3+X 高考综合复习指导

数学

考点说明
题型示范
扩展练习
参考答案

中華書局

《最高分》丛书

3 + x 高考综合复习指导·数学

主　　编:孙连众　张志成
编写人员:王志国　高金华　陈　俊　赵　霞
　　　　　李建东　崔艳雯　许文军　张志成
　　　　　孙连众

中　华　书　局

2003年·北京

图书在版编目(CIP)数据

3+x高考综合复习指导·数学/孙连众等编.北京:中华书局,2003
(《最高分》丛书)
ISBN 7-101-03370-9

Ⅰ.3… Ⅱ.中… Ⅲ.数学课—高中—升学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第027351号

责任编辑:齐浣心

《最高分》丛书

3+x高考综合复习指导·数学

孙连众 张志成 等人

*

中华书局出版发行

(北京市丰台区太平桥西里38号 100073)

北京冠中印刷厂印刷

*

787×1092毫米 1/16·19 $^1/_2$ 印张·310千字

2003年1月第1版 2003年1月北京第1次印刷

印数 1—8000册 定价:25.00元

ISBN 7—101—03370—9/G·507

前　言

本书是为参加2003年“$3+x$”高考考生编写的。亦可作为其他年级学生单元复习之用。

我们依据现行中学数学教学大纲、教材及2002年普通高等学校招生全国统一考试说明，并结合我们多年来的教学、辅导高考经验编写了此书。

随着素质教育的不断深入，近年高考试题将“创新意识”作为能力考查的重点，我们本着立意新颖、突出能力、全面深刻、培养能力的原则，设计一些新款的题目，培养学生灵活运用数学知识的能力，增强学生对数学思想方法的深刻理解。

本书对高中数学各部分知识进行归纳和总结，便于学生对所学知识形成一个总体的认识，掌握其规律。本书还密切结合近几年高考情况，对2003年高考从考试内容、热点分析、高考预测、复习建议几部分进行分析和展望。

每个单元还给出大量典型的例题，从解题思路、解题方法和过程、所涉及的知识等方面进行分析。同时给出扩展练习，进行强化训练。

针对学生常对高考考试要求认识不深刻，对自己努力方向不明，易使复习产生偏颇的现象，如忽视基本知识、基本方法、基本题目的复习，而花大量时间去攻难题，使复习效果不高，我们特选取了近年上海、广州以及全国统一高考的数学试题进行分析，使考生对高考题型、特点、试题难度的分布有一个总体了解，强调考生首先要着力于基本知识和基本题目的复习。

对考生的一点建议：每个单元复习的第一项任务是总结并熟练掌握该单元的基本知识，如定义、公理、法则、定理、推论、公式、性质、有关图形(象)、数学方法等，并能独立、确切、完整地讲出来。

本书由于篇幅和时间所限，编写过程中，难免有疏漏之处，恳请读者批评指正。

编　者

2002年12月

目　　录

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第一章 幂函数、指数函数和对数函数

〔考点说明〕

考试内容:本章共有13个知识点:(1)集合;(2)子集、交集、并集、补集;(3)映射;(4)函数(函数的记号、定义域、值域);(5)幂函数;(6)函数的单调性;(7)函数的奇偶性;(8)反函数;(9)互为反函数图象间的关系;(10)指数函数;(11)对数函数;(12)换底公式;(13)简单的指数方程和对数方程.

热点分析:函数是高中数学的重要内容,它的内容丰富,方法灵活,应用广泛,而且函数思想是解决数学问题的重要数学思想之一,因此,函数在高考试题中占较大比例,约占全卷总分的20%,函数问题在高考试卷中多为3道客观题和1~2道主观题.客观题主要考查集合的运算、映射与函数、反函数的概念与性质、函数的图象、函数的最值、函数的单调性和奇偶性,难易度以较易题为主.主观题考查范围广泛,要求较高,有与二次函数、指数函数、对数函数有关的综合问题,又有需适当选择自变量(或未知数)建立函数(或方程)关系来解决的实际问题,这类问题是近几年来高考的热点,也是今后高考的重点.

高考预测:函数问题仍将成为今后高考的热点,在加强对有关函数的基础知识、基本技能和方法考查的同时,还考查函数与不等式、数列、方程、复数、解析几何等知识综合运用的能力.而且,应用函数知识解决实际问题,考查对数学语言的理解和实际应用能力有进一步加强的趋势.

复习建议:准确深刻地理解函数的有关概念.熟练掌握并能灵活运用换元法、配方法、穷举法、待定系数法等常用解题方法.把握常用的数学思想,注意应用数形结合思想、分类讨论思想、函数方程思想、转化归纳思想来分析和解决数学问题.

〔解题指导〕

解决函数问题,要注意函数三要素:定义域、值域和对应法则,防止发生因忽视取值范围造成的失误,特别是在应用换元法时,必须先判定定义域.

对抽象函数的讨论,近几年高考中出现频率较高.要准确理解函数符号的意义,掌握用直接法、换元法、特殊值法、待定系数法、归纳法、消去法、逆推法等解有关抽象函数的常用方法.

