数学会考高考指导丛书

数列问题

陈汝作 孙 琪 龚培仁 徐士德 编

同济大学出版社

数学会考高考指导丛书

数列问题

陈汝作　孙　琪　龚培仁　徐士德 编

同济大学出版社

内 容 提 要

本书内容包括三个部分。第一部分简单介绍了历届高考中数列问题的发展和演变过程，尤其是90年代以来数列问题的要求；第二部分详细叙述和分析了数列中各种问题的基本解法，如求数列通项、求数列前 n 项和、有关等差、等比数列的问题，并且着重介绍了它们在解高中毕业会考题中的用途；第三部分重点剖析了数列问题在高考中的难点及解决方法，包括高考中数列问题错解剖析以及数列综合问题等。

本书适合高三学生复习使用，也可作为高二学生掌握数列问题的一本必备参考书。

责任编辑　**缪临平**
封面设计　**李志云**

数学会考高考指导丛书
数 列 问 题
陈汝作　孙　琪　龚培仁　徐士德　编
同济大学出版社出版
（上海四平路 1239 号）
新华书店上海发行所发行
浙江上虞科技外文印刷厂印刷
开本：787×1092　1/32　印张 6.625　字数：150　千字
1995 年10月第 1 版　　1995 年10月第 1 次印刷
印数：1—5000　　全套定价：30.00 元
本册定价：7.00 元
ISBN 7-5608-1448-4/O·136

前　言

学生学习数学，必须首先掌握“双基”——基本知识，基本技能。

在掌握“双基”的基础上，还需要引伸触发，深入细究，了解所学的知识、技能在各方面的综合运用，同时培养和提高分析问题和解决问题的能力。

根据国家教委制定的全日制教学大纲和中学课本内容我们编写了这一套“数学会考、高考指导丛书”，共有四个分册：《数列问题》、《最值问题》、《轨迹问题》、《立体几何问题》，这四个分册所涉及的问题是高中数学中的重点和难点，是针对每年的会考和高考内容的。

由于学生对这些问题，理解不深，基本方法掌握不好，导致不能完整地作出正确的结论。几位具有20多年高中数学教学经验的教师，根据长期积累的资料，编写了这一套《丛书》，总结了学生在历年会考和高考中应试的经验与失误，详细地介绍了解决问题的基本方法，指出了每一个问题的重点和疑难点，实是近年来区别于其他类数学复习资料的一套好书。

本书第一章由吴沈泉、龚培仁编写，第二章由龚培仁、孙琪编写，第三章由陈汝作、徐士德、孙琪编写，全书由陈汝作统稿，电脑绘图：颜坚。

编　者

1995年7月

目　录

第一章　高考中数列问题剖析

数列是现行中学教材高二的主要内容之一，既是重点又是难点之一。显然，数列是高中毕业会考和高考的重点考查内容之一，也是高考的难点之一。

在高考中，主要考查"等差、等比数列中的计算问题"，还考查"一般数列的求前n项和的问题"以及"数列与极限的问题"等等。这些问题，除了较简单的运算出现在计算题或填充题中外，主要会出现在数列的综合题中。一般学生对这些问题较困难，只有掌握了较系统的数列中的基本方法，才能顺利地解答这些问题。

§1.1　数列在中学数学教学中的要求

一、数列问题的教学要求

教学大纲要求"掌握等差数列、等比数列的通项公式和求和公式，并能运用它解决一些实际问题。"并且要求"理解数列的极限的意义，能根据极限的运算法则求出极限。"

作为基础，必须掌握数列的概念，等差、等比数列的概念，等差、等比数列的通项公式和前n项和的公式。运用这些公式能由已知量直接求出未知量，而且这些公式是解决数列综合问题的有力工具，必须很好地掌握这些公式及其运用。

