概率论与数理统计

GAILULUN YU SHULITONGJI

河北工学院工程数学教研室　编

刘　文　主编

南开大学出版社

概率论与数理统计

河北工学院工程数学教研室 编

刘　　文 主编

南开大学出版社

概率论与数理统计

河北工学院工程数学教研室编
主　编　刘　文
责任编辑　裴志明

南开大学出版社出版
(天津八里台南开大学校内)
邮政编码：300071　电话：34.9318
新华书店天津发行所发行
河北工学院印刷厂印刷

1990年12月第1版　1990年12月第1次印刷
开本:850×1168　1/32　印张：14.5
字数:358千　印数:1—6000
ISBN7-310-00387-X/O·56　定价：5.50元

内容提要

本书是根据国家教委1987年批准印发的高等工业学校《数学课程教学基本要求》编写的概率论与数理统计课程教材．全书共分十一章，概率论部分包括概率论的基本概念、条件概率与独立性、随机变量、随机向量、随机变量的数字特征、极限定理；数理统计部分包括随机样本与抽样分布、参数估计、假设检验、回归分析、方差分析．本书论述严谨，条理清楚，深入浅出，简明易懂．各节都配有相当数量的各类例题与习题，书末附有习题答案．

本书可作普通高等工科院校试用教材．通过对内容作适当取舍，也可作各类成人高等院校及高等教育自学考试教材，并可供工程技术人员参考．

前　　言

本书是根据国家教委1987年批准印发的高等工业学校《数学课程教学基本要求》编写的普通高等工科院校概率论与数理统计课程教材，通过对内容作适当取舍，也可作各类成人高等院校及高等教育自学考试教材，并可供工程技术人员参考。

为使读者深入领会概率论与数理统计的基本概念，本书特别注意说明概念的现实背景和实际意义。在叙述上力求做到周密严谨，条理清楚，深入浅出，简明易懂。为了培养读者的解题能力，本书各节都配有相当数量的各类例题和习题，书末附有习题答案。

本书由刘文主编。概率论部分由刘文执笔，数理统计部分由刘国欣执笔，刘文定稿。

本书在编写过程中，得到有关兄弟院校的热情关怀和支持，得到本校高等数学教研室和数理研究室同志们的鼓励和帮助，谨此一并致谢。

编　者

1990年夏于天津

目　　次

第一章

概率论的基本概念

自然界中不仅存在着必然现象，而且更广泛地存在着随机现象．

在一定的条件下必定发生某一事件的现象称为**必然现象**，也称**确定性现象**．例如，在一个大气压下，水在100℃时沸腾；太阳每天从东方升起都是必然现象．

在一定的条件下，时而出现这种结果，时而出现那种结果，而且不能预先断言出现哪种结果的现象称为**随机现象**，也称**非确定性现象**．例如，某机床生产一种零件，每次生产出来的产品既可能是合格品，也可能是次品；射手向目标射击，可能射中也可能射不中；在作某种测量时，每次测得的结果常常并不一样．这些都是随机现象．

观察在一定条件下随机现象出现的结果，通常称做**随机试验**（简称**试验**），条件实现一次就叫做一次试验．在实践中我们注意到，虽然就个别随机试验来说，其结果具有不确定性，但在大量重复试验中，它的结果却呈现出规律性．例如，在掷一枚硬币时，我们无法预知是正面朝上还是反面朝上，但如果大量重复掷硬币这一试验，就会发现正面朝上的次数大致占总投掷次数的一半．又例如射击时，如果射击次数不多，靶上的弹着点似乎是随意分布的，没有什么规律，但在多次射击时，弹着点的分布就开始呈现规律性：它大致关于某个中心对称，靠近中心的弹着点密，远离中心的弹着点稀，且弹着点落入靶上任意一个区域的频率

