

误差处理 与可靠性理论

第二版

Error Processing and
Reliability Theory

李德仁 袁修孝 著



WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

误差处理 与可靠性理论

第二版

Error Processing and
Reliability Theory

李德仁 袁修孝 著



WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

误差处理与可靠性理论/李德仁,袁修孝著. —2版. —武汉:武汉大学出版社,2012.9

ISBN 978-7-307-10189-0

I. 误… II. ①李… ②袁… III. ①摄影误差—高等学校—教材
②测量—可靠性理论—高等学校—教材 IV. P207

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 210909 号

责任编辑:任翔 责任校对:黄添生 版式设计:马佳

出版发行:武汉大学出版社 (430072 武昌 珞珈山)

(电子邮件: cbs22@whu.edu.cn 网址: www.wdp.com.cn)

印刷:武汉中远印务有限公司

开本: 720 × 1000 1/16 印张: 26.25 字数: 527 千字 插页: 5

版次: 2002 年 7 月第 1 版 2012 年 9 月第 2 版

2013 年 1 月第 2 版第 2 次印刷

ISBN 978-7-307-10189-0/P · 205 定价: 68.00 元

版权所有, 不得翻印; 凡购我社的图书, 如有质量问题, 请与当地图书销售部门联系调换。



李德仁 院士

李德仁，祖籍江苏丹徒，1939年出生于江苏泰县。摄影测量与遥感学家，武汉大学一级教授、博士生导师。

1963年毕业于武汉测绘学院，1981年获该校硕士学位，1985年获联邦德国斯图加特大学博士学位，1991年当选中国科学院院士，1994年当选中国工程院院士，1995年当选国际欧亚科学院院士，2008年获苏黎世联邦理工学院名誉博士，2012年获国际摄影测量与遥感学会名誉会员称号。

历任第九届全国政协委员，武汉测绘科技大学校长，武汉大学学术委员会主任，测绘遥感信息工程国家重点实验室主任、学术委员会主任，湖北省科协副主席，国务院学位委员会学科评议组成员，国家973专家顾问组成员，中国科学院地学部常委、副主任，中国博士后管委会专家委员会成员，国家遥感中心专家组成员，中国图形图象学会副理事长，中国GIS协会顾问，中国测绘学会理事长，中国地理学会环境遥感分会理事长，亚洲GIS协会创会会长，国际摄影测量与遥感学会第Ⅲ、Ⅵ专业委员会主席，清华大学、北京大学、浙江大学、瑞士苏黎世联邦理工学院、澳大利亚昆士兰理工大学、加拿大卡尔加里大学等50多所大学的顾问或名誉教授。

20世纪80年代，李德仁教授主要从事测量误差理论与处理方法研究。1982年，他首创从验后方差估计导出粗差定位的选权迭代法，被国际测量学界称为“李德仁方法”。1985年，他提出包括误差可发现性和可区分性在内的基于两个多维备选假设的扩展的可靠性理论，科学地“解决了测量学上一个百年来的问题”。该成果获1988年联邦德国摄影测量与遥感学会最佳论文奖——“汉莎航空测量奖”。

20世纪90年代，李德仁教授主要从事以遥感(RS)、全球卫星定位系统(GPS)和地理信息系统(GIS)为代表的空间信息科学技术的科研和教学工作，并致力于高新技术的产业化发展。他在高精度摄影测量定位理论与方法、GPS空中三角测量、SPOT卫星像片解析处理、数学形态学及其在测量数据库中的应用、面向对象的GIS理论与技术、影像理解及像片自动解译、多媒体通信等方面都有独到建树，其成果直接推动了技术进步，并已向产业化方向发展。领导研制了吉奥之星GIS系列产品和立得三S移动测量系统等高科技产品。

2000年以来，李德仁教授提出广义空间信息网络理论，倡导面向服务的地球空间信息理论，推进数字城市、数字中国、数字地球和智慧地球的建设。

迄今，李德仁教授已发表论文720余篇，出版专著11部、译著1部，主编著作7部；培养博士后10多名、硕士研究生80多名、博士研究生135名。其成果有30余项分别获国家科技进步奖二等奖及省部级科技奖、全国优秀教材奖、全国优秀科技图书奖、全国优秀教学成果奖，1999年获何梁何利基金科学与技术进步奖，2003年获湖北省科学技术突出贡献奖。



