中学数学的现代思想

刘云章 马 复 编著

人民教育出版社

中学数学的现代思想

刘云章
马　复　编著

人民教育出版社

中学数学的现代思想

刘云章　马　复　编著

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 787×1092 1/32　印张 9.375　字数 195,000

1986 年 12 月第 1 版　1988 年 1 月　第 1 次印刷

印数 00,001— 4,400

ISBN7-107-10131-5/G·876　定价 1.40 元

前　　言

数学的发展大体上可分为五个时期：萌芽时期，初等数学时期，变量数学时期，近代数学时期及现代数学时期。现今中学数学的主要内容是初等数学。

师范院校数学系的毕业生，怎样运用所学的现代数学知识指导中学教学，是一个老大难课题。中学数学教学要面向现代化就要注意运用现代数学知识指导教学。很多现代数学知识本身是无法同中学生讲的，但是，我们可以抓住数学思想。现代数学里的很多概念与方法都萌芽于初等数学，而初等数学很多问题的彻底解决又依赖于现代数学。如果我们能够熟悉有关数学思想的古往今来，并能用以指导工作，这对于培养创造型人才，无疑是有益的。撰写本书的目的就在于剖析中学数学里的现代数学思想，试图能给读者一些启发。

本书的一稿、二稿是南京师范大学数学系选修课教材，后来为了适应更一般的需要，才修订成此稿。

在本书撰写过程中，自始至终得到马明同志的热情指导与帮助；黄开斌教授、吴顺唐副教授、张永康副教授、朱平天副教授、宣立新副教授以及周冠廷、薛大庆等同志审阅了原稿，并提出了许多中肯的意见，吴顺唐副教授还提供了宝贵资料；童邨、蔡淑琴及张德山等同志为本书的撰写做了许多具体工作。特别值得指出的是，单墫博士在审稿过程中对初稿提出了许多详尽的宝贵意见。在此一并表示感谢。

作为一种探索，本书难免有不妥之处，敬请专家、读者多多指正。

作者

1986.9.26.

目　录

第一章　《几何原本》与现代公理法

一般，在数学研究中有两种方法引入新概念，即构造法(如导数与定积分的定义)与公理法。这里结合中学内容谈谈公理法及其思想源流。

§1　中学数学的两个问题

一、集合概念问题。现代数学中，其涉及的每个研究对象实质上是一个集合。集合论已构成全部数学的基础。目前，集合概念已渗透到中学课本里。但是，中学生所接触到的集合知识，均属“朴素集合论”的范畴，“朴素集合论”的理论基础是不严密的。英国人罗素早就指出了这个问题。

罗素把集分为两种，第一种集——集本身不是它的元素($M\overline{\in}M$)；第二种集——集本身是它的一个元素($M\in M$)。

显然，每一集，不是第一种就是第二种，两者必居其一，设第一种集的全体构成一集 Q。那么，集 Q 属哪一种集呢？

假如 Q 是第一种集，那末 Q 应该是 Q 的一元素，即

$$Q\in Q \tag{1}$$

然而，满足 $M\in M$ 的关系的集应为第二种集。矛盾。

假如 Q 是第二种集，那么(1)又成立，但是 Q 的任何元素都是第一种集，因而 Q 又是第一种集了。这又矛盾。

这称为罗素的悖论。朴素集合论里含有悖论，就难以作为数学的基础，这就要求人们对集合概念给出明确无误的论述。集合论的公理系统排除了这一矛盾，其主要方法是用一组公理来澄清集合的意义和集合应有的性质。在这组公理之下，上述“第二种集”就不能称为集合。这项研究工作的创始人是德国人策墨罗。

二、自然数的定义问题。人类很早就引用了自然数，自然数本身看来是最简单的数，但对它下定义却不容易，那么，为什么要给自然数下定义呢？很多与自然数有关的命题，单靠直接验证是困难的或者是不可靠的。有些命题对于很多自然数都成立，那么是否能保证对一切自然数都成立呢？不一定，还有一些问题，靠直接验证是无法解决的。例如，要证明等式

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1),$$

对于一切自然数 n 都成立，我们就不能将所有自然数直接代入这个等式去检验。当然，可以应用数学归纳法来证明。但是，数学归纳法本身的合理性又该怎样证明呢？这就要求给出自然数的严密定义。1889 年意大利人皮亚诺用公理法给出了自然数的密度定义(见第三章)。皮亚诺的公理是数学归纳法的基础。

