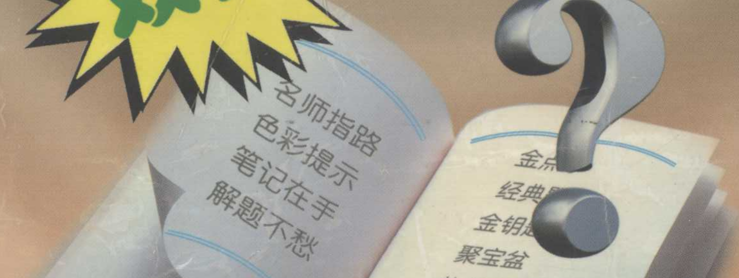
根据现行教材和新课标编写

解题笔记

JIETI BIJI CHUZHONG SHUXUE 丛书主编 盛焕华 本册主编 李俭昌

高中数学

双色



北京师范大学出版社

责任编辑/刘秀兰 胡 维 封面设计/李葆务

解题笔记

双色

高中

- 高中语文
- 高中数学
- 高中英语
- 高中物理
- 高中化学

ISBN 7-303-02559-6

9 787303 025596 >

ISBN 7-303-02559-6/G・1705
定价：18.00 元

根据现行教材和新课标编写

解题笔记

双色

丛书主编 盛焕华

本册主编 李俭昌

本册编者 李俭昌 沈 辉 倪红林 顾学冲 俞卫菊 沈 洪 陆曙兵

高中数学

北京师范大学出版社

北 京

图书在版编目(CIP)数据

解题笔记·高中数学/李俭昌主编.—北京:北京师范大学出版社,2003.10
ISBN 7-303-02559-6

Ⅰ.解…　Ⅱ.李…　Ⅲ.数学课-高中-解题-教学参考资料
Ⅳ.G634.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 16923 号

北京师范大学出版社出版发行
(北京新街口外大街 19 号　邮政编码:100875)
出版人:赖德胜
北京京师印务有限公司印刷　全国新华书店经销
开本:890mm×1 240mm　1/32　印张:11.875　字数:361 千字
2003 年 10 月第 1 版　2003 年 10 月第 1 次印刷
印数:1～5 000　定价:18.00 元

丛书编委会名单

前　言

解题技巧是解题的思想原则、运思方略和操作程序等高度集合的结晶和技术化、熟练化、效益化的体现。技巧是方法的巧妙运用，其核心就是快捷、熟练的解题技巧才能使你真正战胜考试。本套丛书以此为亮点，重点揭示了解题捷径的技巧和思维方法，为你达到“一准、二快、三规范”的解题要求提供了科学的参考。

在体例设计上，考虑到中、高考的特点，初中各分册均以“专题”为序，以现行新教材和新课标为标准，充分融贯新课标中的新的教学思想和教学理念，体现超凡思维，让学生既知其然，又知其所以然；高中各分册针对各学科的特点，以新教材为体系，以新“教学大纲”和“考试说明”中对考生的能力要求为依据，从“知识篇”、“能力篇”、“策略篇”三大部分对解题方法与技巧进行了全面的总结。每个专题的编写体例包括如下几个栏目：

[金点子]是对本专题解题方法与技巧的概述。

[经典题]精选全国和各省市近二三年来的典型中、高考试题和各地模拟试题，既注意体现各考点的深度，又注意体现各考点的广度。

[金钥匙] 剖析经典题命题思路，结合具体考题，把“金点子”中的方法、技巧具体化。

书中的不少题目大多列出多种解法，这些解法既有通解通法，也有作者独具匠心的创新解法，使读者从中拓宽视野，增长见识。

在多种解法的操练中掌握常见题型解题规律与技巧，举一反三，激活思维，活用技巧，融会贯通，从而具备综合应考的素质。

[聚宝盆] 总结每个专题的解题经验，警示思维误区，提醒考生少走弯路。

[热身赛] 选系列的、有代表性的中、高考题，让学生运用所掌握的方法、技巧解决问题，体验成功。

[赛场点评] 以精练的语言点评赛题，揭示答案要点。

本套丛书具有以下四大特色：

(1) 经典。内容厚重经典，题型规范。

(2) 创新。前瞻性和预测性俱佳，无论在试题的内容还是表现形式上，都充满了浓郁的时代气息，具有鲜活性、灵动性。做到融广博与智巧于一书，重思辨，突出创新。根据中、高考命题改革的特点，还选编了本学科联系生产生活实际，反映新科技成果和与其他学科综合交叉的创新题、作者新原创题，可以说与时俱进，给人以耳目一新之感。

