

高 考 数 学

任子朝 赵大悌
王树茗 瞿崇埏 编

命 题 研 究 与 试 题 分 析



委考试中心高考数学试题研究组

北京 师 范 大 学 出 版 社

高考数学命题研究 与试题分析

国家教委考试中心
高考数学试题研究组

任子朝 赵大悌 编
王树茗 瞿崇墀

北京师范大学出版社

(京)新登字160号

责任编辑：华 林

封面设计：李 强

责任校对：福 林

责任印制：唐正才

高考数学命题研究与试题分析

国家教委考试中心高考数学试题研究组
任子朝 赵大悌 王树茗 瞿崇垠 编

*

北京师范大学出版社出版发行
全国新华书店经销
人民交通印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32 印张：5.875 字数：122千
1993年1月第1版 1993年1月第1次印刷
印数：1-10 050

ISBN7-303-02710-6/G·1837

定 价：3.20元

前 言

一年一度的普通高等学校招生全国统一考试牵动着千家万户。高考试题质量如何？直接影响着高校录取和中学教学。认真开展对试题的评价工作，有利于改进高考命题，并可为中学教学提供积极的、准确的反馈信息，促进教学改革。为此，1992年高考结束后，国家教委考试中心，邀请全国十余省（市）高考阅卷负责人、中学教研人员和高考命题教师，共同分析考试情况，总结命题和阅卷经验。在此基础上，高考数学试题研究组，参考全国抽样统计数据，编写了《'92高考数学命题研究与试题分析》一书。

本书分为三大部分。第一部分分别对1992年普通高校招生全国统一考试的三套试卷（全国试卷文科、理科和湖南、云南、海南三省试卷）进行分析，阐述试卷设计的原则和内容。总体评价试题质量。第二、三部分对三套试卷逐题评价与解析。为帮助教师和研究人员进行进一步分析考生答题情况，本书提供了1992年高考数学试卷考生答题情况的抽样统计结果。

本书编写力图沟通命题、考试、教学（复习）三方面的情况。由于时间有限，疏漏之处在所难免。望读者同志斧正。

编 者

1992年10月

目 录

第一章	综述	1
第二章	1992年普通高等学校招生全国统一考试 数学试题评析	17
第三章	1992年普通高等学校招生全国统一考试 (湖南、云南、海南者会考后)数学试题分析.....	115

第一章 综 述

一、修订《考试说明》

《全国普通高等学校招生统一考试数学科说明》在1991年颁布实施后，受到社会各界的普遍好评。在实施过程中，我们认真听取了各方面的意见，经过分析研究，对《考试说明》进行了修改。

(一) 明确划分考试内容中的知识点，并界定对知识点的要求层次

《数学科考试说明》作为考试指导性文件，包括了目标、标准系统、内容系统和说明系统。目标、标准系统确定评价目标和各章节的目标，这些目标只有落实到具体内容才能成为行为化的和操作化的目标，因此在知识技能内容中，就要按知识技能系统进行分解，分到最后，就是知识点。

目前对知识点的理解和高中数学科知识点的划分尚无统一认识。一般以课本中节以下的单元为计数单位。但这样也存在着问题，有的单元讲授一个比较完整的内容，而有的单元只是复习总结。因此造成了高中数学科中知识点划分和计数的不统一。在命题过程中，也由于知识点划分不明确，导致考试要求过于笼统，对某一内容不能清楚界定区分，所以不能区别出要求的不同层次。同时计算覆盖面时没有统一标准，百分比不同。本次修改《考试说明》时，我们认真研究了知识内容和要求问题。我们理解的知识点是由概念、定理及

相关技能组成的相对独立的最小知识单位。在划分知识点时应考虑到知识的层次性和系统性，能分则分，仍为系统，即相对独立又比较完整。根据这个理解，《数学科考试说明》将高考的内容划分为128个知识点，作为命题和评价试卷的依据。