以上两个问题的解决都牵涉到“公理法”。

§2 什么叫公理法

所谓公理法就是：先提出一些原始概念，如几何中的点、直线、平面之类。再规定这些概念之间要适合哪些关系，如两点确定一直线，两条直线相交只有一个交点等，这些关系便称为公理。公理适合三个条件——第一，完备性，即为了在论证中避免引进直观起见，在拟定公理时，必须有着足够多的公理，不需加入新的公理就能建立所要的结论；第二，独立性，即其中的任一公理不能由此公理外的其它公理推得；第三，相容性，即由这组公理不会推得互相矛盾的结论。根据这些公理用逻辑推理的办法来建立一系列命题，把有关的数学分支建立为演绎系统。以上方法叫公理法，用公理法给出的定义叫公理化定义。

我们在日常生活中经常使用"公理法"。就用棋类活动来讲，每种棋，总有一些基本元素，如象棋中的车、马、炮之类，还有一套竞赛规则。竞赛双方必须根据规则进行"逻辑活动"。这就是公理法的思想，一套竞赛规则就是一组"公理"。难怪人们说"爱下棋的人，有数学头脑。"

公理法中的原始概念和关系的具体属性是不加规定的，它们的意义都用公理来约制、反映。这样做是为了揭示本质不同的各种空间形式和数量关系中的一般性的东西，把具有具体数学内容的推理相应地改变为简明扼要的形式逻辑的推理。逻辑代数的公理系统是比较典型的例子。不过，考虑到中学生的接受能力，中学课本里曾借助实例对原始概念和关

系加以解说，表面上没有采用公理系统的形式。

人们在研究空间形式和数量关系时，逐步积累数学知识，为了将知识加工、整理，使之系统化，必须从大量数学概念中提炼出少数原始概念来作为其它概念的逻辑出发点，从大量的命题中提炼出少数基本命题来作为其它命题的逻辑出发点，这样就产生公理法。可见，公理不是数学的“发源地”，恰恰相反，数学研究只有在历史发展的一定阶段上，当数学知识积累到一定的程度，某一方面的理论大体为人们所认识的时候，才有可能运用公理法进行概括、总结，即由来自科学实践的公理出发，进行逻辑推理，形成理论的系统。正如恩格斯所说:“数学上的所谓公理，是数学需要用作自己的出发点的少数思想上的规定”。

中学课本里，有时也把定理列为公理作为出发点。例如，《立体几何》里关于直线与平面的公理 4（平行于同一条直线的两条直线互相平行）*实际上就是个定理，可以由其它公理推出。课本中把它作为公理是为了教学上的方便。应该注意，这样的公理系统失去了独立性。

§3 现代公理法的思想源流

一、公理法的雏形——《几何原本》

公理化方法在现代数学中已占有统治地位，而公理法的思想却源出于两千年前古希腊的几何。古埃及人的测地术随

* 高中《立体几何》(乙种本)第 11 页。

着贸易和航海事业的发展而传入希腊，古希腊人把测量技术扩大了应用范围。他们感到孤立的、片断的经验不够用，要求有比较全面的、系统的几何知识，从而在几何中开始使用逻辑方法。当时的数学家柏拉图与哲学家亚里斯多德都主张几何学应有自己的逻辑结构。逻辑方法进入数学迅速推动了数学发展，并促进了数学从实践经验向系统理论的转化。在公元前七世纪到公元前三世纪的三四百年间，古希腊人积累了许多几何事实，阐明了几何事实之间的许多关系，创用了多种证明方法(如分析法、演绎法、归纳法和归谬法等)，这个期间的几何已经具有系统的抽象理论的风格。在这种背景下，到了公元前三世纪，欧几里德把前人的庞大资料加以系统化，写出杰作《几何原本》。这里，亚里斯多得的演绎逻辑为欧几里德编写《原本》提供了逻辑工具。欧几里德竭力追求命题之间严密的逻辑系统，他由人们实践中总结出来的少数概念、公理出发，运用逻辑推理的方法，将其它几何知识推导出来，建立了几何学演绎体系。《原本》是那个时代的逻辑方法和数学相结合的产物，是现代公理法的雏形，现今，中学课本里的平几内容大多仍属于《原本》范围。

由于客观条件的限制，欧几里德没有完全实现他的理想，《原本》在逻辑结构上还存在缺点，它的公理个数太少了或者说它的公理系统是不完备的，缺少连续性、运动和顺序公理，因而有时不得不借助于直观，对于某些概念，如点、直线、平面虽然作了解说却是含糊其词的。