（3）实用。高中各科切准高考命题脉络，精心设计二轮复习用的专题讲座材料，编选了具有代表性的例题，例题难度属中上等以上，使每位同学学有实效。

（4）全面。以“考纲、考点、考题”的“三考”为导向目标，全面介绍科学的思维方法，通过典型例题，制定解题策略，点拨解题内涵，归纳出应对这一考点的一般方法、技巧。

从方法与技巧的题型选择、知识要求和能力要求来看，本套丛书是一套不可多得的解题宝典，是初三、高三考生的必备用书。“笔记在手，解题不愁。”可以说，在你困惑的时候，它为你指点迷津，在你无助的时候，它为你排忧解难，使你豁然开朗、充满自信。我们有理由相信，精心编写的本套“解题笔记”一定会使每一位同学从中获得娴熟的解题技巧和创新的解题思路。

总主编：盛焕华

目录

第一部分　知识篇

第二部分　能力篇

第三部分　策略篇

第一部分 知识篇

策略1 集合问题的几种处理方法

金点子

集合是中学数学中最原始的概念．其主要内容包括集合元素的特征，集合的表示方法，元素与集合的关系以及集合之间的相互运算．在近几年的高考中，集合问题既有单独命题的试题，又有与其他知识点结合的命题的试题，是历年高考的必考内容．

经典题

例题1 集合 $M=\{x|x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\}$，集合 $N=\{x|x=\frac{k\pi}{4}+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$，则

A. $M=N$　　B. $N\subsetneqq M$　　C. $M\subsetneqq N$　　D. $M\cap N=\varnothing$

分析：本题是判断用描述法表示的两个集合之间的关系．由于描述法较为抽象，故可将 M、N 两集合用列举法表示，从而确定它们之间的关系．

解：将 M、N 用列举法表示为：

$M=\{\cdots,-\frac{3}{4}\pi,-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi,\cdots\}$

$N=\{\cdots,-\frac{3}{4}\pi,-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{4},0,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2},\frac{3}{4}\pi,\cdots\}$

故　$M\subsetneqq N$，故选 C.

捷径：用特值法易知 $\frac{\pi}{4}\in M,\frac{\pi}{4}\in N$，故排除选项 D，

又因为 $\frac{\pi}{2}\in N$，但 $\frac{\pi}{2}\notin M$，所以排除选项 A、B.

例题 2　已知 $A=\{a,a+d,a+2d\}$，$B=\{a,aq,aq^2\}$，若 $A=B$，试求 q 的值．

分析：由集合相等可知，这两个集合的元素应完全相同，同时还应考虑集合元素的性质，即互异性，从而即可求出 q 的值．

解：由集合元素的互异性知 $d\neq0$，$a\neq0$，$q\neq1$.

若 $\begin{cases}a+d=aq,\\a+2d=aq^2,\end{cases}$ 消去 d 即得，$q^2-2q+1=0$，即 $q=1$（舍去）.

若 $\begin{cases}a+d=aq^2,\\a+2d=aq,\end{cases}$ 消去 d 即得，$2q^2-q-1=0$，解之得

$q=-\dfrac{1}{2}$ 或 $q=1$（舍去）.

综上可知：$q=-\dfrac{1}{2}$.

总结：两个集合相等应包含所有元素都相等，同时还应注意集合中元素的互异性等基本特征，否则容易产生错解．

例题 3　已知集合 $A=\{(x,y)\mid y=x-2,x\in\mathbf{N}^*\}$，$B=\{(x,y)\mid y=a(x^2-x+1),x\in\mathbf{N}^*\}$，问：是否存在非零整数 a，使 $A\cap B\neq\varnothing$？若存在，求出 $A\cap B$；若不存在，说明理由．

分析：本题判定是否存在非零整数 a，使 $A\cap B\neq\varnothing$. 由 $A\cap B\neq\varnothing$ 可知，至少存在一个元素 $x_0\in A$ 且 $x_0\in B$，故问题转化为两个集合是否存在公共元素的问题，即转化为两个方程有无公共解的问题．

解：假设存在这样的非零整数 a，则方程组 $\begin{cases}y=x-2\\y=a(x^2-x+1)\end{cases}$ 有解．

消去 y 并整理得 $ax^2-(a+1)x+a+2=0$　…(1)

所以　$\Delta=(a+1)^2-4a(a+2)\geqslant0$，

解之得　$-\dfrac{2\sqrt{3}+3}{3}\leqslant a\leqslant\dfrac{2\sqrt{3}-3}{3}$

又因为 $a\in\mathbf{Z}$，且 $a\neq0$，

所以　$a=-2$ 或 $a=-1$.

