高中
数学奥林匹克
读本

（下册）

主编 马传渔
副主编 朱占奎
夏建新

南京大学出版社

高中数学奥林匹克读本

（下册）

主　编　马传渔

副主编　朱占奎　夏建新

南京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学奥林匹克读本.下册 / 马传渔主编.—南京:
南京大学出版社,2002.7

ISBN 7-305-01476-1

Ⅰ.高…　Ⅱ.马…　Ⅲ.数学课-高中-教学参考
资料　Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第054404号

书　　名　高中数学奥林匹克读本(下册)
主　　编　马传渔
出版发行　南京大学出版社
社　　址　南京市汉口路22号　邮编 210093
电　　话　025-3596923　025-3592317　传真 025-3686347
网　　址　http://press.nju.edu.cn
电子函件　nupress1@publicl.ptt.js.cn
经　　销　全国各地新华书店
印　　刷　武进第三印刷厂
开　　本　850×1168 1/32　印张 15.875　字数 416 千
版　　次　2002年7月第1版　2002年7月第1次印刷
印　　数　1～5000
ISBN 7-305-01476-1/O·78
定　　价　18.00元

本书编委会名单

主　编	马传渔		
副主编	朱占奎	夏建新	
编　委	董林伟	尤小平	左　坤
	张福俭	李洪涛	胡建军
	卫　刚	范建林	江卫兵
	黄德冲	丁华元	

前 言

自1981年中国数学学会普及工作委员会举办了全国高中数学联赛之后，每年一次10月份举办的全国高中数学联赛走上了规范化的道路。1985年中国数学学会决定在每年1月份举办全国中学生数学冬令营，即中国数学奥林匹克(C.M.O.)，这项我国中学生最高级别的数学竞赛云集了全国高中数学联赛80%左右的获奖者，进行两次模拟国际数学奥林匹克(I.M.O.)的考试，从中选拔20名优胜者组成国家集训队，经过培训与多次考试，最后选定6人组成中国代表队，参加一年一度的于7月份举行的I.M.O.竞赛的决逐。通常，称全国高中数学联赛、C.M.O与I.M.O.为我国的三大数学竞赛。

20多年来，我们组织、主持江苏省和全国数学竞赛，并参与了国际数学奥林匹克和全国各类数学竞赛的命题工作，一直希望凭自身的体会和经验编写一套高中数学奥林匹克的培训教材，在五彩缤纷的奥赛辅导书中，独具特色。既能使读者在全国高中数学联赛中获奖，又能在C.M.O.与I.M.O.竞赛中有获胜的可能，南京大学出版社给予我们机会。《高中数学奥林匹克读本》与读者见面了。

本书分上、下两册，每册18讲，每讲分若干节，每节设置知识要点、趋势预测、范例解读、方法指引、巩固训练、参考答案六个栏目。充实的内容、扎实的框架、丰富的思想、美妙的解法、新颖的理念、强化的训练会让广大读者认可与喜爱。

1. 本书与高一、高二年级新教材同步，系参照高中《数学教育大纲》编写而成，涵盖了高中数学的全部知识点，包罗了所有的解题技巧和方法，也可作为高考数学复习的参考用书。

2. 本书源于教材、高于教材，紧扣《高中数学竞赛大纲》，以教材内容为起点，逐步上升到全国高中数学联赛二试(或加试)的水平。书中收集了许多近几年来全国三大数学竞赛的题目，使读者了解、熟悉三大数学竞赛的题型和内容，让读者尽早进入三大数学竞赛的前沿阵地。

3. 本书特别重视可读性，力求内容由浅入深；力求方法由简单到综合；力求以趣例引入，在趣味中感悟解题思想；力求实用性强，逐步提高解决生产、生活中数学问题的能力；力求文笔通顺流畅；力求在知识点、方法技巧、能力创新三大方面为读者铺路搭桥。

4. 本书范例在知识点和解题方法上都具代表性，内容新颖、解法简捷，便于自学；巩固训练题紧扣各类竞赛内容，题量适中，6道范例，6道训练题相辅相成，遥相呼应；解题方法指引能起到画龙点睛归纳提高的作用；趋势预测不仅对本节内容和方法作赛点总结，而且对发展动态作出相应预测，随时做到与三大数学竞赛接轨。