袁修孝 教授

袁修孝，博士，1963年出生于湖北阳新县。享受国务院政府特殊津贴专家，湖北名师，武汉大学二级教授、博士生导师。

1985年毕业于武汉测绘学院并留校任教，1993年破格晋升为副教授，1996年赴日本国立京都大学学习，1997年破格晋升为摄影测量教授并被评为湖北省有突出贡献中青年专家，1999年获武汉测绘科技大学摄影测量与遥感博士学位，同年赴香港理工大学合作研究，2004年特聘为武汉大学首批珞珈特聘教授。现为教育部新世纪优秀人才支持计划人选、湖北省新世纪高层次人才工程第一层次人选、武汉市第十一、十二届政协委员、中国测绘学会摄影测量与遥感专业委员会委员、测绘遥感信息工程国家重点实验室兼职教授，《武汉大学学报（信息科学版）》编委，《测绘科学技术学报》通信编委，国内外20余种学术期刊特邀审稿人。

20世纪80年代以来，袁修孝教授一直从事缺少地面控制点的高精度摄影测量定位理论与方法研究。主持国家973计划、国家863计划、国家自然科学基金等重大课题20余项，取得了丰硕的研究成果。特别是在GPS辅助空中三角测量、POS航空摄影测量、轻型飞机低空摄影测量、高分辨率卫星遥感对地目标定位理论与质量控制体系等方面有独到建树，研制成功了具有当代国际水准的GPS/IMU辅助光束法区域网平差系统WuCAPS。以此为基础，1996年完成的论文《GPS-supported Determination of Interior Orientation Elements of Aerial Camera》获国际摄影测量与遥感学会（ISPRS）青年作者最佳论文奖，1999年完成的论文《GPS辅助空中三角测量及其质量控制》入选2001年度全国百篇优秀博士学位论文。目前，其研究成果被广泛应用于国家基础测绘及国产卫星地面处理业务化运行系统中，使航空航天摄影测量对地目标定位可大量减少甚至是不用地面控制点，产生了巨大的社会和经济效益。

袁修孝教授已发表论文110余篇，出版专著3部、合著8篇章，参与起草和修订国家测绘行业标准2种，获国家发明专利2项；培养硕士研究生60多名、博士研究生19名。研究成果荣获国家科技进步奖二等奖（2项）、国家级教学成果奖二等奖、全国优秀科技图书奖三等奖、湖北省高等学校教学成果奖一等奖（2项）、教育部科技进步奖一等奖、测绘科技进步奖一、二等奖、霍英东教育基金会高等院校青年教师奖二等奖、中国大学出版社协会优秀教材一等奖、测绘事业创业奖。主持建设的“摄影测量学”课程入选2005年国家精品课程。曾被授予国家测绘局跨世纪学术与技术带头人、首届湖北省优秀科技工作者、武汉大学教学名师、武汉大学杰出青年、武汉测绘科技大学青年科技十佳等荣誉称号。

内 容 提 要

本书系统地讲述了以数理统计理论为基础的测量平差系统的误差理论、假设检验和可靠性理论,介绍了当代摄影测量平差在理论和技术发展中的新成就和主要动向。如 GPS/IMU 辅助空中三角测量,稳健计算机视觉,利用人工智能方法进行粗差的启发式搜索等。书中重点讨论了偶然误差的减少、系统误差的补偿、粗差的检测以及不同类型误差的区分等问题,既有较完整的理论阐述,又有较具体的应用实例。为了便于读者深入研究,每章后均列出主要参考文献。为了便于更好地理解本书,在附录中补充了必要的矩阵代数和数理统计知识。

本书可用作高等院校测绘类专业研究生教学用书,亦可供摄影测量、大地测量、工程测量、遥感科学与技术 and 地理国情监测领域的科技人员与高等院校相关专业师生学习参考。

前 言

众所周知,传统的测量平差是利用最小二乘平差方法对观测值的偶然误差进行合理配赋,对观测值的系统误差进行预改正,对观测值的粗差则采用一定的观测原则和人工挑错的办法予以控制。这一方面是由于人工观测值的数量有限且粗差难以利用简单的几何条件加以检测,另一方面是由于受当时计算工具的限制,人们不得不采用近似的平差模型和小范围的分段平差办法来解决测量数据处理问题。