当 $a=-2$ 时，由方程(1)解得 $x=0$ 或 $x=\dfrac{1}{2}$.

又因为 $x\in\mathbf{N}^*$，所以 $x=0$ 或 $x=\dfrac{1}{2}$ 均应舍去；

当 $a=-1$ 时，由方程(1)解得 $x=1$ 或 $x=-1$（舍去），

又当 $x=1$ 时，由 $y=x-2$ 得 $y=-1$.

综上可知，存在这样的非零整数 $a=-1$，使 $A\cap B\neq\varnothing$，

此时 $A\cap B=\{(1,-1)\}$.

总结：有关集合运算时，首先应对描述法表示的集合中的代表元素充分认识，本题中代表元素为 (x,y)，它表示的是坐标平面中的点，若代表元素改为 y，即 $A=\{y\mid y=x-2,x\in\mathbf{N}^*\}$，$B'=\{y\mid y=a(x^2-x+1),x\in\mathbf{N}^*\}$，则它所表示的意义与原题完全不同了.

例题 4　已知 $f(x)=x^2-ax+b(a,b\in\mathbf{R})$，$A=\{x\mid f(x)-x=0,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x\mid f(x)-ax=0,x\in\mathbf{R}\}$，若 $A=\{1,-3\}$，试用列举法表示集合 B.

分析：因为集合 B 是方程 $f(x)-ax=0$ 的解集，所以要求集合 B，需设法求出 a、b 的值，于是可通过集合 $A=\{1,-3\}$ 为突破口来寻找解题途径.

解：$f(x)-x=0$，即 $x^2-(a+1)x+b=0$，

因为 $A=\{1,-3\}$，所以由韦达定理得

$\begin{cases}1+(-3)=a+1\\1\times(-3)=b\end{cases}$，所以 $\begin{cases}a=-3\\b=-3\end{cases}$

所以 $f(x)=x^2+3x-3$.

$f(x)-ax=0$，即 $x^2+6x-3=0$. 所以 $B=\{x\mid x^2+6x-3=0\}=\{-3-2\sqrt{3},-3+2\sqrt{3}\}$.

总结：$f(x)-x=0$ 的解集就是集合 A，审题时注意数学语言之间的转换.

例题 5　已知集合 M,N，定义 $M-N=\{x\mid x\in M,且\ x\notin N\}$，则 $M-(M-N)$ 等于(　　).

A. M　　B. N　　C. $M\cap N$　　D. $M-N$

分析：本题中利用集合的概念，人为的定义了集合的“减法”，这是一个新的法则，教材上没有，故正确地使用文氏图将较易解决本题.

解：画出集合 M 和集合 N 的文氏图，如图所示，$M-N$ 实际是由属于集合 M 但不属于集合 N 的元素组成的，即图中的阴影部分，因此 $M-(M-N)$ 是由属于 M 但不属于 $M-N$ 中的元素组成的集合，故 $M-(M-N)$ 应等于 $M\cap N$，故选 C.

图 1-1

总结：正确理解题干中“$M-N$”的定义，并转化为文氏图表述将能很容易地解答本题，否则极易沿用实数的加减法的错误.

例题 6　开校运动会时，高一(1)班共有 28 名同学参加比赛，有

15 人参加游泳比赛，有 8 人参加田径比赛，有 14 人参加球类比赛，同时参加游泳和田径比赛的有 3 人，同时参加游泳和球类比赛的有 3 人，没有人同时参加三项比赛．问同时参加田径和球类比赛的有多少人？只参加游泳一项比赛的有多少人？

分析：根据题意，本题是一道与集合中元素的个数有关的题目，借助于文氏图求解较易理解．

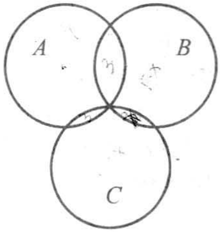


图 1-2

解：设$A=\{$参加游泳比赛的学生$\}$

$B=\{$参加田径比赛的学生$\}$

$C=\{$参加球类比赛的学生$\}$

再设同时参加田径和球类比赛的有 x 人，

由条件：$\text{card}(A\cap B)=3$，$\text{card}(A\cap C)=3$，$\text{card}(B\cap C)=x$.

所以，$15+8+14-3-3-x=28$，解之得 $x=3$.

