面积. 在张力为零时, $E_0 = \frac{3bT}{A}$.

(b) 线胀系数 α 为

$$\alpha = \alpha_0 - \frac{1}{T} \frac{\frac{L^3}{L_0^3} - 1}{\frac{L^3}{L_0^3} + 2},$$

其中 $\alpha_0 = \frac{1}{L_0} \frac{dL_0}{dT}$.

解 (a) 根据题设, 理想弹性丝的物态方程为

$$\mathcal{F} = bT \left(\frac{L}{L_0} - \frac{L_0^2}{L^2} \right), \quad (1)$$

由此可得等温弹性模量 E 为

$$\begin{aligned} E &= \frac{L}{A} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial L} \right)_T \\ &= \frac{L}{A} bT \left(\frac{1}{L_0} + \frac{2L_0^2}{L^3} \right) \\ &= \frac{bT}{A} \left(\frac{L}{L_0} + \frac{2L_0^2}{L^2} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

张力为零时, $L = L_0$, $E_0 = \frac{3bT}{A}$.

(b) 线胀系数 α 的定义为

$$\alpha = \frac{1}{L} \left(\frac{\partial L}{\partial T} \right)_{\mathcal{F}}$$

由链式关系知

$$\alpha = -\frac{1}{L} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T} \right)_L \left(\frac{\partial L}{\partial \mathcal{F}} \right)_T, \quad (3)$$

而

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T} \right)_L &= b \left(\frac{L}{L_0} - \frac{L_0^2}{L^2} \right) + bT \left(-\frac{L}{L_0^2} - \frac{2L_0}{L^2} \right) \frac{dL_0}{dT}, \\ \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial L} \right)_T &= bT \left(\frac{1}{L_0} + \frac{2L_0^2}{L^3} \right), \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \alpha &= -\frac{1}{L} \frac{b \left(\frac{L}{L_0} - \frac{L_0^2}{L^2} \right) - bT \left(\frac{L}{L_0^2} + \frac{2L_0}{L^2} \right) \frac{dL_0}{dT}}{bT \left(\frac{1}{L_0} + \frac{2L_0^2}{L^3} \right)} \\ &= \frac{1}{L_0} \frac{dL_0}{dT} - \frac{1}{T} \frac{\frac{L^3}{L_0^3} - 1}{\frac{L^3}{L_0^3} + 2}. \end{aligned} \quad (4)$$

1-7 (补充题)

在 0 °C 和 1 atm 下, 空气的密度为 $1.29 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. 空气的比定压热容 $c_p = 0.996 \times 10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, $\gamma = 1.41$. 今有 27 m^3 的空气, 试计算:

(a) 若维持体积不变, 将空气由 0 °C 加热至 20 °C 所需的热量.

(b) 若维持压强不变, 将空气由 0 °C 加热至 20 °C 所需的热量.

(c) 若容器有裂缝, 外界压强为 1 atm, 使空气由 0 °C 缓慢地加热至 20 °C 所需的热量.

解 (a) 由题给空气密度可以算得 27 m^3 空气的质量 m_1 为

$$m_1 = 1.29 \times 27 \text{ kg} = 34.83 \text{ kg}.$$

比定容热容可由所给比定压热容算出:

$$c_v = \frac{c_p}{\gamma} = \frac{0.996 \times 10^3}{1.41} \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} = 0.706 \times 10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}.$$

维持体积不变, 将空气由 0 °C 加热至 20 °C 所需热量 Q_v 为

$$\begin{aligned} Q_v &= m_1 c_v (T_2 - T_1) \\ &= 34.83 \times 0.706 \times 10^3 \times 20 \text{ J} \\ &= 4.920 \times 10^5 \text{ J}. \end{aligned}$$

(b) 维持压强不变, 将空气由 0 °C 加热至 20 °C 所需热量 Q_p 为

$$\begin{aligned}
 Q_p &= m_1 c_p (T_2 - T_1) \\
 &= 34.83 \times 0.996 \times 10^3 \times 20 \text{ J} \\
 &= 6.938 \times 10^5 \text{ J}.
 \end{aligned}$$