是基本稳定的；射击的次数越多，这种规律性就越明显。这种在大量重复试验中随机现象所呈现的规律称为**统计规律**。

概率论与数理统计就是一门研究随机现象的统计规律的科学。随机现象的普遍存在，使得概率论与数理统计的概念与方法具有极为重要和深远的意义。自17世纪这门科学产生以来，它已经在工农业、生物、医学、体育、天文、地质、气象等众多领域和各种尖端技术中获得了广泛的应用。今天，概率论与数理统计已经成为人们认识世界和改造世界的一种有力工具。随着我国科学技术的发展，这门科学的重要性也日益显示出来。

§1　样本空间与随机事件

1. 集合

集合的概念在概率论中起着重要的作用，所以我们先来简单叙述这方面的基础知识。

集合是数学中最原始的概念之一，就像几何中的点、线、面等概念一样，很难用其它更简单的概念来给出它的精确定义，但可以通过一些具体的例子对它进行描述。

我们可以把一个**集合**（有时也简称**集**）理解为由一些不论什么样的对象所组成的总体。组成一个集合的对象叫做这个集合的**元素**。例如，某个城市的全体居民构成一个集合，某图书馆的全部藏书构成一个集合，全世界的所有国家构成一个集合，全体自然数构成一个集合。社会上的所有职业、某次试验的所有可能结果也都分别构成一个集合。

含有有限个元素的集合叫做**有限集**，含有无限个元素的集合叫**无限集**。

我们用大写字母表示集合，用小写字母表示元素，如果事物 a 是集 A 的一个元素，则记为

$$a \in A$$（读作"a 属于 A"）。

如果 a 不是 A 的元素，则记为

$$a \notin A$$（读作"a 不属于 A"）。

例如，设 N 是全体自然数的集合，则 $1 \in \mathbf{N}$，$\frac{1}{2} \notin \mathbf{N}$。

为了方便起见，我们引进空集的概念。不包含任何元素的集合称为**空集**，并用记号 $\varnothing$ 表示。

例如，设 A 是某个班的全体女生的集合，如果这个班没有女生，则 A 就是空集。

如果集合 A 与集合 B 由相同的元素组成，则称 A 与 B 相等，并记为

$$A = B.$$

例如，设 A 是方程 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 的根的集合，B 是由数 1 与 2 所组成的集合，则 $A = B$。

我们常用以下两种方法表示集合。

（1）**列举法**：写出集合的所有元素，或按一定的规律写出它的部分元素后加上省略号"…"，并用大括号把它们括起来。

例如，$\{1, 2, 3\}$ 表示由 1，2，3 所组成的集，这个集也可用 $\{2, 1, 3\}$，$\{3, 1, 2\}$ 等记号表示。

由 1 到100所有自然数的集可以表示为

$$\{1, 2, \cdots, 100\}$$

所有正奇数的集可以表示为：

$$\{1, 3, 5, \cdots\}.$$

（2）**描述法**：在花括号中先写出元素的符号，然后划一竖线，在竖线后写明元素所满足的条件（或所具有的性质）。

例如，设 N 是全体自然数的集合，R 是全体实数的集合，则

$$\{x|x\in \mathbf{N},\ 1\leqslant x<4\}=\{1,\ 2,\ 3\};$$

$$\{y|y=n^2+1,\ n\in \mathbf{N},\ 1\leqslant n\leqslant 3\}$$
$$=\{2,\ 5,\ 10\};$$

$$\{x|x\in \mathbf{R},\ 2\leqslant x\leqslant 4\}=[2,\ 4];$$

$$\{\omega|\omega^2-3\omega+2=0\}=\{1,\ 2\}.$$

在不引起混淆的情况下，为了简便，有些集合用描述法表示时，可以省去竖线及其左边的部分。例如，由所有的小于6的正整数组成的集合可以表示为{小于6的正整数}。

必须将以某个对象 A 为其仅有的一个元素的集合 $\{A\}$ 与 A 本身区别开来。例如，如果 $A=\{1,\ 2\}$，则 $\{A\}$ 是仅有一个元素 A 的集合，而 A 是有两个元素1与2的集合。仅有一个元素的集合称为**单元集**。

在很多问题中，我们所要考虑的常常是某个给定集合中的部分元素。我们称由问题中涉及的全部元素所组成的集合 Ω 为**全集合**。例如，在将某图书馆中的图书分类时，这个图书馆中的所有图书的集合就是我们所考虑的全集合。