因此，同时参加田径和球类比赛的有 3 人．

同理，只参加游泳一项比赛的有 $15-3-3=9$ 人．

总结：借助于文氏图得到结论：$\text{card}(A\cup B\cup C)=\text{card}(A)+\text{card}(B)+\text{card}(C)-\text{card}(A\cap B)-\text{card}(A\cap C)-\text{card}(B\cap C)+\text{card}(A\cap B\cap C)$是具有一般性的，但要注意不能写成 $A=15$，$B=8$，$A\cap B=3$ 等，否则与集合的符号是违背的．本题结论对于二个集合的情况：$\text{card}(A\cup B)=\text{card}(A)+\text{card}(B)-\text{card}(A\cap B)$.

例题 7　关于实数 x 的不等式$\left|x-\frac{(a+1)^2}{2}\right|\leqslant\frac{(a-1)^2}{2}$与 $x^2-3(a+1)x+2(3a+1)\leqslant 0\ (a\in\mathbf{R})$的解集分别为 A 和 B，求使 $A\cap B=A$成立的 a 的取值范围．

分析：$A\cap B=A\Leftrightarrow A\subseteq B$，本题中涉及的两个集合 A、B 都含有参数 a，看似较复杂，但若通过适当化简可转化为利用数轴处理集合包含关系．

解：由已知求得 $A=\{x\mid 2a\leqslant x\leqslant a^2+1\}$，又不等式 $x^2-3(a+1)x+2(3a+1)\leqslant 0$ 等价于$(x-2)[x-(3a+1)]\leqslant 0$.

(1)当 $3a+1\geqslant 2$ 即 $a\geqslant\frac{1}{3}$时，$B=\{x\mid 2\leqslant x\leqslant 3a+1\}$

由于 $A\cap B=A$，即 $A\subseteq B$，故

$\begin{cases}2a\geqslant 2,\\ a^2+1\leqslant 3a+1,\end{cases}$ 解之得 $1\leqslant a\leqslant 3$.

又 $a\geqslant\frac{1}{3}$，所以 $1\leqslant a\leqslant 3$.

(2)当 $3a+1<2$，即 $a<\frac{1}{3}$ 时，$B=\{x\mid 3a+1\leqslant x\leqslant 2\}$

由于 $A\subseteq B$，故

$\begin{cases}2a\geqslant 3a+1,\\ a^2+1\leqslant 2,\end{cases}$ 解之得 $a=-1$.

又 $a<\frac{1}{3}$

所以 $a=-1$

综上可得　$a=-1$ 或 $1\leqslant a\leqslant 3$.

总结：一般地，对含有参数的集合问题，应先转化，再展开讨论，并在讨论中注意“空集”是否符合题意，这是易疏忽的地方．本题中所涉及的两个集合 A,B 不可能为空集，故未加讨论．

例题 8　设集合 S 中的元素为实数，且满足条件：

①S 中不含 1.

②若 $a\in S$，则必有 $\frac{1}{1-a}\in S$.

(1)证明：若 $2\in S$，则 S 中必存在另外两个元素，并求出这两个元素；

(2)S 中的元素能否有且只有一个？为什么？

分析：条件①是为条件②中式子 $\frac{1}{1-a}$ 有意义服务的，故本题中条件②是解题的突破口，第(1)问是证明存在性，只要具体代入计算即可证得；第(2)问可从等根角度入手即 $a=\frac{1}{1-a}$ 是否有解，是解决第(2)问关键．

(1)证明：因为 $2\in S$，所以 $\frac{1}{1-2}=-1\in S$，且 $\frac{1}{1-(-1)}=\frac{1}{2}\in S$

即 S 中必有 -1 和 $\frac{1}{2}$ 这两个元素．

(2)解：若 S 中有且只有一个元素 a.

则 $\frac{1}{1-a}\in S$，从而有 $a=\frac{1}{1-a}$，

即 $a^2-a+1=0$，因为 $a^2-a+1=0$ 没有实数解，

所以 S 中不能仅有一个元素．

总结：处理存在性问题，结论有两种可能：一是存在，可通过具体计算求出，即可说明存在；二是不存在，则需利用有关知识论证说明

其不存在的原因，常借用反证的思维方式，即先假设存在，后导出矛盾，以此来说明不存在．

$\varnothing, -4$

例题 9 已知 $A=\{x \mid x^2+4x=0\}$，$B=\{x \mid x^2+2(a+1)x+a^2-1=0\}$．若 $A\cap B=B$，求 a 的值．

分析：$A\cap B=B \Leftrightarrow B\subseteq A$，由于集合 B 中含有字母 a，故应对关于 x 的一元二次方程 $x^2+2(a+1)x+a^2-1=0$ 有没有实数根进行讨论，若 B 为空集则满足题意；若 $B\neq\varnothing$，则可从 A 中元素入手研究，并注意检验．