(c) 若容器有裂缝,在加热过程中气体将从裂缝漏出,使容器内空气质量发生变化. 根据理想气体的物态方程

$$pV = \frac{m}{M}RT,$$

M 为空气的平均摩尔质量,在压强和体积不变的情形下,容器内气体的质量与温度成反比. 以 m_1, T_1 表示气体在初态的质量和温度, m 表示温度为 T 时气体的质量,有

$$m_1 T_1 = mT,$$

所以在过程(c)中所需的热量 Q 为

$$\begin{aligned}
 Q &= c_p \int_{T_1}^{T_2} m(T) dT \\
 &= m_1 T_1 c_p \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} \\
 &= m_1 T_1 c_p \ln \frac{T_2}{T_1}.
 \end{aligned}$$

式中用比定压热容 c_p ,意味着已计及气体从裂缝漏出对外所做的功. 将所给数据代入,得

$$\begin{aligned}
 Q &= 34.83 \times 273 \times 0.996 \times 10^3 \times \ln \frac{293}{273} \text{ J} \\
 &= 6.696 \times 10^5 \text{ J}.
 \end{aligned}$$

1-8 (原 1.7 题)

抽成真空的小匣带有活门,打开活门让气体冲入. 当压强达到外界压强 p_0 时将活门关上. 试证明:小匣内的空气在没有与外界交换热量之前,它的内能 U 与原来在大气中的内能 U_0 之差为 $U - U_0 = p_0 V_0$,其中 V_0 是它原来在大气中的体积. 若气体是理想气体,求它的温度和体积.

解 将冲入小匣的气体看作系统. 系统冲入小匣后的内能 U 与其原来在大气中的内能 U_0 由式(1.5.3)

$$U - U_0 = W + Q \quad (1)$$

确定. 由于过程进行得很迅速,过程中系统与外界没有热量交换, $Q = 0$. 过程中外界对系统所做的功可以分为 W_1 和 W_2 两部分来考虑. 一方面,大气将系统压入小匣,使其在大气中的体积由 V_0 变为零. 由于小匣很小,在将气体压入小匣的过程中大气压强 p_0 可以认为没有变化,即过程是等压的(但不是准静态的). 过程

中大气对系统所做的功为

$$W_1 = -p_0 \Delta V = p_0 V_0.$$

另一方面,小匣既然抽为真空,系统在冲入小匣的过程中不受外界阻力,与外界也就没有功变换,则

$$W_2 = 0.$$

因此式(1)可表示为

$$U - U_0 = p_0 V_0. \quad (2)$$

如果气体是理想气体,根据式(1.3.11)和式(1.7.10),有

$$p_0 V_0 = nRT_0, \quad (3)$$

$$U_0 = \frac{nRT_0}{\gamma-1}, \quad U = \frac{nRT}{\gamma-1}. \quad (4)$$

式中 n 是系统所含物质的量. 代入式(2)即有

$$T = \gamma T_0. \quad (5)$$

活门是在系统的压强达到 p_0 时关上的,所以气体在小匣内的压强也可看作 p_0 , 其物态方程为

$$p_0 V = nR\gamma T_0. \quad (6)$$

与式(3)比较,知

$$V = \gamma V_0. \quad (7)$$

1-9 (原 1.8 题)

满足 $pV^n = C$ (常量)的过程称为多方过程,其中常数 n 称为多方指数. 试证明:理想气体在多方过程中的热容 C_n 为

$$C_n = \frac{n-\gamma}{n-1} C_V.$$

解 根据式(1.6.1),多方过程中的热容

$$C_n = \lim_{\Delta T \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta Q}{\Delta T} \right)_n = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_n + p \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_n. \quad (1)$$

对于理想气体,内能 U 只是温度 T 的函数,

$$\left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_n = C_V,$$

所以

$$C_n = C_V + p \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_n. \quad (2)$$