明确划分知识点，并界定对各知识点的要求层次是建立课程考试目标体系，使考试的目标和标准逐级具体化的一个重要步骤。按照章和知识点制定命题细目表可以使《考试说明》的目标成为具体的、可测量操作的目标，可以使试题有更恰当的分布，有效地控制和提高内容效度。同时也使考生、教师和命题人员对内容要求有一致的理解，避免复习、考试中的盲目性和随意性。在实际考查中，一个题目所涉及的知识点包括两部分：一部分是题目叙述所涉及到的知识点，只有掌握这些知识才能正确理解题意；另一部分是解题过程中要用到的知识点，只有掌握这些知识才有可能顺利解题。当然对解题所需的知识，由于数学题的一题多解，不同的解法所考查的知识点可能有所不同，对这个问题，在命题时应充分考虑各解法的差异，给定一些条件和限制因素，减少过多的解法，使各解法间不致有太大的差异。但对这个问题也不能绝对化。因为一题多解是数学科的特色，可以考查考生灵活运用知识的能力和思维的创造性。因此在统计每一题的知识点时，以题目叙述所涉及到的知识点加上解题常规思路所用到的知识点。

（二）调整题型比例

1992年《数学科考试说明》规定选择题、填空题和解答题分值比例为45%、15%和40%，与1991年相比，选择题增加

10%，解答题减少10%，做这样的调整是基于以下考虑：

首先从考查目标来看，近年来的解答题的前两个题的难度都较低，其作用之一是考查考生基础知识的掌握情况，发挥高考对中学教学的评价作用；再一个就是使有一定数学基础的考生都能入手做题，并取得较好的成绩，进而提高全卷的平均分，增强其学习数学的兴趣和自信。这两个目的通过选择题完全可以达到。就功能而言，就单一题目来说，选择题不可能象解答题那样广和深。但作为一组选择题，一般能够在较大的知识范围内实现考查目标，确切地测试对概念、性质、公式、法则和定理的掌握和理解程度，测试基本能力，测试深度对基础性部分尤为适用，对中等层次的也相当有效。因此可以减少一个解答题，而其考查功能由选择题实现。

其次从考试时间和数量看。数学科考试时间为120分钟，但覆盖面要求较大。数学科有近130个知识点，为达到60%~70%的覆盖面，以每题平均2~4个知识点论，要有近30道题，显然靠增加解答题是不可能很好实现考查目的的，因此必须增加选择题的数量以增加全卷题目数量，提高覆盖率，同时也可以提高考试的信度和效度，使解答题真正发挥其考查综合分析、逻辑推理等复杂思维过程的功能。

最后从阅卷来看。尽管现在对选择题的功能还存在着很大的争论，但我们不能不承认选择题阅卷速度快、误差小、效率高的特点，我们更不能不面对我国每年有近三百万考生这样的事实。为阅卷每年要动用大量的人力物力，而且阅卷事关重大，每一分都牵涉到考生的切身利益。为解决评卷工作量大、劳动强度高、误差控制要求严、时间紧迫等问题，只有增加选择题的比例，采用机器阅卷，减轻评卷教师工作

量，以提高阅卷的速度和质量。

对选择题本身的不足，我们已经采取措施弥补，采用一卷多卡、多卷（A、B卷）多卡等方式防止作弊。（如有必要，今后可考虑采用多项选择题，即有一个或多个正确选项的选择题。）我们也在研究选择题的功能和命题方式，充分利用选择题的特点和长处，发挥其区分选拔功能。

二、试卷分析

今年数学高考有三套试卷，即理工农医类、文史类和会考后高考（以下简称新高考）。在命题之初，首先分析总结了1991年数学考试的结果及试卷的使用情况，讨论了各省对1991年数学试卷的评价意见和阅卷情况，诚恳地有分析地对待所有的改进建议，确定了调整试卷结构，稳定试题难度，力求提高和完善的原则。

（一）试卷结构分析

	代数	立体几何	平面解析几何
《考试说明》	60%	20%	20%
理科	59.2%	18.3%	22.5%
文科	60.8%	18.4%	20.8%
新高考	61.4%	17.3%	21.3%

1. 试卷内容比例

三套试卷彻贯《考试说明》要求，各分科内容比例与《考试说明》基本相符。（见P4表）

2. 题型比例

1992年的试卷题型保持稳定，仍为四选一的选择题，填空题和解答题。根据《考试说明》规定对题型比例进行调查。在文、理科试卷中，考虑到填空题没有步骤分，考生容易失分，而近几年来填空题一直是5个，所以仍保持为5个。