解：由题意得 $A=\{0,-4\}$．

因为 $A\cap B=B$，所以 $B\subseteq A$．

若 $0\in B$，则 $a^2-1=0$，所以 $a=\pm1$．

当 $a=-1$ 时，$B=\{0\}$，满足题意；

当 $a=1$ 时，$B=A$，满足题意．

若 $-4\in B$，则 $a=1$ 或 $a=7$．

当 $a=7$ 时，$B=\{-4,-12\}\not\subseteq A$，不合题意，舍去．

若 $B=\varnothing$，则 $\Delta=4(a+1)^2-4(a^2-1)<0$，解之得 $a<-1$．

综上所述：$a=1$ 或 $a\leqslant-1$．

总结：对于数集之间包含关系的处理，用具体数值代入求出字母的值时应注意检验，这种方法易产生增解，同时应分析空集情形是否存在．

例题 10 设 $A=\{(x,y) \mid y^2=x+1\}$，$B=\{(x,y) \mid 4x^2+2x-2y+5=0\}$，$C=\{(x,y) \mid y=kx+b\}$，问是否存在自然数 k、b，使 $(A\cup B)\cap C=\varnothing$，试证明你的结论．

分析：$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)=\varnothing$ 就是 $A\cap C=\varnothing$ 与 $B\cap C=\varnothing$ 同时成立，本题中涉及的 A、B、C 三个集合都是点集，其图象分别是抛物线、抛物线、直线，从而问题转化为直线与这两条抛物线能否都没有公共点，进而问题又转化为，方程组是否有解的代数问题．

解：要使 $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)=\varnothing$，必须 $A\cap C=\varnothing$，且 $B\cap C=\varnothing$．

由 $\begin{cases} y^2=x+1 \\ y=kx+b \end{cases}$ 消去 y，得 $k^2x^2+(2kb-1)x+b^2-1=0$．

当 $k=0$ 时，有解 $x=b^2-1$，不合题意；

当 $k\neq0$ 时，由判别式 $\Delta_1=(2kb-1)^2-4k^2(b^2-1)<0$，得 $b>\dfrac{4k^2+1}{4k}$…①

又由$\begin{cases}4x^2+2x-2y+5=0\\y=kx+b\end{cases}$消去 y，得 $4x^2+2(1-k)x+5-2b=0$

由判别式 $\Delta_2=4(1-k)^2-16(5-2b)<0$，解得

$b<\dfrac{20-(k-1)^2}{8}\cdots$②

因为 $k\in\mathbf{N}$，所以$\dfrac{4k^2+1}{4k}=k+\dfrac{1}{4k}>1$

而$\dfrac{20-(k-1)^2}{8}\leqslant\dfrac{5}{2}$，由①②得 $1<b<\dfrac{5}{2}$.

由于 $b\in\mathbf{N}$，故 $b=2$，代入①②得

$1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}<k<1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，于是自然数 $k=1$.

故满足题意的自然数为 $k=1,b=2$.

总结：在与交集、并集、补集相关的求参数的运算中，要注意所求的值是否满足条件，而对于自然数、整数之类的参数，注意通过不等关系求出来.

热身赛

1. 设集合 $M=\{y\mid y=2^x,x\in\mathbf{R}\}$，集合 $N=\{z\mid z=x^2,x\in\mathbf{R}\}$，则 $M\cap N$ 为(　　).

   A. N　　B. M　　C. $\{4,2\}$　　D. $\{(2,4),(4,16)\}$

2. 已知集合 $M\subseteq\{1,2,3,4\}$，且 M 中至多有一个奇数，则这样的集合 M 的个数是(　　).

   A. 8　　B. 11　　C. 12　　D. 16

3. 已知集合 $A=\{(x,y)\mid y^2=x^2\}$，$B=\{(x,y)\mid y^2=x\}$，则由 $A\cap B$ 中各元素的连线组成的图形面积为________.

4. 定义 $M-N=\{x\mid x\in M,且\ x\notin N\}$，若 $M=\{1,3,5,7,9\}$，$N=\{2,3,5\}$，则 $M-N=$________.

5. 已知集合 $A=\{-1,2\}$，$B=\{x\mid mx+1=0\}$，若 $A\cup B=A$，则实数 m 的取值集合是________.

6. 集合 A 含有 10 个元素，集合 B 含有 8 个元素，集合 $A\cap B$ 含有 3 个元素，则集合 $A\cup B$ 含有________个元素.

7. 已知函数 $f(x)=x^2+ax+b(a,b\in\mathbf{R})$且集合 $A=\{x\mid x=f(x)\}$，集合 $B=\{x\mid x=f[f(x)]\}$

   (1)求证：$A\subseteq B$.