考研数学复习指导系列丛书

2014 考研数学

提高篇

常考问题的快捷解法

与综合题解析

（数学二）

陈启浩 编著

不难学会的技巧

很难言表的精妙

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

013048253

013-44
491
V2 2014

考研数学复习指导系列丛书

2014 考研数学提高篇 常考问题的快捷解法与综合题解析（数学二）

陈启浩　编著

北京航空航天大学
藏书
图书馆

013-44
491
V2
2014

机 械 工 业 出 版 社

北航　C1656365

本书是考研数学二的复习参考书，适合考研数学第二阶段复习时使用．本书针对18大类常考的问题，详细讲解了针对每一类问题的快捷解法，同时分析了针对该类问题的各种综合题形式．考生跟随本书学习可以提高对知识的理解与应用能力，对各种较难问题的处理也能做到心中有数．阅读本书前最好已经进行过一轮基础知识的复习，这样学习起来更有心得，更能较快地领会和掌握各种解题方法．

图书在版编目（CIP）数据

2014考研数学提高篇常考问题的快捷解法与综合题解析．数学二/陈启浩编著．—北京：机械工业出版社，2013.6
（考研数学复习指导系列丛书）
ISBN 978-7-111-42731-5

Ⅰ.①2… Ⅱ.①陈… Ⅲ.①高等数学－研究生－入学考试－题解
Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字（2013）第115428号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号　邮政编码100037）
策划编辑：韩效杰　责任编辑：韩效杰　李　乐
版式设计：霍永明　封面设计：路恩中
责任印制：乔　宇
北京机工印刷厂印刷（三河市南杨庄国丰装订厂装订）
2013年6月第1版第1次印刷
184mm×260mm·12.5印张·303千字
标准书号：ISBN 978-7-111-42731-5
定价：29.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务	网络服务
社服务中心：（010）88361066	教材网：http：//www.cmpedu.com
销售一部：（010）68326294	机工官网：http：//www.cmpbook.com
销售二部：（010）88379649	机工官博：http：//weibo.com/cmp1952
读者购书热线：（010）88379203	**封面无防伪标均为盗版**

考研数学复习指导系列丛书介绍

为了帮助同学们在考研复习时，能够在较为紧张的时间安排下，有效加深概念与理论的理解，熟练掌握解题方法与技巧，针对考研同学的实际需要，我社特组织出版了由北京邮电大学陈启浩教授编写的“考研数学复习指导系列丛书”.

本套丛书分别针对参加数学一、数学二和数学三考试的同学，其中针对数学二考试的包括三本书，分别是：

《2014 考研数学真题篇（数学二） 十年真题精解与热点问题》

《2014 考研数学基础篇 常考知识点解析（数学二）》

《2014 考研数学提高篇 常考问题的快捷解法与综合题解析（数学二）》

本套丛书是陈教授在对全国硕士生入学统一考试大纲的深入研究和对历届考研真题的精细分析基础上写成的，也是他长期大学数学教学，特别是近十几年来考研数学辅导经验的结晶.

本套丛书，无论内容编写，还是解题方法都比较精练、新颖，富有启迪性和前瞻性，实用性、针对性也很强，可以明显提高复习的效率. 它既贴近考纲、考试，更贴近考生，是广大考生值得拥有的一套好书.

机械工业出版社

前 言

考生认真读完本系列丛书的基础篇(包括做完每章后所附的练习题)，表明你已掌握了考研数学所必需的知识点，足以应付考题中的基本题(即大部分的选择题和填空题以及某些比较简单的解答题). 但仅此而已，显然还不够. 这是因为，我们对考研数学知识的掌握还存在结构性的缺陷.

其一，缺乏解题技巧，考题中有许多题都有很强的技巧性，只有掌握相应的解题技巧才能避免许多不必要的计算，从而省时省力地快捷获解. 请看以下两个例子:

例 1 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x$.

如果用常规方法计算将是复杂的:

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x=\lim_{x\to\infty}\left\{\left[1+\frac{(a-b)x+ab}{(x-a)(x+b)}\right]^{\frac{(x-a)(x+b)}{(a-b)x+ab}}\right\}^{\frac{(a-b)x+ab}{(x-a)(x+b)}\cdot x}$$
$$=e^{a-b}.$$

如果使用技巧计算将快捷获解:

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(1+\dfrac{-a}{x}\right)^x\left(1+\dfrac{b}{x}\right)^x}=\frac{1}{e^{-a}\cdot e^b}=e^{a-b}.$$

例 2 设函数 $z=f(xy,\ yg(x))$，其中函数 f 具有二阶连续偏导数，函数 g 可导且在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$，求 $\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}$.