熟练掌握基本初等函数的图象和利用图形的变换,迅速而准确地做出由基本函数图象经平移、对称、伸缩后所得函数的图象,以及利用图形的直观性解题的方法.

〔题型示范〕

例1:(1999年全国)已知映射 $f:A\rightarrow B$,其中,集合 $A=\{-3,-2,-1,1,2,3,4\}$,集合 B 中的元素都是 A 中元素在映射 f 下的象,且对于任意的 $a\in A$,在 B 中和它对应的元素是

$|a|$,则集合 B 中元素的个数是(　　).

(A)4　　(B)5　　(C)6　　(D)7

解题思路:

因为对于任意 $a\in A, f(a)=|a|$,所以对于集合 A 中互为相反数的两个元素对应集合 B 中的同一个元素.因此,B 中的元素共有 4 个,故答案选 A.

例 2:(1997 年全国)设集合 $M=\{x|0\leqslant x<2\}$,集合 $N=\{x|x^2-2x-3<0\}$,集合 $M\cap N$ 等于(　　).

(A)$\{x|0\leqslant x<1\}$　　(B)$\{x|0\leqslant x<2\}$　　(C)$\{x|0\leqslant x\leqslant 1\}$　　(D)$\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}$

解题思路:

思路 1:由 $x^2-2x-3=(x+1)(x-3)<0$,得 $N=\{x|-1<x<3\}\supset M$,故得 $M\cap N=M$.故选 B.

思路 2:根据被选项的特点,采用排除法.

$\because M\cap N\subseteq M$　所以排除 D.又 $\because \left(\frac{3}{2}\right)^2-2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)-3<0$

$\therefore \frac{3}{2}\in N$,且 $\frac{3}{2}\in M$.$\therefore \frac{3}{2}\in M\cap N$.排除 A、C 选项,得 B 选项.

例 3:(2000 年全国)设集合 A 和 B 都是自然数集合 N,映射 $f:A\rightarrow B$ 把集合 A 中的元素 n 映射到集合 B 中的元素 2^n+n,则在映射 f 下,象 20 的原象是(　　).

(A)2　　(B)3　　(C)4　　(D)5

解题思路:

思路 1:设原象为 x,那么,$2^x+x=20$,$(x\in N)$由此得 $x=4$,故选 C.

思路 2:根据被选项,逐一验证.$\because 2^2+2=6\neq 20, 2^3+3=11\neq 20, 2^4+4=20$.　$2^5+5=37\neq 20$.故选 C.

例 4:(1991 年全国)如图(1—1)I 是全集,M、P、S 是 I 的 3 个子集,则阴影部分所表示的集合是(　　).

(A)$(M\cap P)\cap S$　　(B)$(M\cap P)\cup S$

(C)$(M\cap P)\cap\overline{S}$　　(D)$(M\cap P)\cup\overline{S}$

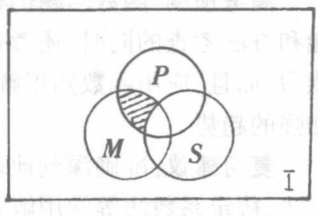

图 1－1

解题思路:

思路 1:直接法.阴影为交集 $M\cap P$ 的一部分,且位于 S 的外部,即是 S 的补集 $\overline{S}$ 中,所以,它所表示的集合为 $(M\cap P)\cap\overline{S}$,故选(C).

思路 2:赋值法.取阴影中的任意一个点 a,则 $a\in M, a\in P$,且 $a\in I, a\notin S$,而 $a\in\overline{S}$,所以,$a\in(M\cap P)\cap\overline{S}$;反之,当 $a\in(M\cap P)\cap\overline{S}$ 时,a 必落在阴影中,故选 C.

思路 3:间接排除法.图中阴影的部分不含 S 中的元素,故排除 B;M、P、S 三个区域的公共部分位于阴影之外,故排除 A;阴影只是 S 外部区域即 $\overline{S}$ 的局部,不含 $\overline{S}$ 的全部元素,故排除 D.因此,得 C 答案.

例 5:某班共有学生 50 名,其中参加数学课外小组的学生有 22 名,参加物理课外小组的学生有 18 名,同时参加数学、物理两个课外小组的学生有 13 名.问:(1)数学和物理两个课外小组至少参加一个的学生有多少名?(2)数学和物理两个课外小组都不参加的学生有多少名?

解题思路:

思路1:先将问题转化为集合语言,运用集合思想解题.设 $I=\{$全班学生$\}$,$A=\{$参加数学课外小组的学生$\}$,$B=\{$参加物理课外小组的学生$\}$,则,$n(I)=50$,$n(A)=22$,$n(B)=18$,$n(A\cap B)=13$,$\therefore n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=22+18-13=27$,$n(\overline{A\cup B})=n(I)-n(A\cup B)=23$.

思路2:画文氏图(图1-2).设 $I=\{$全班学生$\}$,$A=\{$参加数学课外小组的学生$\}$,$B=\{$参加物理课外小组的学生$\}$.如图1—2,可以直观看出:数学和物理两个课外小组至少参加一个有27名学生,数学和物理两个课外小组都不参加的学生有23名.