到了 20 世纪,随着航天技术、通信技术和高分辨率对地观测技术的发展,人类观测地球的手段在不断进步。由于电子计算机的问世,测量观测值不仅可以通过计算机控制的在线量测系统直接输入计算机,而且可以利用数字影像相关技术实现影像的自动识别和量测,甚至是可以通过全球卫星定位系统进行实时定位与导航,或者可通过 POS 定位测姿系统高精度测定运动传感器的位置和姿态,从而使我们可以获得海量的对地观测数据。对于这些数据的处理,传统的测量平差手段自然是够用了。所幸的是,随着计算技术的发展,特别是近年来计算机运算速度的快速提高、存储容量的无限扩大,为我们提供了强有力的计算平台。测量平差的数学模型也可以变得更加严密,不仅可以整体处理多源、多时相的对地观测数据,而且还可以在平差模型中同时顾及系统误差的补偿和粗差的检测。本书正是作者在摄影测量领域中开展测量误差处理和可靠性理论研究所取得成果的全面总结,同时也汇集了国内外众多学者在该领域的最新研究成果。

全书共分 8 章,第 1 章概述了测量平差中的误差处理,第 2 章介绍了解析摄影测量中平差模型的当代发展,第 3 章和第 6 章详细叙述了测量平差中的可靠性和可区分性理论,第 4 章介绍了解析摄影测量平差中系统误差的补偿方法,第 5 章介绍了粗差检测方法在当代摄影测量平差系统和计算机视觉中的应用,第 7 章和第 8 章给出了可区分性理论在基本摄影测量平差问题中的应用示范。

本书的理论是针对一般测量平差问题的,尽管主要应用示例为摄影测量平差问题,但它对大地测量、工程测量、计算机视觉以及地理信息系统(GIS)中空间和属性数据的不确定性分析同样适用。因此,本书既可作为高等院校测绘工程、遥感科学与技术等专业研究生用书,亦可供摄影测量、大地测量、工程测量和地理国情监测等领域的科研和工程技术人员学习参考。

本书以 2002 年出版的《误差处理与可靠性理论》一书为蓝本修订而成。此次修

订,除对书中的文字和图表进行全面订正以外,删除了一些过时或不符合现状的提法,调整了原 4.3 节与 4.4 节的次序,吸收了近年来学科的最新研究成果,改写了“2.3 GPS/IMU 辅助空中三角测量”和新增了“5.9 卫星遥感影像自动精纠正中的粗差检测”等内容。

在本书修订过程中,作者参考了众多国内外的相关文献,并在每章末都列出了主要的参考资料,在此谨向本书取材引用过的文献作者致以最诚挚的谢意!

本书的出版得到国家 973 计划项目“运动平台影像的高精度几何标定与目标定位”(项目批准号:2012CB719902)和国家自然科学基金创新研究群体项目“多传感器对地观测网络数据精确处理与空间信息智能服务”(项目批准号:41021061)的资助,在此一并表示衷心的感谢!

因作者水平所限,书中难免还有错漏和不当之处,敬请读者不吝赐教!

著 者

2012 年 11 月于武昌珞珈山

目 录

第 1 章 测量平差中的误差处理概述	1
1.1 模型误差	1
1.1.1 数学模型	1
1.1.2 模型误差	1
1.1.3 观测误差	3
1.2 模型误差对平差结果的影响	5
1.2.1 函数模型中未知参数太少对平差结果的影响	5
1.2.2 函数模型中未知参数过多对平差结果的影响	7
1.2.3 权矩阵误差对平差结果的影响	8
1.3 不同观测误差处理的发展阶段	9
参考文献	11
第 2 章 基于偶然误差的解析空中三角测量的若干扩展	12
2.1 概述	12
2.1.1 电子计算机与摄影测量	12
2.1.2 空中三角测量的发展历程	13
2.1.3 解析空中三角测量的现状与发展趋势	14
2.2 摄影测量与非摄影测量观测值的联合平差	16
2.2.1 概述	16
2.2.2 较有代表性的联合平差系统	17
2.2.3 联合平差中各类观测值误差方程式的建立	19
2.2.4 联合平差中法方程式的构建	29
2.2.5 联合平差的算法改进	32
2.2.6 CPNS 导航数据在空中三角测量中的应用	37
2.2.7 用近景摄影测量方法测定大型冷却塔的形狀	41
2.3 GPS/IMU 辅助空中三角测量	44
2.3.1 概述	44