5. 本书由奥林匹克专家、特级教师、学科带头人编写而成，现可作为一本课外读物，又可作为一本培训、辅导的读本，还可作为高中教师培训奥林匹克的教本。恳请同行与广大读者不吝指正。

南京大学　马传渔

2002 年 8 月

目　录

第1讲　不等式的证明

不等式是中学数学一个重要内容，它是数学奥林匹克竞赛的一个热点.不等式问题一直活跃在各类数学竞赛中，其原因是：(1)不等式是研究数学的主要工具；(2)不等式证明有利于逻辑推理能力的提高；(3)不等式自成一个系统.有完整的理论与丰富的内容；(4)不等关系在解题中有广泛的应用.它不仅能解决求函数的定义域，函数的单调性、方程根分布等问题.而且利用不等式可解决多项式、方程、几何、组合等类的题目.特别指出：当实际问题中含有不等关系时，通过建立不等式数学模型，控制变量，经过论证、分析，能顺利解决具体的问题.

第1节　不等式的性质及证明方法

对于不等式的性质，关键是要正确理解和运用，对不等式的每一条性质，要弄清条件和结论，注意条件的加强和放宽，条件与结论之间的关系.

证明不等式时，常用的证明方法有比较法、综合法、分析法、放缩法、数学归纳法和反证法等，要注意根据欲证不等式的特点，选择恰当的方法.在选用上述方法时，经常涉及到换元、配方、放缩、图像以及一元二次方程的判别式等方面的知识.

知识要点

不等式的性质

(1) $a>b \Leftrightarrow b<a$(对称性);

(2) $a>b, b>c \Rightarrow a>c$(传递性);

(3) $a>b \Rightarrow a+c>b+c(c\in\mathbf{R})$;

(4) $a>b, c>0 \Rightarrow ac>bc$;

(5) $a>b, c<0 \Rightarrow ac<bc$;

(6) $a>b, c>d \Rightarrow a+c>b+d$;

(7) $a>b, c<d \Rightarrow a+d>b+c$;

(8) $a>b>0, c>d>0 \Rightarrow ac>bd$;

(9) $a>b>0 \Rightarrow \dfrac{1}{b}>\dfrac{1}{a}$;

(10) $a>b>0, 0<c<d \Rightarrow \dfrac{a}{c}>\dfrac{b}{d}$;

(11) $a>b>0 \Rightarrow a^n>b^n$($n$ 是大于 1 的整数);

(12) $a>b> \Rightarrow \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$($n$ 是大于 1 的整数);

(13) $-|a| \leqslant a \leqslant |a|(a\in\mathbf{R})$;

(14) $|a|>r(r>0) \Leftrightarrow a>r$ 或 $a<-r \Leftrightarrow a^2>r^2$;

(15) $|a|<r(r>0) \Leftrightarrow -r<a<r \Leftrightarrow a^2<r^2$;

(16) $||a|-|b|| \leqslant |a\pm b| \leqslant |a|+|b|$.

趋势预测

证明所给的不等式,对于式中字母在允许范围内总能成立的一类问题,称为不等式的证明.

由于不等式的形式多样,内容丰富,因而不等式的证明方法灵活,技巧性强;另外函数的性质研究,或方程解的研究都可能转化为不等式的证明,因此,不等式的证明一直是数学竞赛命题的热点.它主要出现在综合题中,并且经常与函数结合在一起出题.

不等式的证明,涉及的知识面很广,技巧性强,且无固定规律可循,所以在具体证明时有一定难度,解决这一点应掌握常用方法和技巧.理解不等式证明中的数学思想,熟练地运用性质和基本不等式,同时又不能死套多种证法,重要的应仔细观察证题结构,分

析已知与结论的矛盾，掌握各种式子的灵活变形，促使问题的转化.

范例解读

题1　已知 $a,b,c,d\in\mathbf{R}$，求证：

$$ac+bd\leqslant\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}.$$

精析　观察不等式的结构特点，从不同的角度分析就得到不同的证法.