定义1 如果集合 A 的每个元素都是集合 B 的元素，则称 A 为 B 的**子集合**，并记为

$$A\subset B \quad 或 \quad B\supset A$$

（读作"A 包含于 B"或"B 包含 A"）。例如，设 B 是某城市全体居民的集合，A 是该城市全体儿童的集合，则 $A\subset B$。

由子集合的定义有 $A\subset A$，即 A 是它自身的子集合，又显然，$A=B$ 的充要条件是 $A\subset B$ 且 $B\subset A$。如果 $A\subset B$ 但 $A\neq B$，则称 A 是 B 的**真子集合**。

定义2 由所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素（即 A，B

的公共元素）所组成的集合，称做 A，B 的**交集**（简称**交**），记作$A\cap B$ 或 AB（可读作"A 交 B"），即

$$A\cap B=\{x|x\in A \text{ 且 } x\in B\}.$$

如果A与B没有公共元素，即 $A\cap B=\varnothing$，则称A与B互不相交。

定义3　由所有属于集合A或属于集合B的元素所组成的集合，称做A，B的**并集**（简称**并**），记作$A\cup B$（可读作"A并B"），即

$$A\cup B=\{x|x\in A \text{ 或 } x\in B\}.$$

例1　设$A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{3,4,5\}$，$C=\{1,2\}$，则

$$A\cap B=\{3,4\},$$
$$A\cup B=\{1,2,3,4,5\},$$
$$A\cap C=C,\ A\cup C=A.$$

我们不难把两个集合的交集和并集的定义推广到n个集合$A_k(k=1,2,\cdots,n)$以至无穷多个集合$A_k(k=1,2,\cdots)$的情况：

$$A_1A_2\cdots A_n=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n=\bigcap_{k=1}^{n}A_k$$
$$=\{x|x \text{ 属于一切 } A_k,\ k=1,2,\cdots,n\};$$

$$A_1A_2\cdots A_n\cdots=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\cap\cdots=\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k$$
$$=\{x|x\text{属于一切 } A_k,\ k=1,2,\cdots\};$$

$$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\bigcup_{k=1}^{n}A_k$$
$$=\{x|x \text{ 至少属于某一个 } A_k,\ k=1,2,\cdots,n\};$$

$$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k$$
$$=\{x|x\text{至少属于某一个 } A_k,\ k=1,2,\cdots\}.$$

例 2　设$A_n=[0,1+\frac{1}{n})$，$B_n=[n,n+1)$，$n=1$，2，…则

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=[0,1],$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n=[1,\infty).$$

定义 4　由集合A中所有不属于集合B的元素所组成的集合，叫做A与B的**差集**（简称**差**），记作$A-B$，即

$$A-B=\{x|x\in A,\ 且x\notin B\}.$$

定义 5　设Ω是全集，$A\subset\Omega$，差集$\Omega-A$称做集合A在Ω中的**补集**（简称**补**），记作$\overline{A}$（可读作"A补"），即

$$\overline{A}=\Omega-A=\{x|x\in\Omega,\ 且x\notin A\}.$$

例 3　设$\Omega=\{1,2,3,4,5\}$，$A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{3,4,5\}$，则

$$\overline{A}=\{5\},\quad \overline{B}=\{1,2\},\quad A-B=\{1,2\}.$$

2．随机试验与样本空间

我们在引言中已初步介绍了随机试验的概念，现在进一步明确它的含意。

在概率论中我们将具有以下三个特性的试验称为**随机试验**。

1）试验可以在相同的条件下重复进行；

2）每次试验中可以出现不同的结果，而究竟出现哪个结果，试验前不能预先断言；

3）试验中的一切可能结果是已知的，在每次试验中有且仅有其中一个结果出现。

定义 6 随机试验的每个可能结果称为一个**样本点**. 全体样本点的集合称为样本空间

在讨论一个随机试验时，首先要明确它的样本空间，亦即确定试验的可能结果使它满足上述第三个条件.