【例1.1】　设$\{a_n\}$是公差为-2的等差数列，如果，

$$a_1 + a_4 + a_7 + \cdots + a_{97} = 50,$$

那么

$$a_3+a_6+a_9+\cdots+a_{99}=?(\qquad)$$

$(A)-182$；$(A)-78$；$(C)-148$；$(D)-82$。

【解】 $\because$ $a_1,a_4,a_7,\cdots,a_{97}$；$a_3,a_6,a_9,\cdots,a_{99}$都是33项的等差数列，

$$\therefore\quad a_1+a_4+a_7+\cdots+a_{97}=\frac{33}{2}(a_1+a_{97})$$

$$=\frac{33}{2}(2a_1+96d)\qquad ①$$

$$a_3+a_6+a_9+\cdots+a_{99}=\frac{33}{2}(a_1+2d+a_1+98d)$$

$$=\frac{33}{2}(2a_1+100d)\qquad ②$$

由①得$\frac{33}{2}(2a_1+96d)=50$，

代入②得

$$a_3+a_6+a_9+\cdots+a_{99}=\frac{33}{2}(2a_1+96d)+\frac{33}{2}\cdot 4d$$

$$=50+66d$$

$$=50+66\cdot(-2)=-82$$

因此，应该选(D)。

【说明】 这是一道等差数列求和的基本运算题，根据方程观点易得①式，由①求出a_1，代入②式也可得解。但不如将②式转化为$\frac{33}{2}(2a_1+96d)+\frac{33}{2}\times 4d$进行计算更简便。

显然，这是求等差数列前n项和的计算问题，是教学的基本要求，当然也能作为会考和高考的基本题。由于本题可以

有两种方法，因此也能看出运算的不同技巧和方法。

类似的基本运算题也可以出现在等比数列中，也可以将数列的通项公式、前n项和的公式等几方面的内容结合起来进行运算。

【例1.2】 已知数列$\{a_n\}$是公差不为零的等差数列，如果S_n是$\{a_n\}$的前n项和，那么

$$\lim_{n\to\infty}\frac{nG_n}{S_n}=\_\_\_\_\_\_$$

【解】 $\because$

$$\frac{na_n}{S_n}=\frac{n[a_1+(n-1)d]}{\frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]}$$

$$=\frac{2a_1+2(n-1)d}{2a_1+(n-1)d}$$

$$=\frac{\frac{2a_1}{n-1}+2d}{\frac{2a_1}{n-1}+d}$$

其中a_1为首项，d为公差，

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2a_1}{n-1}+2d}{\frac{2a_1}{n-1}+d}=\frac{2d}{d}=2$$

【说明】 本例考查等差数列通项公式，前n项和的公式与极限运算定理。

作为教学要求，除了掌握运用基本公式进行计算通项、前n项和以及极限值外，还要能够解有关无穷递缩等比数列的问题。

【例1.3】 求下列各无穷等比数列的和：

(1) $16, -4, 1, -\frac{1}{4}, \cdots$；

(2) $0.5, 0.05, 0.005, 0.0005, \cdots$；

(3) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}, \frac{1}{2-\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, \cdots$

【解】 (1) ∵ $a_1 = 16, q = -\frac{1}{4}$

$$\therefore \quad S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{16}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{64}{5}$$

(2) 用类似方法可得 $S = \frac{5}{9}$。

(3) 同样可得 $S = 4 + 3\sqrt{2}$。

二、高中毕业会考中的数列问题

毕业会考是合格考试，属水平考试，着眼于基础知识、基本技能和基本能力，关于会考的目标和要求，在会考纲要中分"知道"、"理解"、"掌握"、"应用"四个层次表述。"知道"是指对知识的初步感性认识，"理解"是指对知识的理性认识，"掌握"是指能作简单的应用，而"应用"是指能够综合、灵活地运用知识解决问题。

会考纲要中要求"理解数列、等差数列、等比数列的概念，掌握等差数列与等比数列的通项公式、前n项和公式，并能够运用这些知识解决一些问题。"这就是说要求运用等差、等比数列的通项公式与前n项和公式求出数列中的未知量，当然