证明　方法Ⅰ（比较法）. 因为

$$\begin{aligned}&(a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ac+bd)^2\\&=a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2-a^2c^2-2abcd-b^2d^2\\&=b^2c^2-2abcd+a^2d^2\\&=(bc-ad)^2\geqslant 0.\end{aligned}$$

所以 $$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\geqslant(ac+bd)^2.$$

$$\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}\geqslant|ac+bd|\geqslant ac+bd.$$

则 $$ac+bd\leqslant\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}.$$

方法Ⅱ（分析法）

(1) 当 $ac+bd\leqslant 0$ 时，不等式显然成立.

(2) 当 $ac+bd>0$ 时，欲证原不等式成立，只需证

$(ac+bd)^2\leqslant(a^2+b^2)(c^2+d^2)$，

即证　$a^2c^2+2abcd+b^2d^2\leqslant a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2$，

即证 $2abcd\leqslant b^2c^2+a^2d^2$，

即证 $0\leqslant(bc-ad)^2$，

因为 $a,b,c,d\in\mathbf{R}$，所以上式恒成立.

故原不等式成立，综合(1)，(2)，知命题得证.

方法Ⅲ（综合法）.

$$\begin{aligned}(a^2+b^2)(c^2+d^2)&=a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2\\&=(a^2c^2+2abcd+b^2d^2)+(a^2d^2-2abcd+b^2c^2)\end{aligned}$$

$=(ac+bd)^2+(ad-bc)^2\geqslant(ac+bd)^2$.

所以 $\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}\geqslant|ac+bd|\geqslant ac+bd$.

方法Ⅳ(构造函数法).

欲证不等式的结构特点与一元二次方程的判别式 $\Delta=b^2-4ac\leqslant0$ 的结构特征很类似,由此不妨构造函数.

记 $$f(x)=(a^2+b^2)x^2+2(ac+bd)x+(c^2+d^2),$$

则 $$\begin{aligned}f(x)&=(a^2x^2+2acx+c^2)+(b^2x^2+2bdx+d^2)\\&=(ax+c)^2+(bx+d)^2.\end{aligned}$$

显然不论 x 取任何实数,函数 $f(x)$ 的值均为非负数,因此

(1) 当 $a^2+b^2\neq0$ 时,方程 $f(x)=0$ 的判别式 $\Delta\leqslant0$.

即 $$[2(ac+bd)]^2-4(a^2+b^2)(c^2+d^2)\leqslant0,$$
$$(ac+bd)^2\leqslant(a^2+b^2)(c^2+d^2).$$

故 $$ac+bd\leqslant|ac+bd|\leqslant\sqrt{(a^2+b^2)+(c^2+d^2)}.$$

(2) 当 $a^2+b^2=0$ 时,原不等式显然成立.

方法Ⅴ(构造解几法).

(1) 当 $a^2+b^2\neq0$ 时,欲证原不等式成立,只需证 $\dfrac{|ac+bd|}{\sqrt{a^2+b^2}}\leqslant\sqrt{c^2+d^2}$.

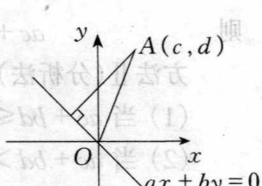

图 1.1

上式的结构特征与解析几何中点到直线的距离公式很类似,由此不妨设点 $A(c,d)$到过原点的直线 $l:ax+by=0$ 的距离为 h,则 $h=\dfrac{|ac+bd|}{\sqrt{a^2+b^2}}$,而$\sqrt{c^2+d^2}$可化为点 $A(c,d)$到原点的距离,故 $h\leqslant\sqrt{c^2+d^2}$,即

$$\frac{|ac+bd|}{\sqrt{a^2+b^2}}\leqslant\sqrt{c^2+d^2}.$$

故 $$ac+bd\leqslant\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}.$$

(2) 当 $a^2+b^2=0$ 时,原不等式显然成立.

方法Ⅵ(用余弦定理).

不妨设 $A(a,b)$, $B(c,d)$ 是如图 1.2 所示的直角坐标系中的点.