2.3.2	GPS/IMU 辅助空中三角测量的基本原理	45
2.3.3	GPS/IMU 辅助光束法平差程序 WuCAPS 系统	54
2.3.4	GPS/IMU 辅助光束法区域网平差的效果	57
2.3.5	方法的评价	60
2.4	方差-协方差分量估计	63
2.4.1	概述	63
2.4.2	方差分量估计的几种方法	64
2.4.3	Helmert 型方差-协方差分量估计	77
2.4.4	方差分量估计中的精度评定	79
2.4.5	验后方差估计的应用	83
	参考文献	90
第3章	测量平差系统的可靠性理论	92
3.1	可靠性研究概述	92
3.1.1	可靠性研究的必要性	92
3.1.2	可靠性研究的发展概况	95
3.2	观测误差对观测值改正数的影响	96
3.2.1	概述	96
3.2.2	观测误差与改正数的关系	97
3.2.3	$Q_{vv}P$ 矩阵的特性	100
3.2.4	数据探测法的简单推导	102
3.2.5	粗差的估计	102
3.2.6	多余观测分量的计算	103
3.2.7	多余观测分量的值域	105
3.2.8	多余观测分量示例	107
3.3	测量平差结果可靠性的数理统计基础	110
3.3.1	概述	110
3.3.2	评价观测值的基本假设	110
3.3.3	统计假设检验	113
3.3.4	内部可靠性的概念	118
3.4	单个备选假设下的可靠性理论	120
3.4.1	单个备选假设下的假设检验	120
3.4.2	单个备选假设下的内部可靠性理论	125
3.4.3	单个备选假设下的外部可靠性理论	126
3.4.4	测量平差系统内部和外部可靠性研究示例	128

3.5 基本摄影测量平差问题的内部可靠性	133
3.5.1 概述	133
3.5.2 直线拟合的内部可靠性	134
3.5.3 单像空间后方交会的内部可靠性	135
3.5.4 立体像对相对定向的内部可靠性	135
3.5.5 单模型高程置平的内部可靠性	140
3.5.6 二维线性正形变换的内部可靠性	141
3.5.7 三维空间相似变换的内部可靠性	143
3.6 摄影测量区域网平差的内部可靠性	147
3.6.1 概述	147
3.6.2 可靠性数值的模拟计算	149
3.6.3 加密点的内部可靠性	151
3.6.4 控制点的内部可靠性	155
3.7 摄影测量区域网平差的外部可靠性	160
3.7.1 概述	160
3.7.2 地面坐标未知数的外部可靠性	160
3.7.3 区域网平差外部可靠性的基本特点	162
3.7.4 外部可靠性与区域网设计参数的关系	165
3.7.5 摄影测量区域网的优化设计	169
3.7.6 Baarda 的测量平差系统的质量控制方法	170
参考文献	172
 第4章 解析摄影测量平差中系统误差的补偿	174
4.1 摄影测量数据中的系统误差源	174
4.2 补偿系统误差的方法分类	178
4.3 带附加参数的自检校法	179
4.3.1 基本解算过程	180
4.3.2 系统误差模型的选择	185
4.3.3 自检校平差的效果与信噪比	195
4.3.4 自检校平差中各类观测值权的确定	198
4.3.5 附加参数的统计检验	198
4.3.6 自检校平差中克服过度参数化的方法	206
4.3.7 方法的评价	211
4.4 试验场检校法	211
4.4.1 试验场的建立与试验场摄影	211

4.4.2	试验场检校结果	211
4.4.3	与带附加参数自检校法的比较试验	213
4.4.4	方法的评价	214
4.5	验后补偿法	214
4.5.1	验后补偿法的步骤	214
4.5.2	验后补偿法的效果	216
4.5.3	不同信噪比下验后补偿法的比较试验	217
4.5.4	方法的评价	219
4.6	改善随机模型以顾及像片坐标误差的相关特性	219
4.6.1	系统误差的相关特性	219
4.6.2	同时改善平差函数模型和随机模型的自检校区域网平差	222
	参考文献	227
第5章	粗差检测和定位	229
5.1	粗差定位及其方法分类	229
5.1.1	概述	229
5.1.2	方法分类	229
5.2	粗差归入函数模型的粗差检测方法	231
5.2.1	单个粗差的检测方法	231
5.2.2	多个粗差的检测方法	233
5.3	粗差归入随机模型的粗差定位方法	234
5.3.1	选择权迭代法的基本思路	234
5.3.2	Robust(稳健)估计法简介	236
5.3.3	基于验后方差估计的选择权迭代法	243
5.3.4	选择权迭代法定位粗差的比较试验	244
5.4	光束法平差程序 BLUH 中的粗差检测方法	249
5.4.1	程序简介	249
5.4.2	粗差检测方法	251
5.5	独立模型法平差程序 PAT-M43 中的粗差检测方法	255
5.5.1	程序简介	255
5.5.2	粗差定位策略	257
5.6	线性规划在粗差检测中的应用	260
5.6.1	概述	260
5.6.2	线性规划求最佳可行解的思想	260
5.6.3	单纯形法求最佳可行解的示例	262