如果用常规方法将要作许多不必要的计算:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'(xy,yg(x))y+f_2'(xy,yg(x))yg'(x),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1'(xy,yg(x))+y[f_{11}''(xy,yg(x))x+f_{12}''(xy,yg(x))g(x)]+$$
$$[f_{21}''(xy,yg(x))x+f_{22}''(xy,yg(x))g(x)]yg'(x)+f_2'(xy,yg(x))g'(x).$$

将 $g(1)=1,g'(1)=0$ 代入上式得

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=f_1'(1,1)+f_{11}''(1,1)+f_{12}''(1,1).$$

如果使用技巧计算将快捷获解:

由
$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'(xy,yg(x))y+f_2'(xy,yg(x))yg'(x)$$

得
$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}}=\left.\frac{d}{dy}\left(\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{x=1}\right)\right|_{y=1}\xlongequal{\text{将 } g(1)=1,g'(1)=0 \text{ 代入}}\left.\left[\frac{d}{dy}f_1'(y,y)y\right]\right|_{y=1}$$
$$=\{f_1'(y,y)+[f_{11}''(y,y)+f_{12}''(y,y)]y\}\big|_{y=1}$$
$$=f_1'(1,1)+f_{11}''(1,1)+f_{12}''(1,1).$$

其二，缺乏对知识点融会贯通与综合运用的能力. 考题中有许多都是综合题，甚至在选

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

择题中也时有综合题出现，因此考生就不能只掌握孤立的知识点，而应将它们前后联系、融为一体，使自己对较复杂的问题具有分析能力，养成把一个综合题分解为若干个易于求解的小问题的习惯．举例如下：

例 3　证明不等式

$$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geqslant 1+\frac{x^2}{2}\quad(-1<x<1).$$

本题的不等式证明，需用到导数计算、函数的单调性及函数在开区间内最值的确定等多个知识点，是一道综合题．如果不加分析直接用导数方法证明，则计算量和难度均较大：

记 $f(x)=x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2}$，则

$$f'(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{2x}{1-x^2}-\sin x-x.$$

由于 $f'(x)$ 在 $(-1,1)$ 内的符号不易确定，故计算 $f''(x)$ 并考虑它在 $(-1,1)$ 内的符号：

$$\begin{aligned}f''(x)&=\frac{2}{1-x^2}+\frac{2+2x^2}{(1-x^2)^2}-\cos x-1\\&=\frac{4}{(1-x^2)^2}-\cos x-1\geqslant 4-1-1=2>0,\end{aligned}$$

由此可知，$f'(x)\begin{cases}<0, & -1<x<0,\\=0, & x=0,\\>0, & 0<x<1,\end{cases}$ 即 $f(0)$ 是 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内的最小值，从而

$$f(x)\geqslant f(0)=0,\text{即 } x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geqslant 1+\frac{x^2}{2}\quad(-1<x<1).$$

但对这个综合题进行分析，即分解成先证明

$$\cos x\geqslant 1-\frac{x^2}{2}(-1<x<1),\tag{1}$$

再证明 $x\ln\frac{1+x}{1-x}+1-\frac{x^2}{2}\geqslant 1+\frac{x^2}{2}$，即 $x\ln\frac{1+x}{1-x}\geqslant x^2$　(2)

亦即
$$\ln\frac{1+x}{1-x}-x\begin{cases}<0, & -1<x<0,\\=0, & x=0,\\>0, & 0<x<1,\end{cases}$$

然后综合式(1)、式(2)，这样计算量、难度都减小了．具体如下：

式(1) 的证明：

记 $f_1(x)=\cos x-1+\frac{x^2}{2}$，则 $f_1'(x)=-\sin x+x\begin{cases}<0, & -1<x<0,\\=0, & x=0,\\>0, & 0<x<1,\end{cases}$

