

ZHONG DIAN
ZHONG XUE

王样麟 宋淑英 等编

重点中学

高中数学试题精选

• 修订本 •

上海科学技术文献出版社

重点中学高中数学试题精选

(修 订 本)

王祥麟 宋淑英 等编

上海科学技术文献出版社

(沪)新登字 301 号

重点中学高中数学试题精选

(修 订 本)

王祥麟 宋淑英 等编

*

上海科学技术文献出版社出版发行

(上海市武康路 2 号 邮政编码 200031)

全国新华书店经销

上海科技文献出版社昆山联营厂印刷

*

开本 787×1092 1/32 印张 8.25 字数 192,000

1994 年 4 月第 1 版 1994 年 4 月第 1 次印刷

印数: 1—11,800

ISBN 7-5439-0356-3/O·091

定 价: 4.20 元

《科技新书目》307—252

前 言

本书是根据全日制中学数学教学大纲和现阶段高考命题的要求编写的。其目的是通过分类试题和综合试题的练习，帮助读者深入理解基本概念，牢固掌握基础知识，并提高分析问题和解决问题的能力。为此，在选题时力求知识覆盖面广，题型新颖多样，既有系统性又有综合性。在该书答案与简解部分，对难度大的习题进行了精辟的分析与指导。

本书力求做到既能满足高中数学教学的需要，又能适应高中毕业班同学总复习的要求。它可作为高中学生课外辅导教材和高考复习资料，以及中学教师的参考用书。

本书自1989年出版以来，深受广大读者欢迎，先后重印7次，计15余万册。随着时间的推移，试题内容作了更新修订。全书共收编分类试题12套；综合试题8套；1991年，1992年和1993年上海市高中数学会考试题、上海市高考试题和全国高考试题（理、工、农、医类），并均附有题解。

本书分类试题一、八、九由李彦中编写，分类试题四、五、六由傅贻明编写，分类试题十、十一、十二由崔家华编写，分类试题三、七及综合试题五由苏绍锋编写。综合试题一、六、七、八由王祥麟、於聚谷编写，综合试题二、三、四由宋淑英编写，分类试题二由曹道芳编写，1991~1993年上海市会考试题、上海市高考试题和全国高考试题由王祥麟编写，全书图形由浦美燕绘制，最后全书由王祥麟进行统稿，限于编者水平，难免有缺点甚至谬误，敬请广大读者批评指正。

愿本书能成为广大中学生，高考复习者和数学爱好者的良师益友.

编 者
1993 年 8 月

目 录

第一部分 分类试题	(1)
一、代数函数与代数方程	(1)
二、三角函数	(6)
三、反三角函数与三角方程	(11)
四、数列、极限与数学归纳法	(15)
五、不等式	(19)
六、复数	(22)
七、排列、组合和二项式定理	(26)
八、直线与平面	(30)
九、多面体与旋转体	(34)
十、直线和圆	(38)
十一、圆锥曲线	(42)
十二、参数方程、极坐标	(46)
第二部分 综合试题	(52)
综合试题一	(52)
综合试题二	(56)
综合试题三	(60)
综合试题四	(64)
综合试题五	(69)
综合试题六	(72)
综合试题七	(77)
综合试题八	(81)
答案或简解	(86)
第一部分 分类试题答案或简解	(86)
第二部分 综合试题答案或简解	(134)
第三部分 1991 年、1992 年、1993 年上海市高中数学会	

考试题及解答(166)

一、1991年上海市高中数学会考试题(166)

二、1992年上海市高中数学会考试题(174)

三、1993年上海市高中数学会考试题(182)

第四部分 1991年、1992年、1993年上海市和全国高考

数学试题及解答(190)

一、1991年上海市高考数学试题(190)

二、1991年全国高考数学试题(理、工、农、医类).....(203)

三、1992年上海市高考数学试题(213)

四、1992年全国高考数学试题(理、工、农、医类).....(225)

五、1993年上海市高考数学试题(235)

六、1993年全国高考数学试题(理、工、农、医类).....(247)

第一部分 分类试题

一、代数函数与代数方程

(一)选择题(本题共 30 分, 每小题 2 分)每个小题都给出代号为 A、B、C、D 的四个结论, 其中有且只有一个结论是正确的, 选对得 2 分, 不选、选错或选出代号超过一个, 一律得零分*

1. 集合 $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, A 的非空真子集的个数为 ().