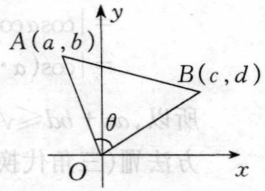

图 1.2

(1) 当 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=0$ 时,原不等式显然成立.

(2) 当 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)\neq 0$ 时,由余弦定理,得

$$|AB|^2=|OA|^2+|OB|^2-2|OA||OB|\cos\theta,$$

故
$$\cos\theta=\frac{|OA|^2+|OB|^2-|AB|^2}{2|OA||OB|}$$
$$=\frac{(a^2+b^2)+(c^2+d^2)-[(a-c)^2+(b-d)^2]}{2(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$$
$$=\frac{ac+bd}{\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}}.$$

由 $|\cos\theta|\leqslant 1$,知 $ac+bd\leqslant\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$.

方法Ⅶ(换元——三角代换法).

(1) 当 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)=0$ 时,原不等式显然成立.

(2) 当 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)\neq 0$ 时,欲证不等式成立,只需证 $\left|\frac{ac+bd}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}}\right|\leqslant 1$,即证

$$\left|\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\frac{c}{\sqrt{c^2+d^2}}+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\frac{d}{\sqrt{c^2+d^2}}\right|\leqslant 1.$$

注意到 $(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}})^2+(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}})^2=1$ 与 $(\frac{c}{\sqrt{c^2+d^2}})^2+(\frac{d}{\sqrt{c^2+d^2}})^2=1$ 和 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ 的结构特征很类同,不妨设 $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\alpha$, $\frac{c}{\sqrt{c^2+d^2}}=\cos\beta$,则

$$\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\alpha,\frac{d}{\sqrt{c^2+d^2}}=\sin\beta.$$

$$故\quad\left|\frac{ac}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}}+\frac{bd}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}}\right|$$
$$=|\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta|$$
$$=|\cos(\alpha\cdot\beta)|\leqslant 1.$$

所以，$ac+bd\leqslant\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$.

方法Ⅷ(三角代换).

设 $\begin{cases}a=r_1\cos\alpha,\\ b=r_1\sin\alpha\end{cases}$，$\begin{cases}c=r_2\cos\beta\\ d=r_2\sin\beta\end{cases}$ (r_1,r_2 均为正数)

则 $ac+bd=r_1r_2\cos\alpha\cos\beta+r_1r_2\sin\alpha\sin\beta$
$=r_1r_2\cos(\alpha-\beta)\leqslant r_1r_2$

又 $r_1r_2=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{c^2+d^2}=\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$

所以，$ac+bd\leqslant\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$.

注:希读者对本题八种解法予以领会与掌握.

题 2 设 $x_1\geqslant x_2\geqslant x_3\geqslant x_4\geqslant 2$，且 $x_2+x_3+x_4\geqslant x_1$，证明：$(x_1+x_2+x_3+x_4)^2\leqslant 4x_1x_2x_3x_4$.

精析 注意条件和结论的结构特征，从多个角度进行考察，可得多种不同证法.

证明 方法Ⅰ. 令 $a=x_2+x_3+x_4$，$b=x_2x_3x_4$，则原不等式为 $(x_1+a)^2\leqslant 4x_1b$，即

$$x_1^2+2(a-2b)x_1+a^2\leqslant 0. \qquad ①$$

令 $f(x)=x^2+2(a-2b)x+a^2$，则只需证明 $f(x_1)\leqslant 0$. 因为

$$\frac{a}{b}=\frac{x_2+x_3+x_4}{x_2x_3x_4}=\frac{1}{x_3x_4}+\frac{1}{x_2x_4}+\frac{1}{x_2x_3}$$
$$\leqslant\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}<1.$$

所以 $b>a$，从而 $\Delta=4(a-2b)^2-4a^2$
$=16b(b-a)>0.$

这样二次方程 $f(x)=0$ 的两个实根为

$$u=2b-a-2\sqrt{b(b-a)},$$
$$v=2b-a+2\sqrt{b(b-a)}.$$

所以只要能证明 $u\leqslant x_1\leqslant v$，则必有 $f(x_1)\leqslant 0$.

因由已知，$x_1\leqslant x_2+x_3+x_4=a$.