即 $f_1(0)$ 是 $f_1(x)$ 在 $(-1,1)$ 内的最小值，从而有 $f_1(x)\geqslant f_1(0)=0$，即 $\cos x\geqslant 1-\frac{x^2}{2}(-1<x<1)$．

式(2) 的证明：

记 $f_2(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}-x$，则 $f_2'(x)=\frac{2}{1-x^2}-1=\frac{1+x^2}{1-x^2}>0\quad(-1<x<1)$．

从而 $f_2(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}-x\begin{cases}<0, & -1<x<0,\\ =0, & x=0,\\ >0, & 0<x<1,\end{cases}$ 即 $x\ln\dfrac{1+x}{1-x}-x^2\geqslant 0(-1<x<1)$，亦即 $x\ln\dfrac{1+x}{1-x}\geqslant x^2$.

综合式(1)与式(2)得

$$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geqslant x^2+1-\frac{x^2}{2}\geqslant 1+\frac{x^2}{2}\quad(-1<x<1).$$

上述的缺陷，是考生在考研数学考试中拿到高分的两大障碍．为了帮助考生能在较短时间内，无论是在解题方法和技巧的掌握上，还是在驾驭综合题的能力上，都有较大幅度的提高，编者在分析历届考研数学真题和总结历年辅导讲义的基础上编写出本系列丛书的《考研数学提高篇　常考问题的快捷解法与综合题解析》.

全书归纳出以较高频率出现于考题中的问题与将会出现于考题中的问题，共计 18 个，并且进行了精心讲述．每个问题都包含两个内容：

1）快捷解法

即总结求解这一问题的快捷方法，并通过典型的例题表明快捷解法的应用．其中有些快捷解法是很新颖的，为一般教科书或参考书所罕见的；有些却是很朴素的，仅仅是“先化简后求解”等．但是不管是新颖的还是朴素的，如果考生能理解它们，并坚持在复习中使用它们，必将逐渐培养出清晰的，删繁就简、走直径的解题思路，这也无疑会对提升考生的考试成绩带来极大好处．

2）综合题

指出以这一问题为核心可能出现的各种综合题形式(包括曾出现过的和将会出现的)，并列出典型例题以说明之．考生通过对这些例题及其解答的学习，不仅可以拓宽视野，对综合题不再感到陌生，而且还能提高对综合题的分析、分解能力，有把握地将考试中较难问题的分数也收入囊中．

据编者了解，经过快捷解题方法和综合题解析系统训练的考生，无论是在对基础知识的理解上，还是在对解题方法和技巧的掌握上，都较一般考生水平高出一筹，更可喜的是他们思路敏捷、清晰的程度也超出一般考生许多，所以高分往往为他们所得．相信本届考试的数学高分也必为活学活用本书的考生所得．

欢迎同学们对本书提出任何建议和意见，请发邮件到 cqhshuxue@gmail.com，非常感谢！

北京邮电大学教授　陈启浩

目　录

A. 高等数学

B. 线性代数

A. 高 等 数 学

01. 未定式极限计算的快捷解法与综合题

一、快捷解法

未定式极限共有七种，它们的计算方法已在《基础篇》的第一章中作了较详细的叙述．从叙述中可知，这七种未定式极限，以$\frac{0}{0}$型和$\frac{\infty}{\infty}$型未定式极限最为基础，这是因为其余五种都可借助初等运算或变量代换，化为$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型未定式极限．但是$\frac{\infty}{\infty}$型未定式极限的计算方法是转换成$\frac{0}{0}$型未定式极限或应用$\frac{\infty}{\infty}$型洛必达法则，所以要快捷计算未定式极限，考生必须熟练掌握$\frac{0}{0}$型未定式极限的快捷计算方法．

设 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$是$\frac{0}{0}$型未定式极限(其中 x_0 可以为 $x_0^-,x_0^+,-\infty,+\infty$ 及∞)，则它可按以下步骤快捷计算：

1. 化简$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$

主要方法包括消去$f(x)$与$g(x)$的公因子；分子或分母有理化；由极限运算法则算出其中的非未定式部分极限或用重要极限公式与常用极限公式算出其中较简单的未定式部分极限；利用常用等价无穷小，对$f(x)$或$g(x)$作等价无穷小代替．设 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$经上述化简后成为$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$，即$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$.