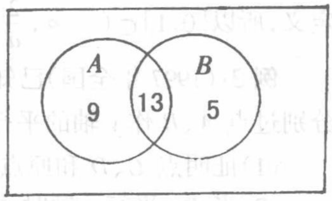

图1-2

例6:满足 $\{a、b\}\subseteq M\subset\{a,b,c,d\}$ 的集合 M 的个数是( ).

(A)3 (B)4 (C)5 (D)6

解题思路:

因为 $\{a,b\}\subseteq M$,所以集合 M 中的元素应至少含有 a、b 这两个元素,又因为 $M\subset\{a,b,c,d\}$,所以,集合 M 中的元素又不能超出 a、b、c、d 这四个元素且不能同时取这四个元素.因此,集 M 只可能是 $\{a,b\}$、$\{a,b,c\}$、$\{a,b,d\}$ 这三者之一.故选B.

例7:(1995年全国)已知 $y=\log_a(2-ax)$ 在 $[0,1]$ 上是 x 的减函数,则 a 的取值范围是( ).

(A)(0,1) (B)(1,2) (C)(0,2) (D)$[2,+\infty)$

解题思路:

思路1:因为 $y=\log_a(2-ax)$ 在 $[0,1]$ 上是 x 的减函数,由对数函数定义可知 $a>0$ 且 $a\neq1$,所以 $2-ax$ 在 $[0,1]$ 上是减函数且 $2-ax>0$,故 $2-a>0$,$\therefore a<2$.

由 $2-ax$ 是减函数,$y=\log_a(2-ax)$ 是减函数,由复合函数的单调性规则可知,$y=\log_a\mu$ $(\mu=2-ax)$ 是增函数,$\therefore a>1$.

由以上可知 $1<a<2$.故选B.

思路2:当 $a\in(0,1)$ 时,若 $0\leqslant x_1<x_2\leqslant1$,则有 $2-ax_1>2-ax_2$,故 $\log_a(2-ax_1)<\log_a(2-ax_2)$,而 $y=\log_a(2-ax)$ 在 $[0,1]$ 上是 x 的增函数,而不是减函数,故排除(A)(C).

当 $a>2$ 时,函数 y 在 $x=1$ 处无定义,故排除(D).因此选(B).

思路3:$y=\log_a(2-ax)$ 在 $[0,1]$ 上是 x 的减函数的充要条件是:

$$\begin{cases}a>0\text{ 且 }a\neq1\\0\leqslant x_1<x_2\leqslant1\\\log_a(2-ax_1)>\log_a(2-ax_2)\end{cases}$$

等价于下列两个不等式组:

$$(1)\begin{cases}0<a<1\\0\leqslant x_1<x_2\leqslant1\\0<2-ax_1<2-ax_2\end{cases}\quad\text{或}(2)\begin{cases}a>1\\0\leqslant x_1<x_2\leqslant1,\\2-ax_1>2-ax_2>0.\end{cases}$$

解不等式组(1)无解,因为当 $0<a<1$ 时,$0\leqslant x_1<x_2\leqslant1$ 与 $0<2-a_1x_1<2-ax_2$ 是矛盾的;

解不等式组(2)，由 $2-a>0(x=1$ 时)，得 $a<2$，又 $a>1$，得 $1<a<2$. 故选(B)

思路 4：令 $u=2-ax$，则 $y=\log_a u$. 因为 a 是底数，所以 $a>0$，所以 u 是减函数，而复合函数是减函数，所以 $a>1$，又因为 $2-ax>0$，$\therefore x<\frac{2}{a}$，$\therefore x\in(-\infty,\frac{2}{a})$，而 x 在 $[0,1]$ 上有定义，所以 $[0,1]\subset(-\infty,\frac{2}{a})$，$1<\frac{2}{a}$ 得 $a<2$. 综上可知 $1<a<2$. 故选(B).

例 8：(1997 年全国)已知过原点 O 的一条直线与函数 $y=\log_8 x$ 的图象交于 A、B 两点，分别过点 A、B 作 y 轴的平行线与函数 $y=\log_2 x$ 的图象交于 C、D 两点：

(1)证明点 C、D 和原点 O 在同一条直线上.

(2)当 BC 平行 x 轴时，求点 A 的坐标.

解题思路：

(1)解

思路 1：依题意，设 $A(x_1,\log_8 x_1)$，$B(x_2,\log_8 x_2)$.

由于过原点 O 的直线与 $y=\log_8 x$ 的图象有两个交点，则必须满足 $x_1>1$，$x_2>1$.

又 C、D 分别是 $y=\log_2 x$ 的图象与直线 $x=x_1$，$x=x_2$ 的交点，得 $C(x_1,\log_2 x_1)$，$D(x_2,\log_2 x_2)$

由对数换底公式，有

$\log_2 x_1=\frac{\log_8 x_1}{\log_8 2}=3\log_8 x_1$，$\log_2 x_2=3\log_8 x_2$ 故，直线 OC 的斜率 $k_1=\frac{\log_2 x_1}{x_1}=\frac{3\log_8 x_1}{x_1}$，直线 OD 的斜率 $k_2=\frac{\log_2 x_2}{x_2}=\frac{3\log_8 x_2}{x_2}$.