这也是基本的教学要求。

【例1.4】 已知数列$\{a_n\}$为等差数列，且$a_1=\frac{5}{6}$，$d=-\frac{1}{6}$，$S_n=-5$，求 n 与 a_n。

【解】 由等差数列前 n 项求和公式

$$S_n=a_1n+\frac{n(n-1)}{2}d,$$

得
$$\frac{5}{6}n+\frac{n^2-n}{2}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)=-5$$

化简得
$$n^2-11n-60=0,$$

解得
$$n_1=15, n_2=-4(\text{舍去})$$

再由通项公式，得

$$a_n=\frac{5}{6}+14\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)=-\frac{3}{2}$$

$$\therefore\quad n=15, a_n=-\frac{3}{2}$$

【例1.5】 已知一个等比数列的 $a_1+a_3=10$，$a_4+a_6=\frac{5}{4}$，求S_5。

【解】 由等比数列通项公式，有

$$\begin{cases}a_1+a_1q^2=10,\\ a_1q^3+a_1q^5=\frac{5}{4}\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}a_1(1+q^2)=10,\\ a_1q^3(1+q^2)=\frac{5}{4}\end{cases}$$

$\because \quad a_1 \neq 0, 1+q^2 \neq 0$,两式相除,得

$$q^3 = \frac{1}{8} \qquad \therefore \quad q = \frac{1}{2}$$

由此得 $$a_1 = 8$$

$$\therefore \qquad S_5 = \frac{a_1(1-q^5)}{1-q} = 15\frac{1}{2}$$

上面两例是等差、等比数列中的基本计算题。在等差数列与等比数列中,有两个特征 a_n 与 S_n,围绕它们分别有两套公式,均含有五个量:a_1, d, n, a_n, S_n 与 a_1, q, n, a_n, S_n,知道了其中三个量,就可以求出其他两个量(简言之,“知三求二”)。对于等差数列,只遇到一次方程或二次方程,比较简单;对于等比数列,则可能涉及高次方程或指数方程,有时求解较困难。

这些问题属于教学中的基本要求,也是高中毕业会考的基本要求之一,显然难度不会太高。

除此以外,会考纲要还要求“了解数列极限的意义,掌握数列极限的四则运算法则;会求公比的绝对值小于1的无穷等比数列前 n 项和的极限。”这就是说,要求会计算数列的极限值以及无穷递缩等比数列的和。

【例1.6】 求下列各极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}(a>0, b>0)$

【解】 (1) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}=\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)$

$$=\frac{1}{2}$$

（2）当$a\geqslant b$时，则$c=\frac{b}{a}\leqslant 1$，原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a+bc^n}{1+c^n}=a$

当$a<b$时，类似地可得原式$=b$。

【说明】 要掌握住几个重要的基本数列极限，如$\lim\limits_{n\to\infty}c=c$（$c$为常数），$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^k}=0$（$k$为正实数），还有$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$（$|q|<1$）。含有字母，要分情况讨论。

【例1.7】 设等比数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，并且

$$a_1+a_2+a_3=351,a_2+a_3+a_4=117$$

求$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$。

【解】 设$\{a_n\}$的公比为q，则$a_2+a_3+a_4=q(a_1+a_2+a_3)$，由已知条件得$q=\frac{1}{3}$。因此，$\{a_n\}$为无穷递缩等比数列。

由$(a_1+a_2+a_3)-(a_2+a_3+a_4)=234$，即$a_1-a_1\cdot\frac{1}{27}=234$。可解得$a_1=243$。

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{a_1}{1-q}=364\frac{1}{2}$$

【说明】 本例要先说明该数列为无穷递缩等比数列（即公比的绝对值小于1的无穷等比数列），然后再运用无穷项和的公式求出结果。

三、高考中的数列问题

高考是选拔考试，其命题要求“既有利于高等学校选拔合格的新生，又要有利于中学数学教学的改革”。数学高考旨在考查中学数学的基础知识、基本技能和逻辑思维能力、运算能力、空间想象能力以及综合运用能力。由于高考是在毕业会考的基础上进行的选拔性考试，因此不论试题的深度与广度，综合性等都要比会考的要求高一些。