	选择题	填空题	解答题
《考试说明》	45%	15%	40%
理 科	45% (18个)	12.5% (5个)	42.5% (5个)
文 科	45% (18个)	12.5% (5个)	42.5% (5个)
新 高 考	45.3% (17个)	16% (6个)	38.7% (5个)

3. 难度控制

1992年试卷保持了每种题型一个难度坡度，整卷由易到难又是一个坡度的难度编排，目的是充分发挥每种题型的区分选拔功能。因为填空题没有步骤分，对考生的要求相对较高，所以今年降低了填空题的难度。相反为发挥选择题的功能，选择题后面几个题目的难度略有上升。同时解答题最后一题的难度下降，在设计该题时，题目的原型为“讨论 x_0 的取值范围”，为降低难度改为证明 x_0 的取值范围。力图通过这项措施引导考生敢于攻克最后一题，改变解答题中“头两题送分，第末题放弃”的不足。对于一些被认为易于超出要求

的部分，如函数的方程，数列中的递推公式，异面直线的距离、不等式的证明，复数的模与共轭复数的运算性质等，试卷不仅恪守《考试说明》中的有关要求，而且在这些部分编排考查基本要求的试题，力图起到降温作用。

由于采取了以上各项控制难度的措施，加之调整试卷结构，1992年理科试卷略易，难度为0.66，文科试卷难度适当为0.56。

4. 信度和区分度

1992年理科试卷分半信度为0.8370， α 信度为0.7523，文科试卷分半信度为0.8838， α 信度为0.7902，信度较高。两卷中绝大多数题目区分度达到0.3合格水平，大多数题目达到0.4优秀水平，区分性能很好。

(二) 考查数学思想方法

考查数学思想方法是《数学科考试说明》中的一项基本要求，同时也是突出数学科考试的特点。在考查数学思想方法的过程中，我们注意到，首先思想方法应与具体的内容相结合，不能为考查而考查。因为数学的思想方法是从数学内容中抽象总结中来的，带着普遍应用意义。因此应与具体的内容相结合，在应用过程中理解其意义和作用，发挥其功率。其次思想和方法在抽象层次和应用意义上有一定的区别，作为具体方法，应有一定确切的内涵，是一种具体的、可操作的步骤和作法，因此应用中更直接更有效。而思想则更抽象更概括，作为一种指导思想，只是提示了思考的方向，并没有指导具体的操作步骤，但其应用范围更为广泛。最后在中学教学中，对每一种思想和方法都应结合具体内容教授，不要对某一方法人为拔高，形成过热的浪潮，冲击正常教

学。

近几年来，数学高考命题在考查思想方法的努力中积累了一些经验，并与中学教学达到了一定的共识，通过中学阶段的学习，下面几种主要的思想方法是应当学习和理解的。1992年高考注重了对这些内容的考查。

1. 数形结合的思想。其实质是将抽象的数学语言与直观的图形结合起来，使抽象思维和形象思维结合起来，通过对图形的处理，发挥直观对抽象的支柱作用，实现抽象概念与具体形象、表象的联系和转化，化难为易，化抽象为直观。三套试卷中很多题目都可应用这种思想，如理科第(15)题，在复平面内画出圆 $|z| = 2$ ，找出点 i ，即可直观地确定 $|z - i|$ 的最大值。新高考第(16)题可通过几个奇函数的图象，选出正确选项。理科第(3)、(7)、(9)、(10)、(12)、(17)等题，用数形结合的方法将更加容易理解判断。

2. 函数与方程的思想，函数描述了自然界中量的依存关系，是对问题本身的数量本质特征和制约关系的一种刻画。因此函数思想的实质是剔除问题的非数学特征，用联系和变化的观点提出数学对象，抽象其数量特征，建立函数关系。如数列的通项就是定义在自然数集上的函数，与这种思想相联系的就是方程的思想，在解决数学问题时，先设定一些未知数，然后把它们当成已知数，根据题设本身各量间的制约关系，列出方程，求得未知数。所设的未知数则沟通了变量之间的关系，将问题转化，方程与函数是相互联系的，解方程 $f(x) = 0$ 就是求函数 $y = f(x)$ 的零点，解不等式 $f(x) > 0$ (或 $f(x) < 0$)，就是求函数 $y = f(x)$ 的正(负)区间。在理科第(27)题中， S_n 就是 n 的二次函数，解答第二问就是在

d 一定时求 S_n 的极值点. 第(28)题是先设出 A 、 B 两点的坐标 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) , 作为已知数, 根据已知的 $|PA| = |PB|$ 列出方程, 先消去 y_1, y_2 , 最后并不求出 x_1, x_2 , 而是由

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2},$$

确定 x_0 的取值范围. 在第(17)题中, 题目本身引入了参数 t , 通过方程刻画二次函数的性质, 要求考生在变中把掌不变.