因为 A、B 与原点 O 在同一直线上，知

$$\frac{\log_8 x_1}{x_1}=\frac{\log_8 x_2}{x_2}$$

所以，$k_1=k_2$　即 C、D 与原点 O 在同一直线上.

思路 2：设 $A(x_1,\log_8 x_1)$，$B(x_2,\log_8 x_2)$ 依题意则，$C(x_1,\log_2 x_1)$，$D(x_2,\log_2 x_2)$，故直线 OC 的方程是 $y=\frac{\log_2 x_1}{x_1}\cdot x$.

下面证明点 D 在直线 OC 上，即让 $\log_2 x_2=\frac{\log_2 x_1}{x_1}\cdot x_2$

$$\because \log_2 x_2=\frac{\log_8 x_2}{\log_8 2}=3\log_8 x_2$$

$$\therefore (\frac{\log_2 x_1}{x_1})\cdot x_2=\frac{3\log_8 x_1}{x_1}\cdot x_2$$

由于 A、B 与原点 O 在同一直线上，知

$\frac{\log_8 x_1}{x_1}=\frac{\log_8 x_2}{x_2}$ 即 $\log_8 x_2=\frac{\log_8 x_1}{x_1}\cdot x_2$.

$$\therefore \log_2 x_2=(\frac{\log_2 x_1}{x_1})\cdot x_2.$$

即点 D 在 OC 上.

(2)解

思路1:由 BC 平行于 x 轴知　$\log_2 x_1 = \log_8 x_2$ 由解(1)知　$x_2 \cdot \log_8 x_1 = x_1 \log_8 x_2$,$\log_2 x_1 = 3\log_8 x_1$.

$\therefore 3\log_8 x_1 = \dfrac{x_2}{x_1}\log_8 x_1$

又 $x_2 = 8^{\log_2 x_1} = (2^{\log_2 x_1})^3 = {x_1}^3$

则有　${x_1}^3\log_8 x_1 = 3x_1\log_8 x_1$　　$\therefore {x_1}^3 = 3x_1$　$\therefore x_1 = \sqrt{3}$.

故点 A 的坐标为$(\sqrt{3},\log_8\sqrt{3})$.

思路2:由 $B(x_2,\log_8 x_2)$,$C(x_1,\log_2 x_1)$

故直线 BC 的斜率 $k = \dfrac{\log_8 x_2 - \log_2 x_1}{x_2 - x_1}$

$\because BC$ 平行于 x 轴

$\therefore \dfrac{\log_8 x_2 - \log_2 x_1}{x_2 - x_1} = 0 \therefore \log_8 x_2 - \log_2 x_1 = 0 \therefore \underline{x_2 = {x_1}^3}$.

则有 ${x_1}^3\log_8 x_1 = 3x_1\log_8 x_1 \therefore {x_1}^3 = 3x_1$　　$\therefore x_1 = \sqrt{3}$.

例9:(1996年全国)已知 a,b,c 是实数,函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$,$g(x) = ax + b$,当 $-1 \leqslant x \leqslant 1$ 时,$|f(x)| \leqslant 1$.

(1)证明:$|c| \leqslant 1$;

(2)证明:当 $-1 \leqslant x \leqslant 1$ 时,$|g(x)| \leqslant 2$;

(3)设 $a > 0$,当 $-1 \leqslant x \leqslant 1$ 时,$g(x)$的最大值为2,求 $f(x)$.

解题思路:

(1)的证明:依题设 $x = 0$,得$|f(0)| \leqslant 1$,而 $f(0) = c$,所以$|c| \leqslant 1$.

(2)的证明:

思路1:当 $a > 0$ 时,$g(x) = ax + b$ 在$[-1,1]$上是增函数,于是　$g(-1) \leqslant g(x) \leqslant g(1)$　$(-1 \leqslant x \leqslant 1)$

$\because |f(x)| \leqslant 1.(-1 \leqslant x \leqslant 1)$,$|c| \leqslant 1$

$\therefore g(1) = a + b = f(1) - c \leqslant |f(1)| + |c| \leqslant 2$,

　$g(-1) = -a + b = -f(-1) + c \geqslant -(|f(-1)|) + |c| \geqslant -2$,

因此,得$|g(x)| \leqslant 2$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$;

当 $a < 0$ 时,$g(x) = ax + b$ 在$[-1,1]$上是减函数,于是

$g(-1) \geqslant g(x) \geqslant g(1)$　　$(-1 \leqslant x \leqslant 1)$.

$\because |f(x)| \leqslant 1$　$(-1 \leqslant x \leqslant 1)$,$|c| \leqslant 1$.

$\therefore g(-1) = -a + b = -f(-1) + c \leqslant |f(-1)| + |c| \leqslant 2$.

　$g(1) = a + b = f(1) - c \geqslant -(|f(1)| + |c|) \geqslant -2$

因此,得$|g(x)| \leqslant 2$,$(-1 \leqslant x \leqslant 1)$;

当 $a = 0$ 时,$g(x) = b$,$f(x) = bx + c$

$\because |f(1)| \leqslant 1$,$|c| \leqslant 1$

$\therefore |g(x)| = |f(1) - c| \leqslant |f(1)| + |c| \leqslant 2$

综上所述,当$-1\leqslant x\leqslant 1$时,均有$|g(x)|\leqslant 2$.