高考的考试说明中要求“理解数列的概念，掌握等差数列与等比数列的概念、通项公式、前 n 项和的公式，并能够运用这些知识解决一些问题(等差、等比数列以外的递归数列不作要求)。”考试说明中还要求“了解数列极限的意义，掌握数列极限的四则运算法则，会求公比的绝对值小于 1 的无穷等比数列前 n 项和的极限。”尽管从文字叙述上，会考要求与高考要求大致相同，但实际考题中会考试题与高考试题相差甚远，主要难度相差很大。

【例1.8】 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=\frac{\pi}{3}n^2+C$，式中 C 为常数，$n=1,2,3,\cdots$。

(1) 如果 $C\neq0$，求证：$\{a_n\}$不是等差数列；

(2) 如果 $C=0$，求证：对任意大于 1 的自然数 n，和数 $\cos^2(a_{n-1})+\cos^2(a_n)+\cos^2(a_{n+1})$是一个与 n 无关的常数，并求出这个常数。

【解】 (1) 略。

(2) $\because\quad C=0\qquad\therefore\quad S_n=\frac{\pi}{3}n^2$

$a_1=S_1=\frac{\pi}{3}$，当$n\geq2$，且$n\in N$时，

$$a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{\pi}{3}(n^2 - n^2 + 2n - 1)$$

$$= \frac{\pi}{3}(2n-1)$$

和数

$$S = \cos^2(a_{n-1}) + \cos^2(a_n) + \cos^2(a_{n+1})$$

$$= \frac{1}{2}(1 + \cos 2a_{n-1} + 1 + \cos 2a_n + 1 + \cos 2a_{n+1})$$

$$= \frac{1}{2}[3 + 2\cos(a_{n-1} + a_{n+1}) \cdot \cos(a_{n+1} - a_{n-1}) + \cos 2a_n]$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}[2\cos\frac{4\pi}{3}\cos 2a_n + \cos 2a_n]$$

$$= \frac{3}{2}$$

因此，$\cos^2(a_{n-1}) + \cos^2(a_n) + \cos^2(a_{n+1})$是一个与$n$无关的常数，且此常数为$\frac{3}{2}$。

【说明】 本例是1988年广东高考试题。考查了数列概念和三角函数的恒等变换和综合分析的能力。同样是数列的求若干项和的计算问题，但比直接计算的会考中的计算题难度要高 。读者可将本例与例1.1、例 1.3 对比。

一般来说，数列问题在高考试题中属于难度较高的综合题，要求考生具备一定的运算能力和逻辑推理能力。

【例1.9】 设实数$a \neq 0$，数列$\{a_n\}$是首项为 a、公比是$(-a)$的等比数列 记$b_n = a_n \lg|a_n|, n = 1, 2, \cdots$;

$$S_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n, n = 1, 2, \cdots$$

（1）求证：当$a\neq-1$时，对任意自然数n，都有

$$S_n=\frac{a\lg|a|}{(1+a)^2}[1+(-1)^{n+1}(1+n+na)a^n]$$

（2）请问：当$0<a<1$时，是否存在自然数M，使得对任意自然数n，都有$b_n\leqslant b_M$？证明你的结论。

【解】（1）略。

（2） 欲判断是否存在自然数M，使得对任意自然数n，都有$b_n\leqslant b_m$？应先研究数列$\{b_n\}$变化的规律。

$\because\quad b_n=(-1)^{n-1}na^n\lg|a|$，

$\therefore\quad n=2k+1$时

$$b_{2k+1}=(-1)^{2k}(2k+1)a^{2k+1}\lg|a|<0, \quad ①$$

$n=2k$时，

$$b_{2k}=(-1)^{2k-1}2ka^{2k}\lg|a|>0。 \quad ②$$

可见数列$\{b_n\}$是摆动的， 且一切偶数项都大于奇数项。如果存在满足题设条件的自然数 M，则所有偶数项构成的数列应存在最大项。要求出这最大项，应研究

$$\frac{b_{2k+2}}{b_{2k}}=\frac{(-1)^{2k+1}(2k)a^{2k+2}\lg|a|}{(-1)^{2k-1}2ka^{2k}\lg|a|}$$