二、非欧几何的发现

欧几里德之后的数学家们早就看到《原本》的一些缺点并

设法改进，人们觉察到《原本》的公理和公设*在极大程度上都是浅显明白的，但第五公设(其等价命题就是“在一平面上通过已知直线外的一点只可引一条直线，使与原有的直线不相交。”)却是一个例外，它的内容不浅显，并且在整个《原本》里仅使用了一次。这就意味着欧几里德处于无可奈何的情况下才把它看作公设的。这样，人们就怀疑第五公设是否能从其它命题逻辑推导出来。如若可能，就该从公设的系统里排除出去，而把它安排为定理，似乎这也是《原本》的一个缺点。因此人们作出各种不同的尝试，想证明这一命题，几百年中，许多人进行这一工作都宣告失败。这就启发人们改用反证法，从第五公设的相反情况着手，追究它能否推出谬误，如果不能的话，又会得出怎样的结果呢？根据这样的想法，经过迂回曲折的过程，终于导致新几何的产生。在这种几何里，保留欧几里德的各个公设和公理，但否定了第五公设及其等价命题，而代之以意义相反的一个公设：“在一平面上通过已知直线外的一点，至少可引两条直线都与原有的直线不相交。”这就出现了一种非欧几何系统，人们把它称为罗巴切夫斯基几何，简称罗氏几何。之后，德国人黎曼又提出了另一种不同于罗氏几何的新假设：“在一平面上通过已知直线外的一点，不可能引出一条直线使与原有的直线不相交。”而引出另一种非欧几何即黎曼几何(当然，现今《黎曼几何》的内容，已有极大更新)。

三、现代公理法的形成

改进欧几里德公理法的问题和解决欧几里德第五公设的

---

* 现代数学里公理和公设合称为公理。

问题具有同样悠久的历史。第五公设的问题由于非欧几何的发现而解决了。但改进欧几里德公理法的问题，却在非欧几何获得公认之后，才开始提出。因为，本来人们对于几何公理总是看作一成不变的，罗巴切夫斯基对公理体系进行的工作导致了几何基础这门数学的兴起。它研究可以作为基础的概念和原则，分析公理系统的三个基本问题——完备性、独立性和相容性。德国人希尔伯特总结前人工作，写出划时代的名著《几何基础》，用现代观点建立了欧几里德几何的公理体系。

前面讲过，希腊人已经把几何学当作演绎科学，一旦规定了少数公理，一切可以按照纯粹的逻辑步骤推演下去。欧几里德和希尔伯特都遵循并贯彻这个纲领。但是欧几里德的公理系统远远不完备，而希尔伯特的公理系统是完备的，在演绎过程中没有漏洞。欧几里德试图给公理所讨论的基本对象及关系以一种描述性的定义，这是不可能的。问题在于解说各个概念不能局限于定义的形式，因为下定义要用到另一个概念，而这一个概念也要有它的定义，这样势必无止境的追求下去。因此，希尔伯特抛弃欧几里德的打算，选定点、直线、平面作为原始概念，并且把原始概念之间的“属于”、“介于”、“全等于”作为基本关系，然后使用它们定义几何学里的其它概念，至于这些原始概念与关系不再使用定义的形式而改用完整的一套公理*来制约它们的意义，这些原始概念和关系的一切特性，凡在几何学中所必需的，都用公理来反映，至于它们的其它特性就不加规定，这样就形成了现代公理法。现今，中学课

* 希尔伯特公理体系中包括结合公理、顺序公理、合同公理、平行公理及连续公理共五组。

本里把点、线、面等作为原始概念而不加定义，正是现代公理法的精神。从现代公理法的观点来看，几何学的点、直线和平面可以理解为任何东西，只要它们适合基本关系，满足整套公理的要求就行。事实上，原始概念与关系可以容许有许多不同的具体解释而使公理确实成立。例如，假设在由某些分支点连结起来的 n 个支路的电路中，其上的电流分布视为一个向量，而单位时间内电流所放出的焦耳热量可以是向量长度的平方。这样 n 维欧几里德向量几何的公理是成立的。再从光谱的颜色中来看，经验表明，人的正常色彩感觉是由红、绿、蓝三种基本感觉合成的，这种感觉可以随着红、绿、蓝各组成部分的强度的改变而连续地在三个方向变化，如果把一切颜色的集合看成是一个三维空间(称为“颜色空间”)，那么，当我们给这个“空间”的形状(点、线段)和关系(在…之间，较近)以相应的解释后，欧氏几何公理体系的某些关系便适用于颜色空间。对这种颜色空间的研究，颇有实际价值，它属于《色度学》范畴。

必须指出，现代公理法的形成，除掉受几何变革的影响外，还与十九世纪整个数学发展的形势有关。当时，数学研究的对象不断扩大，各门数学分支的理论逐渐被人们所认识，各分支的概念之间的相似处日益增多。以数学分析和几何为例，分析各个分支的概念之间，分析和几何的概念之间都出现不少相似之处，人们开始把分析概念和方法几何化。就连函数也被看作“函数空间”的点或矢量，分析的许多事实可由几何方法获得证明或被推测出来。这样又促进了几何概念的推广，引出各种抽象空间。类似的情况也出现在代数等其它学

科中，因此数学理论工作者，不仅要对不同质的物理模型进行抽象概括，而且也要对已有的各数学分支中不同质的数学模型进行抽象概括。正是为了适应这种需要，现代公理法撇开数学对象的具体内容，把本质不同的各种具体模型中一般性的东西，用一组公理表示出来。