(A) 61; (B) 62; (C) 63; (D) 64.

2. 全集 $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, 且 $A, B \subset I$, 若 $A \cap B = \{2\}$, $\bar{A} \cap B = \{4\}$, $\bar{A} \cap \bar{B} = \{1, 5\}$, 则下列结论正确的是 ().

(A) $3 \notin A, 3 \notin B$; (B) $3 \in A, 3 \notin B$;

(C) $3 \notin A, 3 \in B$; (D) $3 \in A, 3 \in B$.

3. 下列各对方程中, 表示同一图形的是 ().

(A) $\frac{y}{x} = 1$ 和 $y = x$; (B) $y = 2 \lg x$ 和 $y = \lg x^2$;

(C) $2^y = 8^x$ 和 $(y - 3x)(x^2 + y^2) = 0$;

(D) $x + y = 1$ 和 $\begin{cases} x = \cos^2 \theta \\ y = \sin^2 \theta \end{cases} (\theta \in R)$.

4. 函数 $y = |x|^{\frac{1}{n}}$ ($n \in N, n > 2$) 的图象大致形状有如下特点 ().

(A) 图象过 (0, 0) 和 (1, 1), 在 I、III 象限, 弯向 x 轴;

(B) 图象过 (0, 0) 和 (-1, 1), 在 II、IV 象限, 弯向 x 轴;

* 以后各套试题, 选择题要求都相同, 不再说明。

(C) 图象过(0, 0)和(1, 1), 在 I、II 象限, 弯向 x 轴;

(D) 图象过(0, 0)和(-1, -1), 在 III、IV 象限, 弯向 x 轴.

5. 函数 $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ 的值域是().

(A) $(-1, 1)$; (B) $[-1, 1]$;

(C) $[-1, 1)$; (D) $(-1, 1]$.

6. 已知函数 $y = f(x)$, $x \in R$, $f(0) \neq 0$, 且 $f(x_1) + f(x_2) = 2f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)f\left(\frac{x_1 - x_2}{2}\right)$, 则函数的奇偶性是().

(A) 只是奇函数; (B) 只是偶函数;

(C) 既是奇函数, 又是偶函数; (D) 非奇非偶函数.

7. 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ 与 $y = bx^2 + ax + c$ 的图象只可能是().

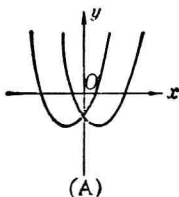


图 I-1-1(a)

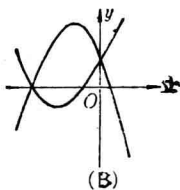


图 I-1-1(b)

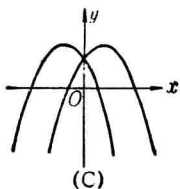


图 I-1-1(c)

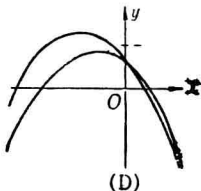


图 I-1-1(d)

8. 下列映射中,有逆映射的为().

(A) $M = \mathbb{R}^+$, $N = \{y | y \neq 0\}$, $f: M \rightarrow N$, $y = \sqrt{x}$;

(B) $M = \mathbb{Z}$, $N = \mathbb{Z}$, $f: M \rightarrow N$, $y = 3x$;

(C) $M = \{x | x \neq 0\}$, $N = \{y | y \neq 1\}$, $f: M \rightarrow N$, $y = 1 - \frac{1}{x}$;

(D) $M = \mathbb{R}$, $N = \mathbb{R}$, $f: M \rightarrow N$, $|y| = |x|$.