3. 逻辑划分(或分类讨论)的思想, 进行分类, 然后对划分的每一类分别进行求解, 综合后即得答案. 在划分中要求始终用一个标准, 这个标准应当是科学的、合理的, 要满足互斥、无漏、最简的要求. 有些问题分类后还可在每一类中再进行分类. 今年的文、理科试卷为避免这种思想的再度升温, 对这种思想没有着重考查, 而在新高考中有所体现. 在第(28)题中, 解出 $y = 0$ 或 $x^2 + y^2 = 10$ 两种情况, 要分别对其讨论, 而在 $y = 0$ 的条件下, 又要分 $x < 0$ 和 $x > 0$ 两种情况分别讨论.

4. 等价转化的思想. 把未知解法的问题转化到在已有知识范围内可解的问题是一种重要的数学思想方法. 转化包括等价转化和非等价转化. 等价转化要求转化过程中前因后果应是充分必要的, 这样的转化才能保证转化后所得的结果仍为原题的结果, 如理科第(7)题, 可用换底公式进行转化, 在转化时应注意的两个对数式都小于零的条件.

$$\begin{aligned} \log_a 2 < \log_b 2 < 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{\log_2 a} < \frac{1}{\log_2 b} < 0 \\ &\Leftrightarrow \log_2 b < \log_2 a < 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 0 < b < a < 1.$$

第(27)题可将求最大的 S_n 转化为判定 $a_n \geq 0$ 且 $a_{n+1} < 0$ ，第(25)题关键要实现这样的转化 $2\alpha = (\alpha + \beta) + (\alpha - \beta)$ ，用 α 和 β 构造出 2α 。在新高考第(26)题中，证明不等式

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$$

可转化为证明

$$\frac{1}{\sqrt{k}} < 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}),$$

而这个结论应用无理式的分母有理化和简单的放缩很容易证明。

三份试卷还注重考查了换元法、待定系数法、数学归纳法、反证法等多种方法。如在新高考试卷中，第(26)题是有关自然数 n 的命题，考生就可以利用数学归纳法加以证明，也可先证明一个辅助不等式，然后利用辅助不等式相加来得到结论。第(24)、(27)题则考查了待定系数法，换元法，第(28)题考查了分析和综合的方法。

(三) 稳定与创新

1992年的数学试卷继承了注重考查能力的传统，考查了《数学科考试说明》中所要求的能力。以新高考为例，为考查运算能力，除安排了一批选择题和填空题（如第(8)、(9)、(10)、(14)、(17)、(20)等题）外，还选用了第(27)题。这个题目求解思路是普通的，只要考生掌握抛物线的基础知识就可以入手。但要得出正确答案，则需要有较强的运算能力。为了考生的逻辑思维和空间想象能力，编拟了第(25)、(26)

题。第(25)题虽然题目不大，证明也很短，但牵涉到空间线面关系、面面关系等多方面的基础知识，在证明方法上既可以采用直接证法，又可以采用反证法，因此可以比较全面地考查推理论证能力和空间想象能力。第(28)题则需要考查分析题意、区别情况、综合应用复数、不等式的知识，进行必要的计算才能得出完整的结论。能力强的考生可应用不等式的性质和基本不等式 $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ ，直接判断在第一情况（即 $y=0$ 时）无解，而无须把问题化归为二次不等式求解。在文、理试卷中，针对1991年试卷计算略偏重的反映，力图在不影响运算能力检查的前提下，努力压缩繁琐和重复运算。以突出对数学能力的考查。

1992年试题在稳定的前提下，努力创新。我们认为试题新颖，不是指作答方式的新颖，而是指题目的背景比较新颖，设置的情况比较新颖。有些试题尽管解答过程比较短，也要求考生独立思考，创造性地分析和解决问题，一些试题力求在常见中求新意，对基础知识求深度。我们认为试题新颖而又不过难是提高试题质量的一个标志。