将多方过程的过程方程式 $pV^n = C$ 与理想气体的物态方程联立,消去压强 p 可得

$$TV^{n-1} = C_1 (\text{常量}). \quad (3)$$

将上式微分,有

$$V^{n-1} dT + (n-1) V^{n-2} T dV = 0,$$

所以

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_n = -\frac{V}{(n-1)T}. \quad (4)$$

代入式(2), 即得

$$\begin{aligned} C_n &= C_v - \frac{pV}{T(n-1)} \\ &= \frac{n-\gamma}{n-1} C_v, \end{aligned} \quad (5)$$

其中用了式(1.7.8)和式(1.7.9).

1-10 (原 1.9 题)

试证明, 理想气体在某一过程中的热容 C_n 如果是常量, 该过程一定是多方过程. 多方指数 $n = \frac{C_n - C_p}{C_n - C_v}$. 假设气体的定压热容和定容热容是常量.

解 根据热力学第一定律, 有

$$dU = dQ + dW. \quad (1)$$

对于准静态过程有

$$dW = -pdV,$$

对理想气体有

$$dU = C_v dT,$$

气体在过程中吸收的热量为

$$dQ = C_n dT,$$

因此式(1)可表示为

$$(C_n - C_v) dT = pdV. \quad (2)$$

用理想气体的物态方程 $pV = \nu RT$ 除上式, 并注意 $C_p - C_v = \nu R$, 可得

$$(C_n - C_v) \frac{dT}{T} = (C_p - C_v) \frac{dV}{V}. \quad (3)$$

将理想气体的物态方程全式求微分, 有

$$\frac{dp}{p} + \frac{dV}{V} = \frac{dT}{T}. \quad (4)$$

式(3)与式(4)联立, 消去 $\frac{dT}{T}$, 有

$$(C_n - C_v) \frac{dp}{p} + (C_n - C_p) \frac{dV}{V} = 0. \quad (5)$$

令 $n = \frac{C_n - C_p}{C_n - C_v}$, 可将式(5)表示为

$$\frac{dp}{p} + n \frac{dV}{V} = 0. \quad (6)$$

如果 C_p, C_v 和 C_n 都是常量, 将上式积分即得

$$pV^n = C \text{ (常量)}. \quad (7)$$

式(7)表明, 过程是多方过程.

1-11 (原 1.10 题)

声波在气体中的传播速度为

$$a = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s}.$$

假设气体是理想气体, 其定压和定容热容是常量. 试证明气体单位质量的内能 u 和焓 h 可由声速 a 及 γ 给出:

$$u = \frac{a^2}{\gamma(\gamma-1)} + u_0,$$

$$h = \frac{a^2}{\gamma-1} + h_0,$$

其中 u_0, h_0 为常量.

解 根据式(1.8.9), 声速 a 的平方为

$$a^2 = \gamma p v, \quad (1)$$

其中 v 是单位质量的气体体积. 理想气体的物态方程可表示为

$$pV = \frac{m}{M}RT,$$

式中 m 是气体的质量, M 是气体的摩尔质量. 对于单位质量的气体, 有

$$pv = \frac{1}{M}RT, \quad (2)$$

代入式(1)得

$$a^2 = \frac{\gamma}{M}RT. \quad (3)$$

以 u, h 表示理想气体的比内能和比焓(单位质量的内能和焓). 由式(1.7.10)一式(1.7.12)知

$$Mu = \frac{RT}{\gamma-1} + Mu_0,$$

$$Mh = \frac{\gamma RT}{\gamma-1} + Mh_0. \quad (4)$$

将式(3)代入, 即有

$$u = \frac{a^2}{\gamma(\gamma-1)} + u_0,$$

$$h = \frac{a^2}{\gamma - 1} + h_0. \quad (5)$$

式(5)表明,如果气体可以看作理想气体,测定气体中的声速 a 和 γ 即可确定气体的比内能和比焓.