9. 函数 $y = \lg(ax^2 + 3ax + a + 2)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$ 时, a 的整数值是().

(A) 1; (B) 0; (C) 1 或 0; (D) 以上都不对.

10. 0.3^2 , $\log_2 0.3$, $2^{0.3}$ 这三个数之间的大小顺序是().

(A) $0.3^2 < 2^{0.3} < \log_2 0.3$; (B) $0.3^2 < \log_2 0.3 < 2^{0.3}$;

(C) $\log_2 0.3 < 2^{0.3} < 0.3^2$; (D) $\log_2 0.3 < 0.3^2 < 2^{0.3}$.

11. 若 $-1 < a < 0$, 则 3^a , $a^{\frac{1}{3}}$, a^3 的大小关系是().

(A) $3^a > a^2 > a^{\frac{1}{3}}$; (B) $a^3 > 3^a > a^{\frac{1}{3}}$;

(C) $3^a > a^{\frac{1}{3}} > a^3$; (D) $a^3 > a^{\frac{1}{3}} > 3^a$.

12. 如果 $y = \log_{a^2-1} x$ 在 $(0, +\infty)$ 内是减函数, 则 a 的取值范围是().

(A) $|a| < \sqrt{2}$; (B) $a > \sqrt{2}$;

(C) $a < -\sqrt{2}$; (D) $1 < |a| < \sqrt{2}$.

13. 函数 $f(x) = x|x| + px$ (p 是常数) 则 $f(x)$ 是().

(A) 对任何实数 p , 既不是奇函数, 也不是偶函数;

(B) 对任何实数 p , 是奇函数;

(C) 对任何实数 p , 是偶函数;

(D) 只有 $p=0$ 时, 是奇函数.

14. 不等式 $\log_{0.3}(x^2 - x - 2) < \log_{0.3}(2x^2 - 7x + 3)$ 的解是().

(A) $1 < x < 5$; (B) $x > 5$ 或 $x < 1$;

(C) $2 < x < 5$; (D) $3 < x < 5$.

15. 下列各对函数中, 互为反函数的是().

(A) $y = x^4 (x \in R)$ 与 $y = x^{\frac{1}{4}} (x \in \overline{R^-})$;

(B) $y = \sqrt{x} + 1 (x \in \overline{R^-})$ 与 $y = (x-1)^2 (x \in R)$;

(C) $y = -x^2 - 2 (x \geq 0)$ 与 $y^2 = -x - 2 (x \leq -2)$;

(D) $y = \frac{1-x}{1+x} (x \neq -1)$ 与 $y = \frac{1-x}{1+x} (x \neq -1)$.

(二) 填空题(本题共 45 分, 每小题 3 分)

1. 如果集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $O \subset A$, 又 O 中共有 k 个元素, 所有可能的 O 的各个元素的总和是 210, 那么 $k =$ _____.

2. 若函数 $f(x) = x+1$, $g(x) = \sqrt{x}$, $\varphi(x) = e^x$, 则函数 $g\{\varphi^{-1}[f(x)]\}$ 的定义域是_____.

3. 函数 $y = \frac{\sqrt{25-x^2}}{\lg(\sin x + \frac{1}{2})}$ 的定义域是_____.

4. 函数 $y = f(x)$, 既是奇函数, 又是偶函数, 它的解析表达式是_____.

5. 当且仅当实数 $m \in$ _____ 时, 抛物线 $y = x^2 - mx + m - 1$ 与 x 轴相交于两点 $(x_1, 0)$ 和 $(x_2, 0)$, 且 $0 < x_1 < 2$, $0 < x_2 < 2$.

6. 已知 $f(x-3) = 2x^2 - 3x + 1$, 则 $f(x) =$ _____.

7. 方程 $\log_2(4^x + 1) = x + \log_2(2^{x+3} - 6)$ 的解集是_____.

8. 若 $a^2 > b > a > 1$, 则 $\log_b \frac{b}{a}$, $\log_b a$, $\log_a b$ 的大小关系为_____.