且 $x_1\geqslant x_2\geqslant x_3\geqslant x_4$，得 $3x_1\geqslant x_2+x_3+x_4=a$.

故 $x_1\in\left[\frac{a}{3},a\right]$. 若能证明 $\left[\frac{a}{3},a\right]\subseteq[u,v]$，即　$u\leqslant\frac{a}{3}$ 及 $a\leqslant v$，就必有 $u\leqslant x_1\leqslant v$，事实上，

$$v=2b-a+2\sqrt{b(b-a)}>2b-a>a,$$
$$u=2b-a-2\sqrt{b(b-a)}=(\sqrt{b}-\sqrt{b-a})^2$$
$$=\left(\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{b-a}}\right)^2=\frac{a}{\left(\sqrt{\frac{b}{a}}+\sqrt{\frac{b}{a}-1}\right)^2}$$
$$\leqslant\frac{a}{\left(\sqrt{\frac{4}{3}}+\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^2}=\frac{a}{3}.$$

所以 $x_1\in[u,v]$，从而必有 $f(x_1)\leqslant 0$，原不等式得证.

方法Ⅱ. 设 $x_1=k(x_2+x_3+x_4)$，依题意，有 $\frac{1}{3}\leqslant k\leqslant 1$，$x_3x_4\geqslant 4$，原不等式等价于

$$(1+k^2)(x_2+x_3+x_4)^2\leqslant 4kx_2x_3x_4(x_2+x_3+x_4).$$
$$\frac{(1+k)^2}{4k}(x_2+x_3+x_4)\leqslant x_2x_3x_4.$$

易证函数 $f(k)=k+\frac{1}{k}$　在 $\frac{1}{3}\leqslant k\leqslant 1$ 时是单调减函数，从而

$$\frac{(1+k)^2}{4k}(x_2+x_3+x_4)=\frac{k+\frac{1}{k}+2}{4}(x_2+x_3+x_4)$$
$$\leqslant\frac{3+\frac{1}{3}+2}{4}\cdot 3x_2=4x_2\leqslant x_2x_3x_4.$$

故原题得证.

方法Ⅲ.因为$(x_1+x_2+x_3+x_4)^2\leqslant(x_1+3x_2)^2$.

$$4x_1x_2x_3x_4\geqslant16x_1x_2.$$

所以只要证明$(x_1+3x_2)^2\leqslant16x_1x_2$即可.

因为 $M=16x_1x_2-(x_1+3x_2)^2=16x_1x_2-x_1{}^2-9x_2{}^2-6x_1x_2$

$$=10x_1x_2-x_1{}^2-9x_2{}^2=(x_2-x_1)(x_1-9x_2),$$

注意到 $x_2-x_1\leqslant0,x_1\leqslant x_2+x_3+x_4\leqslant3x_2<9x_2$,

即　　$x_1-9x_2<0$,故 $M\leqslant0$.所以

$$(x_1+x_2+x_3+x_4)^2\leqslant4x_1x_2x_3x_4.$$

注　第一种证法是通过构造二次函数,然后利用二次函数的性质来证明的,第二种证法则通过巧妙代换,转化为函数的单调性来证明;第三种证法则通过大胆放缩,求差比较得出证明.前二种证法构造巧,代换妙,解法独具匠心;而最后一种证法简洁明了,平中见奇,可谓功夫到家.

题3(2000·I.M.O.)　设a,b,c是正实数,且满足$abc=1$.证明:

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\leqslant1.$$

精析　由于欲证式子的左边不是关于a、b、c的齐次式,因此可设法通过代换后化为齐次式来证.

证明　方法Ⅰ.令$a=\frac{x}{y},b=\frac{y}{z},c=\frac{z}{x}$,其中$x,y,z$为正实数,则原不等式变为

$$(x-y+z)(y-z+x)(z-x+y)\leqslant xyz.$$

记$u=x-y+z,v=y-z+x,w=z-x+y$.

因为这三个数中的任意两个之和都是正数,所以,它们中间最多只有一个是负数.

如果恰有一个是负数,则$uvw\leqslant0<xyz$.不等式得证.

如果这三个数都大于0,则由算术平均——几何平均不等式,