2. 计算$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$

如果$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$是非未定式极限，则可由极限运算法则算出其值；如果$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$仍是一个不易计算的$\frac{0}{0}$型未定式极限，则可考虑应用洛必达法则，也可考虑$f_1(x)$或$g_1(x)$的适当阶的带佩亚诺型余项的麦克劳林公式，寻找$f_1(x)$或$g_1(x)$在$x\to x_0$时的等价无穷小，计算$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$.

例 01.1 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x\cos^2 x}{x^2\sin^2 x}$;

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}$.

精解　所给极限都是$\dfrac{0}{0}$型未定式极限.

(1) $$\lim_{x\to0}\frac{x^2-\sin^2x\cos^2x}{x^2\sin^2x}=\lim_{x\to0}\frac{(x+\sin x\cos x)(x-\sin x\cos x)}{x^4}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x+\sin x\cos x}{x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x\cos x}{x^3}$$
$$=\lim_{x\to0}\left(1+\frac{\sin x}{x}\cdot\cos x\right)\cdot\lim_{x\to0}\frac{x-\frac{1}{2}\sin 2x}{x^3}$$
$$=2\lim_{x\to0}\frac{x-\frac{1}{2}\sin 2x}{x^3}\text{（以上都是化简）}$$
$$\xlongequal{\text{洛必达法则}}2\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{3x^2}$$
$$=2\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}(2x)^2}{3x^2}=\frac{4}{3}.$$

(2) $$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x\ln(1+x)}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+2\sin x}-x-1}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(1+2\sin x)-(x+1)^2}{(\sqrt{1+2\sin x}+x+1)x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{1+2\sin x}+x+1}\cdot\lim_{x\to0}\frac{2\sin x-2x-x^2}{x^2}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to0}\frac{2\sin x-2x}{x^2}-1\right)$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x^2}-\frac{1}{2}\text{（以上都是化简）}$$
$$\xlongequal{\text{洛必达法则}}-\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x}-\frac{1}{2}$$
$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}.$$

例 01.2　求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-e^{\frac{1}{3}x^2}}{\ln(1+3x^2)-3x^2}$.

精解　$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-e^{\frac{1}{3}x^2}}{\ln(1+3x^2)-3x^2}\xlongequal{\text{令 }t=x^2}\lim_{t\to0^+}\frac{\sqrt[3]{1+t}-e^{\frac{1}{3}t}}{\ln(1+3t)-3t}.\tag{1}$$

式(1)右边是$\dfrac{0}{0}$型未定式极限，为寻找$t\to0^+$时$\sqrt[3]{1+t}-e^{\frac{1}{3}t}$与$\ln(1+3t)-3t$的等价无穷小，利用它们的带佩亚诺型余项的麦克劳林公式，即当$t\to0^+$时，

$$\sqrt[3]{1+t}-e^{\frac{1}{3}t}=\left[1+\frac{1}{3}t+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}t^2+o(t^2)\right]-\left[1+\frac{1}{3}t+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{3}t\right)^2+o(t^2)\right]$$

$$=-\frac{1}{6}t^2+o(t^2)\sim-\frac{1}{6}t^2, \tag{2}$$

$$\ln(1+3t)-3t=\left[3t-\frac{1}{2}(3t)^2+o(t^2)\right]-3t=-\frac{9}{2}t^2+o(t^2)\sim-\frac{9}{2}t^2. \tag{3}$$

所以，将式(2)、式(3)代入式(1)得

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-e^{\frac{1}{3}x^2}}{\ln(1+3x^2)-3x^2}=\lim_{t\to0^+}\frac{-\frac{1}{6}t^2}{-\frac{9}{2}t^2}=\frac{1}{27}.$$

例 01.3 计算下列极限：

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})-\ln(x+\sqrt{x^2-1})}{(e^{\frac{1}{x}}-1)^2}$;

(2) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^{\frac{1}{x}}-1)}{\ln x}$.