9. 若 $\log_m \frac{1}{2} > \log_n \frac{1}{2}$, 则 m 和 n 的范围及大小关系可表示为_____.

10. 函数 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 6x + 17)$ 的值域是_____.

11. 方程 $x^2 + (m+2)x + m+5 = 0$ 只有正根时, m 的取值范围是_____.

12. 二次方程 $2mx^2 - 2x - 3m - 2 = 0$ 的一个根大于 1, 另一个根小于 1, 则 m 的取值范围是_____.

13. 已知方程 $x^2 - 2x + \lg(2a^2 - a) = 0$ 的两根异号, 则实数 a 的范围是_____.

14. 设 $x > 1, y > 1$, 且 $2\log_x y - 2\log_y x + 3 = 0$, 则 $x^2 - 4y^2$ 的最小值是_____.

15. 设函数 $y = x^{\frac{p}{q}}$ 的曲线如图 I-1-2 所示且 p 和 q 是两个互质的非零整数, 那么由图可判断 p, q 符号异同及绝对值大小, 可得结论是_____.

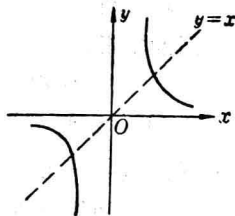


图 I-1-2

(三)(本题 7 分) 设 $A = \{x | -2 \leq x \leq a\}$, $B = \{y | y = 2x + 3, x \in A\}$, $C = \{z | z = x^2, x \in A\}$, 且 $C \subseteq B$, 求实数 a 的取值集合.

(四)(本题 7 分) 方程 $(\log_{(y+1)} x)^{-1} - (\log_2 x)^{-1} = 2$, 试导出相应的解析式 $y = f(x)$, 并作出图形.

(五)(本题 7 分) 在长宽分别为 a, b 的矩形中 ($a > b$), 如图 I-1-3 截得平行四边形 $ABCD$, 求平行四边形 $ABCD$ 的最大面积.

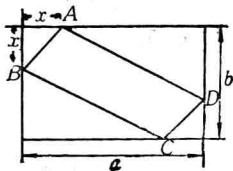


图 I-1-3

(六)(本题 9 分) 设 $f(x)$ 在定义域 A 上是单调递减函数, 又 $F(x) = a^{f(x)}$ ($a > 0$), 当 $f(x) > c$ 时,

$F(x) > 1$. 求证:

(1) $f(x) < 0$ 时, $F(x) < 1$;

(2) $F(x)$ 在定义域 A 上是减函数.

(七)(本题 10 分) $y = e^x$ 的图象如图 I-1-4, 试在同一坐标系中画出它关于 x 轴, y 轴, 原点和 $y = x$, $y = -x$ 对称的函数图象, 并分别写出它们的解析式.

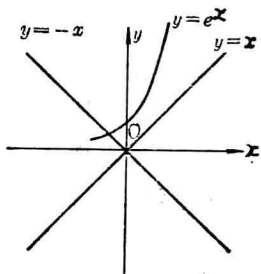


图 I-1-4

(八)(本题 10 分) 已知二次方程 $x^2 - 2x \sin \theta - (2 \cos^2 \theta + 3) = 0$ ($0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$),

1. 求证: 此二次方程有两个不同的实根;

2. 若两实根为 α, β ($\alpha < \beta$) 求点 (α, β) 的轨迹.

(九)(本题 10 分) 已知一元二次方程 $x^2 + px + q = 0$ 的两个实根之差与一元二次方程 $x^2 + qx + p = 0$ 的两实根之差相等, 求实数 p, q 间的函数关系 $q = f(p)$, 并画出它的图象.

(十)(本题 15 分) 已知函数 $f(x) = \log_a(x - ka)$, $g(x) = \log_a(x^2 - a^2)$,

1. 用 k, a 表示 $f(x) + g(x)$ 的定义域;

2. 如果方程 $\log_a(x - ka) = \log_a(x^2 - a^2)$ 有解, 试求 k 的取值范围.