§4 现代公理法的作用

现代数学有三大特点：高度的抽象性，应用的广泛性及体系的严谨性。这与数学中运用了比较完善和严密的逻辑分析是分不开的。现代公理法是研究数学分支理论系统的逻辑结构的特殊工具，它在各种应用中高度发挥了抽象概括与逻辑分析的双重功能。

一、公理法是加工、整理知识的工具，公理系统的形成是数学分支发展的新起点。

一个数学分支从积累感性知识到总结出一组公理，初步形成公理化的理论系统，标志着认识由感性阶段到理性阶段的飞跃，公理系统的产生并不是这个分支理论发展的终结，而是它发展的一个新的起点。一组公理一经确定，这个分支的理论就在这组公理的制约下，按照其内在的必然的逻辑，相对独立地发展下去。以这些公理作为基本的逻辑出发点，就能合乎逻辑地推导出一系列新命题、新结论。只要公理是有一定实践基础的，而不是主观臆想的东西，正确地运用逻辑规律从它们引出的结论也是正确的。从这个意义上来讲，公理法在数学中不仅仅是一种整理加工的工具，而且也是获得新知识

的一种手段。以概率论为例，本世纪初，概率论的各个领域已获得了大量的成果，而且人们对概率论在其它基础学科和工程技术上的应用也越来越感兴趣，但是，直到那时为止，关于概率论的一些基本概念——事件，概率等等——却没有明确的定义，这是一个很大的矛盾，正由于这种矛盾，才导致贝特朗奇论那样的“怪事”，这就使许多人对概率的客观含义甚至概率论结论的可应用性都产生了怀疑。因此可以说那时的概率论（所谓古典概率）作为一个数学分支来说，还缺乏严格的理论基础，这就大大妨碍了它的进一步发展（现在中学课本里所介绍的概率就是古典概率）。经过人们长期的研究，发现事件的运算与集合的运算完全相似，概率与测度有相同的性质。另外，十九世纪以来，数学的各个分支广泛流行一股公理化潮流，在这种背景下，1933 年，苏联人柯尔莫哥洛夫以勒贝格测度为基础，给出了概率论的公理体系，明确定义了基本概念，使概率论成为严谨的数学分支，对近几十年来概率论的迅速发展起了推动作用。再看微积分的发展史，在十七、十八世纪，微积分应用已很广泛，可是一些定理和公式的推导，在逻辑上前后矛盾，不好理解，这种矛盾集中表现在无穷小量这个概念上，无穷小量是微积分的基本概念之一，牛顿在一些典型的推导过程中，第一步，他要用无穷小量作分母进行除法，第二步，他又把无穷小量写作零，以去掉那些包含着它的项，而得到所要的公式。在力学和几何的应用中证明了这些公式是正确的，但是推导过程本身却自相矛盾。无穷小量究竟是零还是非零呢，如果它是零，怎么能用它去做除法呢？如果它不是零，又怎么能把包含它的那些项去掉呢？正因这种逻辑上的矛盾，当时

的微积分曾一度受到人们的怀疑和攻击。经过一百多年的争论,直到十九世纪上半叶,极限理论建立后,微积分才有了严密的理论基础。从此,微积分的发展进入了一个新的阶段,而且在思想上和方法上深刻地影响了近代数学的发展。极限概念又是建立在实数概念基础之上的,怎样建立实数理论呢,除各种构造性定义外,最完美的还是实数的公理化定义,它不仅解决了极限理论的基础问题,还为发展推广微积分的方法打下基础。1960 年,美国数学家 A·鲁滨逊就是以实数的公理系统为基础,使用数理逻辑的严谨的方法,处理了莱布尼兹的实无限小和无限大数,创立了《非标准分析》,这是当代数学的一个新领域。

二、公理法有助于发现新的数学成果

在公理化定义中,原始概念和关系的具体含义是不加确定的,因此暂时摆脱了各种数学原型的具体内容和非本质因素的局限。就有利于把人们所关心的某一特定侧面的数学本质集中反映出来,而得到新的数学成果。这些成果可以远远超出人们直观范围。在数学发展史上有不少事例表明,从一定的基本原理出发推导出来的某些数学结果可能在一段时间内由于在现实世界中找不到合理的解释而被搁置起来甚至受到人们的非议,它的合理解释和应用在以后若干年才被发现。这是因为有些数学理论对现实世界规律性的反映比较隐晦曲折,人们可能暂时看不清它与现实世界的联系。罗氏几何的发现是最典型的例子。罗氏几何诞生于 1826 年,但人们不能深信其确实存在,后来,由于相对论和天文学的发展,到 1868 年意大利人贝特拉米才证明罗氏几何可以实现在欧氏空间的