精解 (1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})-\ln(x+\sqrt{x^2-1})}{(e^{\frac{1}{x}}-1)^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2-1}}}{(e^{\frac{1}{x}}-1)^2}$

$$\xlongequal{\text{令 } t=\frac{1}{x}}\lim_{t\to0^+}\frac{\ln\frac{1+\sqrt{1+t^2}}{1+\sqrt{1-t^2}}}{(e^t-1)^2}\quad\left(\frac{0}{0}\text{型未定式极限}\right) \tag{1}$$

其中,当 $t\to0^+$ 时,

$$\ln\frac{1+\sqrt{1+t^2}}{1+\sqrt{1-t^2}}=\ln\left(1+\frac{\sqrt{1+t^2}-\sqrt{1-t^2}}{1+\sqrt{1-t^2}}\right)\sim\frac{\sqrt{1+t^2}-\sqrt{1-t^2}}{1+\sqrt{1-t^2}}$$

$$\sim\frac{1}{2}(\sqrt{1+t^2}-\sqrt{1-t^2}). \tag{2}$$

$$(e^t-1)^2\sim t^2. \tag{3}$$

所以，将式(2)、式(3)代入式(1)得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})-\ln(x+\sqrt{x^2-1})}{(e^{\frac{1}{x}}-1)^2}=\frac{1}{2}\lim_{t\to0^+}\frac{\sqrt{1+t^2}-\sqrt{1-t^2}}{t^2}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\lim_{t\to0^+}\frac{\sqrt{1+t^2}-1}{t^2}-\lim_{t\to0^+}\frac{\sqrt{1-t^2}-1}{t^2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}.$$

注 本小题是经过化简后利用常用极限 $\displaystyle\lim_{u\to0}\frac{(1+u)^2-1}{u}=2$ 算得的.

(2) 所给极限是 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式极限，用洛必达法则计算.

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^{\frac{1}{x}}-1)}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(e^{\frac{\ln x}{x}}-1)}{\ln x}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{\ln x}{x}}\left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right)}{\frac{1}{x}(e^{\frac{\ln x}{x}}-1)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln x}{x}}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1-\ln x}{x}}{e^{\frac{\ln x}{x}}-1}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1-\ln x}{x}}{e^{\frac{\ln x}{x}}-1}\quad\left(\frac{0}{0}\text{型未定式极限}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1-\ln x}{x}}{\frac{\ln x}{x}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\ln x}{\ln x}=-1.$$

例 01.4　计算下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$；

（2）$\lim\limits_{x\to2}\left(\sqrt{3-x}+\ln\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\sin^2(x-2)}}$；

（3）$\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x^{\frac{1}{x}}-1}}$.

精解　（1）所给极限是 0^0 型未定式极限．由于

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)}{\ln x}}\quad(\text{指数化}),\tag{1}$$

其中，

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)}{\ln x}\xlongequal{\text{令 }t=\frac{\pi}{2}-\arctan x}\lim_{t\to0^+}\frac{\ln t}{\ln\cot t}\left(\frac{\infty}{\infty}\text{型未定式极限}\right)$$

$$\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{1}{t}}{-\frac{\csc^2t}{\cot t}}$$

$$=-\lim_{t\to0^+}\left(\cos t\cdot\frac{\sin t}{t}\right)=-1.\tag{2}$$

所以，将式（2）代入式（1）得

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}=e^{-1}=\frac{1}{e}.$$

（2）所给极限是 1^∞ 型未定式极限．

由于

$$\lim_{x\to2}\left(\sqrt{3-x}+\ln\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\sin^2(x-2)}}=e^{\lim\limits_{x\to2}\frac{\ln\left(\sqrt{3-x}+\ln\frac{x}{2}\right)}{\sin^2(x-2)}},\tag{1}$$

其中，$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\ln\left(\sqrt{3-x}+\ln\dfrac{x}{2}\right)}{\sin^2(x-2)}\xlongequal{令\,t\,=\,x\,-\,2}\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\ln\left(\sqrt{1-t}+\ln\left(1+\dfrac{t}{2}\right)\right)}{\sin^2 t}$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\ln\left(1+\sqrt{1-t}-1+\ln\left(1+\dfrac{t}{2}\right)\right)}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\sqrt{1-t}-1+\ln\left(1+\dfrac{t}{2}\right)}{t^2}$$

$$\xlongequal{洛必达法则}\lim_{t\to0}\frac{\dfrac{-1}{2\sqrt{1-t}}+\dfrac{1}{2+t}}{2t}$$

$$=\lim_{t\to0}\frac{1}{2\sqrt{1-t}(2+t)}\cdot\lim_{t\to0}\frac{2(\sqrt{1-t}-1)-t}{2t}$$

$$=\frac{1}{4}\left(\lim_{t\to0}\frac{\sqrt{1-t}-1}{t}-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\times\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}. \tag{2}$$