思路2:$\because |f(x)|\leqslant 1\quad(-1\leqslant x\leqslant 1)$,

$\therefore |f(-1)|\leqslant 1, |f(1)|\leqslant 1, |f(0)|\leqslant 1$,

$\because f(x)=ax^2+bx+c$,

$\therefore |a-b+c|\leqslant 1, |a+b+c|\leqslant 1, |c|\leqslant 1$,

因此,$|a-b|=|(a-b+c)-c|$

$\leqslant |a-b+c|+|c|\leqslant 2$.

$|a+b|=|(a+b+c)-c|$

$\leqslant |a+b+c|+|c|\leqslant 2$,

$\because g(x)=ax+b$.

$\therefore |g(\pm 1)|=|\pm a+b|=|a\pm b|\leqslant 2$.

因为函数$g(x)=ax+b$的图象是一条直线,因此,$|g(x)|$在$[-1,1]$上的最大值只能在区间的端点$x=-1$或$x=1$处取得,于是由$|g(\pm 1)|\leqslant 2$得$|g(x)|\leqslant 2\quad(-1\leqslant x\leqslant 1)$.

思路3:$\because x=\dfrac{(x+1)^2-(x-1)^2}{4}$

$=(\dfrac{x+1}{2})^2-(\dfrac{x-1}{2})^2$

$\therefore g(x)=ax+b$

$=a[(\dfrac{x+1}{2})^2-(\dfrac{x-1}{2})^2]+b(\dfrac{x+1}{2}-\dfrac{x-1}{2})$

$=[a(\dfrac{x+1}{2})^2+b(\dfrac{x+1}{2})+c]-[a(\dfrac{x-1}{2})^2+b(\dfrac{x-1}{2})+c]$

$=f(\dfrac{x+1}{2})-f(\dfrac{x-1}{2})$.

当$-1\leqslant x\leqslant 1$时,有

$0\leqslant\dfrac{x+1}{2}\leqslant 1, -1\leqslant\dfrac{x-1}{2}\leqslant 0$.

$\because |f(x)|\leqslant 1\quad(-1\leqslant x\leqslant 1)$

$\therefore |f(\dfrac{x+1}{2})|\leqslant 1, |f(\dfrac{x-1}{2})|\leqslant 1$;

因此,当$-1\leqslant x\leqslant 1$时,

$|g(x)|\leqslant |f(\dfrac{x+1}{2})|+|f(\dfrac{x-1}{2})|\leqslant 2$.

(3)的解　依题意　$\because a>0$,

$\therefore g(x)=ax+b$在$[-1,1]$上是增函数

又$\because g(x)$在$[-1,1]$上的最大值为2,

故$g(1)=2$.

$\because g(1)=a+b=f(1)-c, |f(1)|\leqslant 1, |c|\leqslant 1$,

$\therefore -1\leqslant c=f(1)-g(1)\leqslant 1-2=-1$.

得　$c=-1$;

试读结束:需要全本请在线购买: www.ertongbook.com

当$-1\leqslant x\leqslant 1$时，

$f(x)\geqslant -1=c=f(0)$

即函数$f(x)=ax^2+bx+c$在区间$[-1,1]$内的点$x=0$上取得最小值-1，所以$f(x)$是二次函数(即$a\neq 0$)，且它的图象的对称轴$x=-\dfrac{b}{2a}$的直线方程是$x=0$，由此得，

$-\dfrac{b}{2a}=0$，即$b=0$；

$\because a+b=g(1)=2.$

$\therefore a=2.$

$\therefore f(x)=2x^2-1.$

例10(1997年全国)：设二次函数$f(x)=ax^2+bx+c(a>0)$，方程$f(x)-x=0$的两个根x_1,x_2满足$0<x_1<x_2<\dfrac{1}{a}$.

(1)当$x\in(0,x_1)$时，证明$x<f(x)<x_1$；

(2)设函数$f(x)$的图象关于直线$x=x_0$对称，证明$x_0<\dfrac{x_1}{2}$.

解题思路：

(1)证明：

思路1：令$F(x)=f(x)-x$，因为x_1,x_2是方程$f(x)-x=0$的根，所以有

$F(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$.

因为$0<x_1<x_2$，所以，当$x\in(0,x_1)$时，$x-x_1<0$，$x-x_2<0$，得$(x-x_1)(x-x_2)>0$，又$a>0$因此，$F(x)>0$，即$f(x)-x>0$.所以$x<f(x)$.

又
$$\begin{aligned}x_1-f(x)&=x_1-(x+F(x))\\&=(x_1-x)-a(x-x_1)(x-x_2)\\&=(x_1-x)[1+a(x-x_2)].\end{aligned}$$

$\because 0<x<x_1<x_2<\dfrac{1}{a}$,

$\therefore x_1-x>0$,

$1+a(x-x_2)=(1-ax_2)+ax>0.$

即得$x_1-f(x)>0$　$\therefore f(x)<x_1$.