例 4 如果随机试验是观察掷一枚硬币后正面出现的情况，那么试验的结果(样本点)有两个：出现正面或反面. 用ω 表示出现正面，$\overline{\omega}$ 表示出现反面，于是这个试验的样本空间为

$$\Omega=\{\omega, \overline{\omega}\}.$$

例 5 如果随机试验是观察掷一颗骰子所得点数，则样本空间为

$$\Omega=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

其中样本点 $i(1\leqslant i\leqslant 6)$ 表示掷出 i 点.

例 6 将一枚硬币掷两次，观察正、反面出现的情况. 这时掷两次硬币算作是一次试验（注意不是两次试验），其样本空间如下：

$$\Omega=\{\omega\omega, \omega\overline{\omega}, \overline{\omega}\omega, \overline{\omega}\,\overline{\omega}\},$$

其中 $\omega\omega$ 表示两次都出现正面，$\omega\overline{\omega}$ 表示第一次出现正面而第二次出现反面，$\overline{\omega}\omega$ 表示第一次出现反面而第二次出现正面，$\overline{\omega}\,\overline{\omega}$ 表示两次都出现反面.

例 7 如果随机试验是测量某个灯泡的寿命（单位：小时），则样本空间由全体非负实数组成，即

$$\Omega=\{x|\ 0\leqslant x<+\infty\}.$$

3. 随机事件

粗略地说，随机试验的结果中所发生的现象叫随机事件. 引入了样本空间后，这个概念可用集合来定义.

定义 7 样本空间Ω 的任一子集A称为**随机事件**（简称事

件）。设某次试验出现结果ω（样本点），若$\omega \in A$，则称在这次试验中**事件A发生**；若$\omega \notin A$，则称在这次试验中**事件A没有发生**。

这样，Ω和$\varnothing$都是事件，前者在每次试验中都一定出现，因此称为**必然事件**；后者在每次试验中都不会出现，因此称为**不可能事件**。仅包含一个样本点的事件称为**基本事件**。

下面列举一些事件的例子

在例4中，若$A_1=\{\omega\}$，则A_1就是掷硬币出现正面这一事件。类似地，$A_2=\{\bar{\omega}\}$表示掷出反面这一事件。这两个事件都是基本事件。

在例5中，若$A=\{1,\ 3,\ 5\}$，则A表示骰子掷出奇数点这一事件。

在例6中，若$A=\{\omega\omega, \bar{\omega}\omega\}$，则$A$表示第二枚硬币出现正面这一事件。

在例7中，设$A=\{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 8\}$，则$A$表示灯泡的寿命不超过8小时这一事件。

例8　将a，b两球随机地放入三个盒中，下面列出了全部样本点：

1）	ab		
2）		ab	
3）			ab
4）	a	b	
5）	a		b
6）	b	a	
7）	b		a
8）		a	b
9）		b	a

我们用ω_k（$1\leqslant k\leqslant 9$）表示上面的第k个样本点。设A，B，C，D，E分别表示下列事件：

A：至少有一个盒放入两个球。

B：第一个盒是不空的。

C：第二个盒是空的。

D：每个盒中恰有一个球。

E：至少有一个盒是空的。

则

$A=\{\omega_1，\omega_2，\omega_3\}$，

$B=\{\omega_1，\omega_4，\omega_5，\omega_6，\omega_7\}$，

$C=\{\omega_1，\omega_3，\omega_5，\omega_7\}$，

$D=\varnothing$，

$E=\Omega$。

例 9 在例 8 中讨论两个球在三个有序盒中分布时，我们假定这两个球是有区别的（或可辨的），例如，一个为白球，另一个为黑球．现在我们不考虑这两个球的区别，则例 8 中的第 4 与第 6 个样本点不再区别，它们都表示同一样本点。同样，第 5 与第 8 个样本点不再区别，第 7 与第 9 个样本点不再区别．于是所有样本点变为：

1）

00		

4）

0	0	

2）

	00	

5）

0		0

3）

		00

6）

	0	0

我们用ω_k表示上面的第k个样本点。这时，下列事件

A：至少有一个盒中放入两个球，

B：第一个盒是不空的，