所以，将式(2)代入式(1)得

$$\lim_{x\to2}\left(\sqrt{3-x}+\ln\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\sin^2(x-2)}}=e^{-\frac{1}{4}}.$$

(3) 所给极限是∞^0型未定式极限．由于

$$\lim_{x\to+\infty}(\ln x)^{x^{\frac{1}{x}}-1}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(x^{\frac{1}{x}}-1)\ln\ln x}, \tag{1}$$

其中，$\lim\limits_{x\to+\infty}(x^{\frac{1}{x}}-1)\ln\ln x=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\frac{1}{x}}-1}{\dfrac{1}{\ln\ln x}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}\ln x}-1}{\dfrac{1}{\ln\ln x}}\quad\left(\frac{0}{0}\text{型未定式极限}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{x}\ln x}{\dfrac{1}{\ln\ln x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x\cdot\ln\ln x}{x}=0. \tag{2}$$

所以，将式(2)代入式(1)得

$$\lim_{x\to+\infty}(\ln x)^{x^{\frac{1}{x}}-1}=e^0=1.$$

例 01.5 计算下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x\left[\tan t+\ln(1+t^2)\sin\dfrac{1}{t}\right]dt}{\int_0^x\ln(1+\arctan t)dt}$；

（2）$\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\int_0^{\sqrt{t}}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{t}\sin y^2\mathrm{d}y}{(\mathrm{e}^{-\frac{2}{\pi}t^2}-1)\arctan t^{\frac{3}{2}}}$.

精解　（1）所给极限是$\dfrac{0}{0}$型未定式极限，为去掉函数中的积分运算先使用洛必达法则．

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x\left[\tan t+\ln(1+t^2)\sin\frac{1}{t}\right]\mathrm{d}t}{\int_0^x\ln(1+\arctan t)\mathrm{d}t}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to0}\frac{\tan x+\ln(1+x^2)\sin\frac{1}{x}}{\ln(1+\arctan x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\tan x+\ln(1+x^2)\sin\frac{1}{x}}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}+\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)}{x}\sin\frac{1}{x}$$

$$=1+0\left(\text{由于}\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)}{x}=0,\sin\frac{1}{x}\right.$$

$$\text{在点 }x=0\text{ 的去心邻域内有界，所以}\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)}{x}$$

$$\left.\sin\frac{1}{x}=0\right)=1.$$

$$(2)\ \lim_{t\to0^+}\frac{\int_0^{\sqrt{t}}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{t}\sin y^2\mathrm{d}y}{(\mathrm{e}^{-\frac{2}{\pi}t^2}-1)\arctan t^{\frac{3}{2}}}=\lim_{t\to0^+}\frac{\int_0^{\sqrt{t}}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{t}\sin y^2\mathrm{d}y}{-\frac{2}{\pi}t^{\frac{7}{2}}}.\tag{1}$$

所给极限是$\dfrac{0}{0}$型未定式极限，为去掉分子部分的积分运算，先使用洛必达法则．为了将其中的分子部分对t求导，需通过更改二次积分的积分次序将其转换成关于t的积分上限函数．

$$\int_0^{\sqrt{t}}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{t}\sin y^2\mathrm{d}y=\iint_D\sin y^2\mathrm{d}\sigma(\text{其中 }D=\{(x,y)\mid x^2\leqslant y\leqslant t,0\leqslant x\leqslant\sqrt{t}\}=$$

$$\{(x,y)\mid0\leqslant x\leqslant\sqrt{y},0\leqslant y\leqslant t\}\text{，如图 01.5 阴影部分所示）}$$

$$=\int_0^t\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{y}}\sin y^2\mathrm{d}x=\int_0^t\sqrt{y}\sin y^2\mathrm{d}y.\tag{2}$$