综上所述，当$x\in(0,x_1)$时，$x<f(x)<x_1$.

思路2：方程$f(x)-x=0$，即方程

$ax^2+(b-1)x+c=0(a>0)$

因为x_1,x_2是它的两个实根，且$0<x_1<x_2$，根据二次函数的性质，曲线$y=f(x)-x$是开口向上的抛物线，且与x轴有两个交点$A(x_1,0)$和$B(x_2,0)$，因此，当$x\notin[x_1,x_2]$时，$f(x)-x>0$.

$\therefore$当$x\in(0,x_1)$时，$x<f(x)$

其次，根据韦达定理，有$x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}$.

$\because 0 < x_1 < x_2 < \dfrac{1}{a}$,

$\therefore c = ax_1x_2 < x_1 = f(x_1)$

又 $c = f(0)$

$\therefore f(0) < f(x_1)$

根据二次函数性质,曲线 $y = f(x)$是开口向上的抛物线,因此函数 $y = f(x)$在闭区间$[0, x_1]$上的最大值在边界点 $x = 0$ 或 $x = x_1$ 处达到,而且不可能在区间的内部达到.由于$f(x_1) > f(0)$,所以当 $x \in (0, x_1)$时,$f(x) < f(x_1) = x_1$.

综上所述,当 $x \in (0, x_1)$时,$x < f(x) < x_1$.

(2)证明

$\because f(x) = ax^2 + bx + c$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)(a > 0)$$

$\therefore$函数 $f(x)$的图象的对称轴为直线 $x = -\dfrac{b}{2a}$,因此,$x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.

因为 x_1, x_2 是二次方程

$ax^2 + (b-1)x + c = 0$

的根,根据韦达定理得

$x_1 + x_2 = -\dfrac{b-1}{a}$.

$\because x_2 - \dfrac{1}{a} < 0$

$\therefore x_0 = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{1}{2}\left(x_1 + x_2 - \dfrac{1}{a}\right) < \dfrac{x_1}{2}$.

例 11:(1999 年全国)

已知函数 $y = f(x)$的图象是自原点出发的一条折线,当 $n \leqslant y \leqslant n+1 (n = 0, 1, 2, \cdots)$时,该图象是斜率为 b^n 的线段(其中正常数 $b \neq 1$),设数列$\{x_n\}$由 $f(x_n) = n (n = 1, 2, \cdots)$定义.

(1)求 x_1, x_2 和 x_n 的表达式;

(2)求 $f(x)$的表达式,并写出其定义域;

(3)证明:$y = f(x)$的图象与 $y = x$ 的图象没有横坐标大于1的交点.

解题思路:

(1)解,依题意 $f(0) = 0$,又由 $f(x_1) = 1$,当 $0 \leqslant y \leqslant 1$ 时,函数 $y = f(x)$的图象是斜率为$b^0 = 1$ 的线段,

故由 $\dfrac{f(x_1) - f(0)}{x_1 - 0} = 1$ 得 $x_1 = 1$.

又由 $f(x_2) = 2$,当 $1 \leqslant y \leqslant 2$ 时,函数 $y = f(x)$的图象是斜率为 b 的线段,故由

$\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = b$ 即 $x_2 - x_1 = \dfrac{1}{b}$得 $x_2 = 1 + \dfrac{1}{b}$.

记 $x_0 = 0$.由函数 $y = f(x)$图象中第 n 段线段的斜率为 b^{n-1},故得

$\dfrac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}=b^{n-1}$.

又 $f(x_n)=n, f(x_{n-1})=n-1$;

所以　$x_n-x_{n-1}=(\dfrac{1}{b})^{n-1}, n=1,2,\cdots$

由此知数列 $\{x_n-x_{n-1}\}$ 为等比数列,其首项为 1,公比为 $\dfrac{1}{b}$,因 $b\neq1$,得

$$x_n=(x_n-x_{n-1})+(x_{n-1}-x_{n-2})+\cdots+(x_2-x_1)+(x_1-x_0)$$

$$=1+\frac{1}{b}+\cdots+\frac{1}{b_{n-1}}=\frac{b-(\frac{1}{b})^{n-1}}{b-1}$$

即 $x_n=\dfrac{b-(\frac{1}{b})^{n-1}}{b-1}$.

(2)解　当 $0\leqslant y\leqslant1$,从(1)可知 $y=x$,即当 $0\leqslant x\leqslant1$ 时,$f(x)=x$.当 $n\leqslant y\leqslant n+1$ 时,即当 $x_n\leqslant x\leqslant x_{n+1}$ 时,由(Ⅰ)可知

$f(x)=n+b^n(x-x_n)\ (x_n\leqslant x\leqslant x_{n+1}, n=1,2,3,\cdots)$

为求函数 $f(x)$ 的定义域,须对

$x_n=\dfrac{b-(\frac{1}{b})^{n-1}}{b-1}(n=1,2,3,\cdots)$ 进行讨论.

当 $b>1$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b-(\frac{1}{b})^{n-1}}{b-1}=\dfrac{b}{b-1}$;

当 $0<b<1$ 时,$n\to\infty$,x_n 也趋向于无穷大.