1. 估值求解，这是一种不等思想的应用。在自然界中，等是相对的、局部的；不等是绝对的、普遍的，更多的问题是有不等，因此要用不等估值的思想加以处理，特别是要用运动变化的观点研究数量关系和图形变换。如理科第(27)题，题设是一个满足一定条件但首项和公差均不确定的等差数列，要求考生根据所给条件估算出公差 d 的范围，再由 d 的范围确定项数 n 。第(25)题由 $\pi/2 < \beta < \alpha < 3\pi/4$ 的条件，判定 $\alpha - \beta$ 、 $\alpha + \beta$ 的范围。最后一题也要由 $-a \leq x_1 \leq a$ ， $-a \leq x_2 \leq a$ ，估计 x_0 的范围。此处讨论的用不等估值的思想

处理问题，不是强调不等式的证明，而是注重于估值思想的渗透和不等式的性质、解法的一般应用。

2. 解析几何大题改变了给出条件求曲线方程的要求，而是给出曲线方程，利用方程讨论曲线的性质。实际上利用方程研究曲线性质是解析几何的特色和目的，通过坐标系建立点与有序实数对的对应关系，进而建立曲线方程是解析几何的目的之一，是一种手段。建立方程的目的是为了有效地发挥代数工具的作用， AB 的垂直平分线与 x 轴相交于点 $P(x_0, 0)$ ，实际上是圆心在 P 点的圆与椭圆交于 x 轴同侧的两点，椭圆的弦就是圆的弦。进一步在椭圆长轴顶点处的曲率半径为 $a - ec$ ，即对圆心在 x 轴上的圆，当圆的半径 $r < a - ec$ 时，即圆心与原点距离 $|x_0| > a - (a - ec) = ec = \frac{a^2 - b^2}{a}$ 时，圆与椭圆交于以 x 轴为对称轴的两点，其弦平行于 y 轴，与题设矛盾。

所以只有当 $r > a - ec$ ，即 $|x_0| < \frac{a^2 - b^2}{a}$ 时，圆与椭圆交于

x 轴同侧点时，形成不与 y 轴平行的弦。当 A, B 两点重合时，即圆与椭圆相切时，椭圆的不与 x 轴重合的法线也有类似的性质。

3. 注意知识的综合运用，发挥三角函数的工具作用。在第(8)题中，将参数方程与三角函数有机结合起来，要求不但要理解直线倾斜角的概念，还要灵活应用三角公式进行恒等变换，第(14)题要求用三角函数值表示异面直线夹角的大小。根据各地的反映，我们还编拟了第(6)题考查考生函数图象的掌握情况。

(三) 几点思考

1. 难度控制。在选拔性考试中，全卷的难度控制历来是一个重要问题。我国的高考是以全体考生的整体水平为参照的常模参照性测验，经典测量理论中建立在平均得分率意义上的试题难度，本质上是从考生的角度来评价试题的难易。即考生的知识能力水平与试题要求的水平的适合的程度。所以就要求试题的水平与考生的水平基本吻合，区分不同层次的考生，使不同水平考生的成绩落入相应的分数段。过去的实践证明，如果试卷过难，要求过高，将影响到中学正常的教学秩序，影响到高考的选拔这一点已被深刻认识并努力避免。在这同时也要考虑到试卷过易也会带来消极的影响。

首先高考的首要任务是为高校选拔合格的新生，如果试卷过易将会影响到整卷的区分性，一些真正高水平的考生将混同于一般考生，高分的考生过分集中，影响到选拔，其次高考除了其预测功能、评定功能，还有其激励促进作用。如果试题过易就会造成一些考生满足现状、放松学习，不能充分地发挥其聪明才智，同时还会影响到一些高水平学校教学的积极性。因此在难度控制问题上，一定要采取科学严肃的态度，真正按科学规律办事，把难度控制在适合目前考生水平的程度，真正做到“两个有利”。

在控制难度时，还要考虑到我国教育发展极不平衡的现状 & 不同地区考生差别很大的事实。在考务管理中要考虑采取建立省常模、转换标准分等措施，解决选拔中的问题。在命题时应考虑在全卷各种题型中，都编拟一些考查基础知识的题目，使每个考生都得到一定的基本分，同时也在各种题型中都编拟一些有一定难度的题目，即考生在得到一定的基本