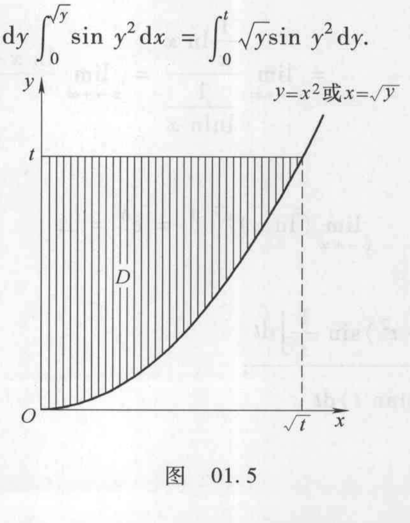

图　01.5

所以，将式(2)代入式(1)得

$$\lim_{t\to0^+}\frac{\int_0^{\sqrt{t}}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{t}\sin y^2\mathrm{d}y}{(\mathrm{e}^{-\frac{2}{\pi}t^2}-1)\arctan t^{\frac{3}{2}}}=\lim_{t\to0^+}\frac{\int_0^{t}\sqrt{y}\sin y^2\mathrm{d}y}{-\frac{2}{\pi}t^{\frac{7}{2}}}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{t\to0^+}\frac{\sqrt{t}\sin t^2}{-\frac{2}{\pi}\cdot\frac{7}{2}t^{\frac{5}{2}}}$$

$$=-\frac{\pi}{7}\lim_{t\to0^+}\frac{t^{\frac{5}{2}}}{t^{\frac{5}{2}}}=-\frac{\pi}{7}.$$

二、综合题

未定式极限计算常与函数的连续性与间断点判定，分段函数在分段点处的可导性判定及导数计算，曲线的非铅直渐近线方程计算，幂级数求和函数以及由未定式极限定义的函数求导、积分等结合成综合题.

例 01.6 设函数 $f(x)=\frac{1}{\pi x}+\frac{1}{(1-x)\sin\pi x}-\frac{1}{\pi(1-x)^2}$，$x\in\left[\frac{1}{2},1\right)$. 问如何定义 $f(1)$ 的值，使得 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上连续.

精解 由于

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1^-}f(x)&=\lim_{x\to1^-}\left[\frac{1}{\pi x}+\frac{1}{(1-x)\sin\pi x}-\frac{1}{\pi(1-x)^2}\right]\\&=\frac{1}{\pi}+\lim_{x\to1^-}\left[\frac{1}{(1-x)\sin\pi x}-\frac{1}{\pi(1-x)^2}\right]\quad(\infty-\infty\text{ 型未定式极限})\\&=\frac{1}{\pi}+\lim_{x\to1^-}\frac{\pi(1-x)-\sin\pi x}{\pi(1-x)^2\sin\pi x}\left(\frac{0}{0}\text{ 型未定式极限}\right)\\&\xlongequal{\text{令 }t=1-x}\frac{1}{\pi}+\lim_{t\to0^+}\frac{\pi t-\sin\pi t}{\pi t^2\sin\pi t}\\&=\frac{1}{\pi}+\lim_{t\to0^+}\frac{\pi t-\sin\pi t}{\pi^2t^3}\\&\xlongequal{\text{洛必达法则}}\frac{1}{\pi}+\frac{1}{3\pi}\lim_{t\to0^+}\frac{1-\cos\pi t}{t^2}\\&=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{3\pi}\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{1}{2}(\pi t)^2}{t^2}\\&=\frac{1}{\pi}+\frac{\pi}{6},\end{aligned}$$

并且 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2},1\right)$ 上连续，所以定义

$$f(1)=\lim_{x\to1^-}f(x)=\frac{1}{\pi}+\frac{\pi}{6},$$

可使 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上连续.

例 01.7　设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x)}{x}+\sin x, & x>0,\\ 1, & x=0,\\ \dfrac{\tan x}{x}+\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}-1, & x<0,\end{cases}$ 求 $f'(0)$.