综上所述,当 $b>1$ 时,$y=f(x)$ 的定义域为 $[0,\dfrac{b}{b-1})$;

当 $0<b<1$ 时,$y=f(x)$ 的定义域为 $[0,+\infty)$.

(3)证明

思路 1:首先证明当 $b>1, 1<x<\dfrac{b}{b-1}$ 时,恒有 $f(x)>x$ 成立,用数学归纳法证明:

①由(2)知当 $n=1$ 时,在 $(1,x_2]$ 上,$y=f(x)=1+b(x-1)$,所以 $f(x)-x=(x-1)(b-1)>0$ 成立.

②假设 $n=k$ 时,在 $(x_k,x_{k+1}]$ 上恒有 $f(x)>x$ 成立.即 $f(x_{k+1})=k+1>x_{k+1}$.

在 $(x_{k+1},x_{k+2}]$ 上,$f(x)=k+1+b^{k+1}(x-x_{k+1})$

所以 $f(x)-x=k+1+b^{k+1}(x-x_{k+1})-x$

$=(b^{k+1}-1)(x-x_{k+1})+(k+1-x_{k+1})>0$ 也成立.

由①,②可知,对所有自然数 n 在 $(x_n,x_{n+1}]$ 上都有 $f(x)>x$ 成立,即 $1<x<\dfrac{b}{b-1}$ 时,恒有 $f(x)>x$.

其次,当 $b<1$,仿上述证明,可知当 $x>1$ 时,恒有 $f(x)<x$ 成立.故函数 $y=f(x)$ 的图象与 $y=x$ 的图象没有横坐标大于 1 的交点.

思路2:首先证明当 $b>1$,$1<x<\frac{b}{b-1}$时,恒有 $f(x)>x$ 成立.

对任意 $x\in(1,\frac{b}{b-1})$,存在 $x_n<x\leqslant x_{n+1}$,此时有 $f(x)-f(x_n)=b^n(x-x_n)>x-x_n$ $(n\geqslant1)$

所以　$f(x)-x>f(x_n)-x_n$

又　$f(x_n)=n>1+\frac{1}{b}+\cdots+\frac{1}{b^{n-1}}=x_n$.

所以　$f(x_n)-x_n>0$

所以　$f(x)-x>0$

即有　$f(x)>x$ 成立.

其次,当 $b<1$,仿上述证明,可知当 $x>1$ 时,恒有 $f(x)<x$ 成立.

故函数 $f(x)$的图象与 $y=x$ 的图象没有横坐标大于1的交点.

例12:(2000年全国)设函数 $f(x)=\sqrt{x^2+1}-ax$,其中 $a>0$.

(1)解不等式 $f(x)\leqslant1$;

(2)求 a 的取值范围,使函数 $f(x)$在区间$[0,+\infty)$上是单调函数.

解题思路:

(1)解

思路1:不等式 $f(x)\leqslant1$　即

$\sqrt{x^2+1}\leqslant1+ax$

由此可得　$1\leqslant1+ax$,又由 $a>0$ 知 $x\geqslant0$,所以原不等式等价于

$$\begin{cases}x^2+1\leqslant(1+ax)^2\\x\geqslant0\end{cases}$$

即$\begin{cases}x\geqslant0\\(a^2-1)x+2a\geqslant0\end{cases}$

所以,当 $a\geqslant1$ 时,解为 $x\geqslant0$;

当$0<a<1$时　解为$0\leqslant x\leqslant\frac{2a}{1-a^2}$.

思路2:$f(x)\leqslant1$ 等价于不等式组

$$\begin{cases}1+ax\geqslant0\\x^2+1\leqslant(1+ax)^2\end{cases}$$

即$\begin{cases}x\geqslant-\frac{1}{a} & \cdots\cdots①\\(1-a^2)x^2-2ax\leqslant0 & \cdots\cdots②\end{cases}$

当 $a>1$ 时,由②得

$x\leqslant\frac{2a}{1-a^2}$或 $x\geqslant0$……③

$\because\frac{2a}{1-a^2}-(-\frac{1}{a})=\frac{a^2+1}{a(1-a^2)}<0$

$\therefore$由①③可得　$x\geqslant0$.

当 $a=1$ 时，由②可得

$x\geqslant 0$………④

由①④可得 $a\geqslant 1$ 时，$x\geqslant 0$

当 $0<a<1$ 时，由②得

$0\leqslant x\leqslant\dfrac{2a}{1-a^2}$

综上所述，当 $a\geqslant 1$ 时，$x\geqslant 0$；

当 $0<a<1$ 时，$0\leqslant x\leqslant\dfrac{2a}{1-a^2}$.

思路 3：$f(x)\leqslant 1$ 即 $\sqrt{x^2+1}\leqslant ax+1$

令 $y_1=\sqrt{x^2+1}$，$y_2=ax+1$，则 y_1 的图象如图(1—3)所示是双曲线 $y^2-x^2=1$ 的上半支，顶点为 $(0,1)$，渐近线为 $y=\pm x$，而 $y_2=ax+1$ 的图象为过 $(0,1)$ 点，斜率为 a 的直线.