$$=a^2\left(1+\frac{1}{k}\right)。$$

当$a^2\left(1+\dfrac{1}{k}\right)\geqslant1$，$a^2+\dfrac{a^2}{k}\geqslant1$，$\dfrac{1}{k}\geqslant\dfrac{1-a^2}{a^2}>0$，

（$\because 0<a<1$）

亦即　$k\leqslant\dfrac{a^2}{1-a^2}$ 时　$b_{2k+2}\geqslant b_{2k}$。

当　$k>\dfrac{a^2}{1-a^2}$时，$b_{2k+2}<b_{2k}$。

取 $K=\left[\dfrac{a^2}{1-a^2}\right]$，则 $k>K$ 时，$b_{2k+2}<b_{2k}$；

$k\leqslant K$ 时，$b_{2k+2}\geqslant b_{2k}$。

$\therefore\quad b_2<b_4<\cdots<b_{2k}\leqslant b_{2k+2}>b_{2k+4}>b_{2k+6}>\cdots$，

即 b_{2k+2} 是所有偶数项构成的数列中的最大项。

对任意自然数 k，有 $b_{2k-1}<0<b_{2k}\leqslant b_{2k+2}$。

取 $M=2K+2$，则对于任意自然数 n，都有 $b_n\leqslant b_M$。

【说明】 本例是1987年广东高考试题，考查等比数列与特殊数列的求和方法等。第(2)小题则是不等式与综合、分析能力的检查，要求很高，因而得分率很低。上述解法是分析法与综合法交替使用，虽然在知识上全部在教学大纲范围以内，但能力要求上是高于通用教材的。

自80年代以来，数列问题在高考试题中出现的次数与难度要求越来越高。下面表格是80年代后期高考试题中数列问题的情况。

内容		了解	理解	掌握	熟练掌握
数列概念，表示方法及性质	全国试题	[1987]七[1]	[1986]八	[1987]七(2)	[1989]三(23)
	上海试题		[1988]三(1)		[1987]七(2)
	广东试题		[1988]Ⅱ三(1)(3)		
等差、等比数列概念，通	全国试题	[1988]一(5)	[1990]三(21)		
	上海试题	[1985]九 [1988]一(11)	[1986]三(2) [1987]一(10) [1990]二(14)		[1989]六

内容		了解	理解	掌握	熟练掌握
项、中项、前*n*项之和	广东试题	[1990] I (19)	[1985] I 二(15) [1986] I 二(16) [1988] I 一(4) [1989] I 一(7) (14) [1990] II 四(1)	[1990] II 四(2)	[1987] II 五 [1989] II 五(2)
无穷递缩等比数列之和	全国试题		[1989]一(5)		
	上海试题			[1985]四(3) [1987]七(3)	
	广东试题	[1989] II 一([illegible])			
数列极限，极限运算法则	全国试题		[1985]七(2) [1986]二(4) [1987]二(4) [1987]七(3) [1988]二(5) [1990]二(18)		
	上海试题		[1986]二(3) [1988]一(6) [1989]一(9) [1990]四(24)		
	广东试题		[1985] I 一(6) [1986] I 二(8) [1987] II 一(5) [1988] II 一(4) [1990] II 一(3)		

从上表可看到，不论是全国试题、上海试题还是广东试题在80年代后期，每年都有数列问题，有时候难度还相当高，例如全国试题1987年第七题，1989年第23题；上海试题1987年第