二、三角函数

(一) 选择题(本题共 40 分, 每小题 4 分)

1. 两个相切的轴轮, 半径之比是 10:1, 大轮逆时针旋转一周时, 被带动的小轮转过的角的大小是().

(A) 2π ; (B) -2π ; (C) -20π ; (D) 20π .

2. 角 α 的终边上一点 P 的坐标是 $(\sin\theta, \cos\theta)$, 则 α 的值为().

(A) θ ; (B) $\frac{\pi}{2} - \theta$; (C) $k\pi + \frac{\pi}{2} - \theta, k \in \mathbb{Z}$;

(D) $2k\pi + \frac{\pi}{2} - \theta, k \in \mathbb{Z}$.

3. 函数 $y = \sin 3x + \operatorname{tg} \frac{2x}{5}$ 的最小正周期应为().

(A) π ; (B) 2π ; (C) 10π ; (D) 15π .

4. 函数 $y = \sqrt{-\cos\theta} + \sqrt{\operatorname{ctg}\theta}$ 的定义域为().

(A) $\pi \leq \theta \leq \frac{3}{2}\pi$; (B) $2k\pi + \pi \leq \theta \leq 2k\pi + \frac{3}{2}\pi$;

(C) $2k\pi + \pi < \theta \leq 2k\pi + \frac{3}{2}\pi$ 或 $\theta = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$;

(D) $2k\pi + \frac{\pi}{2} < \theta \leq 2k\pi + \frac{3}{2}\pi$. (以上 k 均为整数)

5. 已知集合

$$A = \left\{ a \mid a = 2 \sin \frac{n\pi}{3}, n \in \mathbb{Z} \right\};$$

$$B = \left\{ b \mid b = 2 \cos \frac{2k+3}{6} \pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

则 A 和 B 之间的关系是().

(A) $A \supset B$; (B) $A \subset B$; (C) $A = B$; (D) $A \neq B$.

6. 判断函数

(1) $y = \cos x \cdot \sin^2 x + x^2 \cos x$;

(2) $y = \cos x \cdot \operatorname{tg} x + \sin x$;

的奇偶性是().

(A) (1)(2)均是偶函数; (B) (1)(2)均是奇函数;

(C) (1)为奇函数, (2)为偶函数;

(D) (1)为偶函数, (2)为奇函数.

7. 若 $0^\circ < \theta < 45^\circ$, 下列不等式正确的是().

(A) $\cos \theta < \sin \theta < \operatorname{ctg} \theta$; (B) $\operatorname{ctg} \theta < \sin \theta < \cos \theta$;

(C) $\cos \theta < \operatorname{ctg} \theta < \sin \theta$; (D) $\sin \theta < \cos \theta < \operatorname{ctg} \theta$.

8. 下列等式中, 恒成立的是().

(A) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$;

(B) $\sin 3\alpha = 4 \sin(60^\circ - \alpha) \sin \alpha \sin(60^\circ + \alpha)$;

(C) $\cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$;

(D) $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg} 3\alpha = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} 2\alpha \cdot \operatorname{tg} 3\alpha$.

9. α, β 为锐角, 且满足 $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = \sin(\alpha + \beta)$, 则 $\alpha + \beta$ 的值为().

(A) $\frac{3\pi}{2}$; (B) π ; (C) $\frac{\pi}{2}$; (D) $\frac{\pi}{4}$.

10. 下列结论中, 不正确的是().

(A) 满足 $\sin A = \cos B$ 的 $\triangle ABC$ 一定是直角三角形;

(B) $\sin(n\pi + \theta) \cos(n\pi - \theta) = \frac{1}{2} \sin 2\theta$;

(C) 满足 $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C < 2$ 的 $\triangle ABC$ 是钝角三角形;

(D) $\cos x - \cos y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{y-x}{2}$.

(二) 填空题(本题共 40 分, 每小题 4 分)

1. 集合

$$A = \left\{ \alpha \mid \alpha = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\};$$

$$B = \left\{ \beta \mid \beta = (2n+1)\pi + \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

A 和 B 的关系是_____.