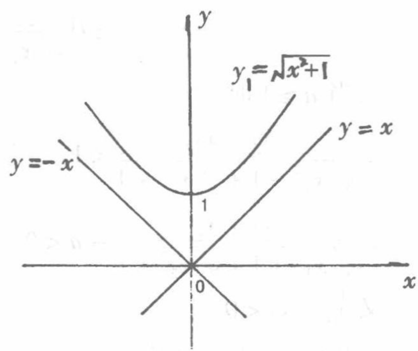

图 1－3

所以该不等式的解即为当 y_2 的图象位于 y_1 的图象上方时，图象中点的横坐标的集合(含端点值).因此：

当 $a\in(0,1)$ 时，如图(1—4)，y_1 与 y_2 有两个交点 $A(0,1)$，$B(\dfrac{2a}{1-a^2},y_B)$，所以不等式的解为：

$0\leqslant x\leqslant\dfrac{2a}{1-a^2}$

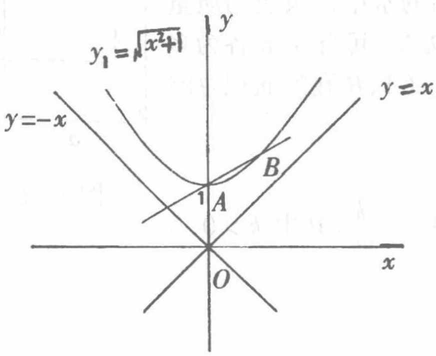

图 1－4

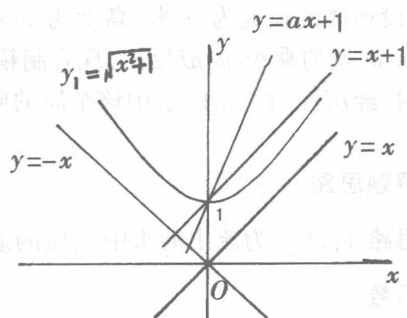

图 1－5

当 $a\geqslant 1$ 时，如图(1—5)，y_2 与 y_1 有且仅有一个交点 $(0,1)$，据图显然可知，不等式的解为 $x\geqslant 0$.

综上所述，不等式的解为：

当 $a\geqslant 1$ 时，$x\geqslant 0$；

当 $0<a<1$ 时，$0\leqslant x\leqslant\dfrac{2a}{1-a^2}$.

(2)解：在区间 $[0,+\infty)$ 上任取 x_1,x_2，使得 $x_1<x_2$.则

$$f(x_1)-f(x_2)=\sqrt{{x_1}^2+1}-\sqrt{{x_2}^2+1}-a(x_1-x_2)$$
$$=\frac{{x_1}^2-{x_2}^2}{\sqrt{{x_1}^2+1}+\sqrt{{x_2}^2+1}}-a(x_1-x_2)$$
$$=(x_1-x_2)\left(\frac{x_1+x_2}{\sqrt{{x_1}^2+1}+\sqrt{{x_2}^2+1}}-a\right)$$

①当 $a\geqslant 1$ 时，

$$\because \frac{x_1+x_2}{\sqrt{{x_1}^2+1}+\sqrt{{x_2}^2+1}}<1,$$

$$\therefore \frac{x_1+x_2}{\sqrt{{x_1}^2+1}+\sqrt{{x_2}^2+1}}-a<0$$

又 $x_1-x_2<0$

$\therefore f(x_1)-f(x_2)>0.$

即 $f(x_1)>f(x_2)$

所以，当 $a\geqslant 1$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调减函数.

②当 $0<a<1$ 时，在区间 $[0,+\infty)$ 上存在两点 $x_1=0, x_2=\frac{2a}{1-a^2}$，满足 $f(x_1)=1$，$f(x_2)=1$.即 $f(x_1)=f(x_2)$，所以函数 $f(x)$ 的区间 $[0,+\infty)$ 上不是单调函数.

综上所述，当且仅当 $a\geqslant 1$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调函数.

例 13(1998 年全国)：如图(1—6)，为处理含有某种杂质的污水，要制造一底宽为 2 米的无盖长方体沉淀箱，污水从 A 孔流入，经沉淀后从 B 孔流出，设箱体的长度为 a 米，高度为 b 米.已知流出的水中该杂质的质量分数与 a、b 的乘积 ab 成反比.现有制箱材料 60 平方米，问当 a、b 各为多少米时，经沉淀后流出的水中该杂质的质量分数最小(A、B 孔的面积忽略不计).

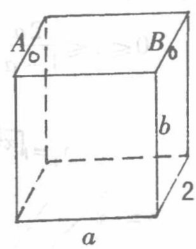

图 1-6

解题思路：

思路 1：设 y 为流出的水中杂质的质量分数，则 $y=\frac{k}{ab}$，其中 $k>0$ 为比例系数.

依题意，有 $4b+2ab+2a=60(a>0,b>0)$

得 $b=\frac{30-a}{2+a}(0<a<30)$.

于是
$$y=\frac{k}{ab}$$
$$=\frac{k}{\frac{30a-a^2}{2+a}}$$
$$=\frac{k}{-a+32-\frac{64}{a+2}}$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com