精解　由于

$$
\begin{aligned}
f'_{+}(0) &= \lim_{x\to0^{+}}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^{+}}\frac{\left[\dfrac{\ln(1+x)}{x}+\sin x\right]-1}{x}\\
&=\lim_{x\to0^{+}}\frac{\dfrac{\ln(1+x)-x}{x}+\sin x}{x}\\
&=\lim_{x\to0^{+}}\frac{\ln(1+x)-x}{x^{2}}+\lim_{x\to0^{+}}\frac{\sin x}{x}\\
&=\lim_{x\to0^{+}}\frac{\ln(1+x)-x}{x^{2}}+1\\
&\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to0^{+}}\frac{\dfrac{1}{1+x}-1}{2x}+1\\
&=\lim_{x\to0^{+}}\frac{-1}{2(1+x)}+1\\
&=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f'_{-}(0) &= \lim_{x\to0^{-}}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^{-}}\frac{\left(\dfrac{\tan x}{x}+\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}-1\right)-1}{x}\\
&=\lim_{x\to0^{-}}\frac{\dfrac{\tan x-x}{x}+(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}-1)}{x}\\
&=\lim_{x\to0^{-}}\frac{\tan x-x}{x^{2}}+\lim_{x\to0^{-}}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}-1}{x}\\
&=\lim_{x\to0^{-}}\frac{\tan x-x}{x^{2}}+\frac{1}{2}\\
&\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to0^{-}}\frac{\sec^{2}x-1}{2x}+\frac{1}{2}\\
&=\lim_{x\to0^{-}}\frac{\tan^{2}x}{2x}+\frac{1}{2}\\
&=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2},
\end{aligned}
$$

即 $f'_{+}(0)=f'_{-}(0)=\dfrac{1}{2}$，所以 $f'(0)=\dfrac{1}{2}$.

例 01.8　求曲线 $y=\dfrac{x^{1+x}}{(1+x)^{x}}(x>0)$ 的非铅直渐近线方程 .

精解 由于 $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{x^{1+x}}{(1+x)^x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x}=\dfrac{1}{e}$,

$$b=\lim_{x\to+\infty}(y-ax)=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^{1+x}}{(1+x)^x}-\frac{1}{e}x\right]=\lim_{x\to+\infty}x\left[\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x}-\frac{1}{e}\right]$$

$$\xlongequal{\text{令 } t=\frac{1}{x}}\lim_{t\to0^+}\frac{e-(1+t)^{\frac{1}{t}}}{et(1+t)^{\frac{1}{t}}}=-\frac{1}{e^2}\lim_{t\to0^+}\frac{e^{\frac{1}{t}\ln(1+t)}-e}{t}$$

$$=-\frac{1}{e}\lim_{t\to0^+}\frac{e^{\frac{1}{t}\ln(1+t)-1}-1}{t}$$

$$=-\frac{1}{e}\lim_{t\to0^+}\frac{\dfrac{1}{t}\ln(1+t)-1}{t}$$

$$=-\frac{1}{e}\lim_{t\to0^+}\frac{\ln(1+t)-t}{t^2}$$

$$\xlongequal{\text{洛必达法则}}-\frac{1}{e}\lim_{t\to0^+}\frac{\dfrac{1}{1+t}-1}{2t}$$

$$=-\frac{1}{e}\lim_{t\to0^+}\frac{-1}{2(1+t)}=\frac{1}{2e}.$$

所以，所给曲线的非铅直渐近线方程为 $y=\dfrac{1}{e}x+\dfrac{1}{2e}$.

例 01.9 设函数 $g(x)=\lim\limits_{y\to+\infty}\left[\dfrac{e^{\frac{1}{y}}-1}{x\ln(1+y)-x\ln y}-\dfrac{1-y\sin\dfrac{\pi x}{y}}{\arctan x}\right]$,求 $g(x)$ 的间断点及其类型.

精解 显然 $g(x)$ 在点 $x=0$ 处无定义,且当 $x\neq0$ 时,

$$g(x)=\lim_{y\to+\infty}\left[\frac{e^{\frac{1}{y}}-1}{x\ln(1+y)-x\ln y}-\frac{1-y\sin\dfrac{\pi x}{y}}{\arctan x}\right]$$

$$=\frac{1}{x}\lim_{y\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{y}}-1}{\ln\left(1+\dfrac{1}{y}\right)}-\frac{1}{\arctan x}\lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{\sin\dfrac{\pi}{y}x}{\dfrac{1}{y}}\right)$$

$$=\frac{1}{x}\lim_{y\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{y}}{\dfrac{1}{y}}-\frac{1}{\arctan x}\lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{\dfrac{\pi x}{y}}{\dfrac{1}{y}}\right)$$

$$=\frac{1}{x}-\frac{1-\pi x}{\arctan x},$$

所以，$g(x)$ 仅有间断点 $x=0$. 由于

$$\lim_{x\to0}g(x)=\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1-\pi x}{\arctan x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{\arctan x-x+\pi x^2}{x\arctan x}$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com