1-12 (原 1.11 题)

大气温度随高度降低的主要原因是在对流层中不同高度之间的空气不断发生对流. 由于气压随高度而降低,空气上升时膨胀,下降时收缩. 空气的导热系数很小,膨胀和收缩的过程可以认为是绝热过程. 试计算大气温度随高度的变化率 $\frac{dT}{dz}$, 并给出数值结果.

解 取 z 轴沿竖直方向(向上). 以 $p(z)$ 和 $p(z+dz)$ 分别表示在竖直高度为 z 和 $z+dz$ 处的大气压强. 二者之差等于两个高度之间由大气重量产生的压强, 即

$$p(z) = p(z+dz) + \rho(z)g dz, \quad (1)$$

式中 $\rho(z)$ 是高度为 z 处的大气密度, g 是重力加速度. 将 $p(z+dz)$ 展开, 有

$$p(z+dz) = p(z) + \frac{d}{dz} p(z) dz,$$

代入式(1), 得

$$\frac{d}{dz} p(z) = -\rho(z)g. \quad (2)$$

式(2)给出由于重力的存在导致的大气压强随高度的变化率.

以 M 表示大气的平均摩尔质量. 在高度为 z 处, 大气的摩尔体积为 $\frac{M}{\rho(z)}$, 则物态方程为

$$p(z) \frac{M}{\rho(z)} = RT(z), \quad (3)$$

$T(z)$ 是竖直高度为 z 处的温度. 代入式(2), 消去 $\rho(z)$ 得

$$\frac{d}{dz} p(z) = -\frac{Mg}{RT(z)} p(z). \quad (4)$$

由式(1.8.6)易得气体在绝热过程中温度随压强的变化率为

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{T}{p}. \quad (5)$$

温度随高度降低是气压随高度降低导致空气上升绝热膨胀的结果, 所以

$$\frac{d}{dz} T(z) = \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)_s \frac{d}{dz} p(z).$$

将式(4)和式(5)代入, 得

$$\frac{d}{dz}T(z) = -\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{Mg}{R}. \quad (6)$$

大气的 $\gamma=1.41$ (大气的主要成分是氮和氧,都是双原子分子),平均摩尔质量为 $M=29 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$, $g=9.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$,代入式(6)得

$$\frac{d}{dz}T(z) = -10 \text{ K} \cdot \text{km}^{-1}. \quad (7)$$

式(7)表明,每升高 1 km,大气温度降低 10 K. 这结果是粗略的. 由于各种没有考虑的因素(主要是空气上升膨胀时水蒸气凝结放热的影响),实际每升高 1 km,大气温度降低 6 K 左右.

1-13 (原 1.12 题)

假设理想气体的 C_p 和 C_v 之比 γ 是温度的函数. 试求在准静态绝热过程中 T 和 V 的关系. 该关系式中要用到一个函数 $F(T)$,其表达式为

$$\ln F(T) = \int \frac{dT}{(\gamma-1)T}.$$

解 根据式(1.8.1),理想气体在准静态绝热过程中满足

$$C_v dT + p dV = 0. \quad (1)$$

用物态方程 $pV=nRT$ 除上式,第一项用 nRT 除,第二项用 pV 除,可得

$$\frac{C_v}{nR} \frac{dT}{T} + \frac{dV}{V} = 0. \quad (2)$$

利用式(1.7.8)和式(1.7.9),

$$\begin{aligned} C_p - C_v &= nR, \\ \frac{C_p}{C_v} &= \gamma, \end{aligned}$$

可将式(2)改写为

$$\frac{1}{\gamma-1} \frac{dT}{T} + \frac{dV}{V} = 0. \quad (3)$$

将上式积分,如果 γ 是温度的函数,定义

$$\ln F(T) = \int \frac{1}{\gamma-1} \frac{dT}{T}, \quad (4)$$

可得

$$\ln F(T) + \ln V = C_1 (\text{常量}), \quad (5)$$

或

$$F(T)V = C (\text{常量}). \quad (6)$$

式(6)给出当 γ 是温度的函数时,理想气体在准静态绝热过程中 T 和 V 的关系.