2. 化简
$$\frac{\sin(\pi - \alpha) \sin\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right) \operatorname{tg}(-\alpha - \pi)}{\operatorname{ctg}(\alpha - 2\pi) \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \cos\left(\frac{5\pi}{2} + \alpha\right)} = \underline{\hspace{2cm}}$$

3. 已知 $\sin \alpha < \cos 50^\circ$, 且 $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, 则 α 的范围是 .

4. 已知 $\frac{\sin x}{\sin \frac{x}{2}} = \frac{8}{5}$, 则 $\cos x = \underline{\hspace{2cm}}$.

5. $(5 - \sin x)(2 + \sin x)$ 的最大值是 .

6. 已知 $\operatorname{tg} \alpha$ 和 $\operatorname{tg} \beta$ 是方程 $x^2 + 4x + 3 = 0$ 的两个根, 则 $3 \cos^2(\alpha + \beta) + \sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha + \beta)$ 的值是 .

7. 已知 $\cos \theta - \sin \theta = b$, $\cos 3\theta + \sin 3\theta = a$, 用 b 表示 a , $a = f(b) = \underline{\hspace{2cm}}$.

8. 在 $\triangle ABC$ 中, $2AC = AB + BC$, 那么 $\operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

9. 不等式 $\operatorname{tg} \frac{x}{2} > \frac{\operatorname{tg} x - 2}{\operatorname{tg} x + 2}$ 的解是 .

10. 已知某正弦函数在一个周期内的图象如图 I-2-1 所示, 则该函数的

振幅 = ;
频率 = ;
周期 = ;
最大值 = ;
最小值 = .

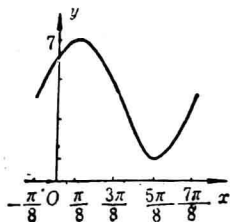


图 I-2-1

(三)(本题满分 6 分)

作函数 $y = \sin x \cdot \sqrt{1 - \sin^2 x} + \cos x \cdot \sqrt{1 - \cos^2 x}$ ($0 \leq x \leq 2\pi$) 的图象.

(四)(本题满分 12 分, 每小题 6 分)

1. 已知 θ 为锐角, 且 $\log_{\operatorname{ctg} \theta} \sin \theta = \frac{1}{2}$, 试求

$$\log_{(1+\operatorname{tg}^2 \theta)} \left(\frac{1}{2} \sin 2\theta \right)$$

的值.

2. 已知 $f(\theta) = \frac{1+\cos \theta - \sin \theta}{1-\sin \theta - \cos \theta} + \frac{1-\cos \theta - \sin \theta}{1-\sin \theta + \cos \theta}$,

(1) 化简 $f(\theta)$; (2) 求使 $f(\theta) = 4$ 的最小正角 θ .

(五)(本题满分 14 分, 每小题 7 分)

1. 求证: $\sin x + \sin 3x + \sin 5x = \frac{\sin^2 3x}{\sin x}$;

2. 已知 $\left(\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sin x} - \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} x} \right)^2 = \operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \beta$

求证: $\cos x = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha}$.

(六)(本题满分 8 分)

在 $\triangle ABC$ 中, $a \cos^2 \frac{C}{2} + c \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{3}{2} b$.

求证: $c - b = b - a$.

(七)(本题满分 14 分)

外国船只除特别许可者外, 不得进入离我海岸线 D 海里以内的区域, 设 A 、 B 是我两观测站, A 及 B 间的距离为 S 海里, 海岸线是过 A 、 B 的直线. 一外国船在 P 处, 在 A 站测得 $\angle BAP = \alpha$, 同时在 B 站测得 $\angle ABP = \beta$, 问 α 及 β 满足什么样的简单三角函数值不等式, 就应该向此未经特许的外国船只发出警告, 命令退出我海域?

(八)(本题满分 16 分)

球的内接圆锥 $V-AB$, AB 为底面直径, 球半径为 R , 球心为 O , 且圆锥 $O-AB$ 的母线与底面夹角为 θ .