5.6.4	解析摄影测量领域中的应用	266
5.7	影像匹配中的粗差检测	268
5.7.1	最小二乘影像匹配中的参数检验	268
5.7.2	基于特征的数字影像误匹配剔除	271
5.7.3	相对定向中剔除误匹配点的选择权迭代法	277
5.8	利用人工智能方法进行粗差的启发式搜索	277
5.8.1	问题的提出	277
5.8.2	粗差的启发式搜索和启发信息	279
5.8.3	启发式搜索粗差的程序设计	280
5.8.4	试验及其结果分析	281
5.8.5	方法的评价	284
5.9	卫星遥感影像自动精纠正中的粗差检测	284
5.9.1	概述	284
5.9.2	误匹配控制点检测	285
5.9.3	方法的评价	287
	参考文献	287
第 6 章	两种模型误差的可区分性及其可靠性理论	290
6.1	问题的提出	290
6.2	含两个多维备选假设时的假设检验	293
6.2.1	两个多维备选假设的提出与统计检验	293
6.2.2	两个备选假设时的统计抉择	294
6.3	可区分性度量的相关系数	296
6.3.1	二次型检验量 T_1 与 T_2 的相关系数 ρ_{T_1, T_2}	296
6.3.2	两个一维检验量 w_1 与 w_2 的相关系数 ρ_{w_1, w_2}	296
6.3.3	相关系数 ρ_{T_1, T_2} 与 ρ_{w_1, w_2} 的关系	297
6.3.4	两个多维备选假设的最大相关系数	297
6.4	两个备选假设检验的几何解释	300
6.4.1	假设检验的几何解释	300
6.4.2	三类统计错误的概率	302
6.5	可区分性放大倍数	304
6.5.1	相关系数的上界值 $\nabla_0 \rho_\gamma$ 和 $\nabla_0 \rho_\beta$	305
6.5.2	非中心化参数的下界值 $\delta_{0,\gamma}$ 和 $\delta_{0,\beta}$	306
6.5.3	非中心化参数公共下界值 $\delta_{0,\rho}$ 和可区分性放大倍数	308
6.6	两个备选假设下的可靠性理论	312

6.6.1 两个备选假设下的内部可靠性	312
6.6.2 两个备选假设下的外部可靠性	313
6.7 应用可能性	314
参考文献	315
第7章 粗差与系统误差的可区分性	316
7.1 平面相似变换中粗差与系统误差的可区分性	316
7.1.1 4点平面相似变换	316
7.1.2 4点组平面相似变换	322
7.2 单航带平差中粗差与系统误差的可区分性	324
7.2.1 5个控制点的单航带平差	325
7.2.2 6个控制点的单航带平差	328
7.2.3 10个控制点的单航带平差	332
7.2.4 6个双控制点的单航带平差	336
7.2.5 粗差和系统误差的可区分性与控制点数的关系	339
7.3 光束法区域网平差中控制点粗差与像片系统误差的可区分性	340
7.3.1 概述	341
7.3.2 控制点粗差与像片系统误差的充分可区分性	347
7.3.3 控制点粗差和系统误差的可区分性与区域几何条件的关系	351
7.3.4 控制点坐标粗差与像片系统误差的可区分性与区域大小的关系	355
7.3.5 像点坐标粗差与像片系统误差的可区分性	357
参考文献	358
第8章 粗差的可区分性	359
8.1 研究粗差可定位性的方法	359
8.2 基本摄影测量平差问题中粗差的可定位性	360
8.2.1 立体像对的相对定向	360
8.2.2 平面相似变换	370
8.3 光束法区域网平差中控制点粗差的可定位性	372
8.3.1 概述	372
8.3.2 多个控制点坐标粗差的可发现性	373
8.3.3 控制点坐标粗差的可定位性	376
参考文献	380

附录 A 矩阵代数基础知识	381
A.1 矩阵的秩	381
A.2 矩阵的迹	381
A.3 特征值和特征向量	382
A.4 广义特征值和特征向量	384
A.5 矩阵的分解	385
A.5.1 矩阵的秩分解	385
A.5.2 矩阵的三角分解	385
A.5.3 矩阵的谱分解	385
A.5.4 任意矩阵的奇异值分解	386
A.6 幂等矩阵	388
A.7 矩阵恒等式	389
A.8 矩阵的范数和状态	390
A.8.1 向量范数和矩阵范数	390
A.8.2 矩阵的状态	391
附录 B 向量和矩阵的微分运算	394
B.1 矩阵对变量的微分	394
B.2 函数对向量的微分	394
B.3 矩阵的迹对矩阵的偏导数	395
B.4 特殊函数的微分	396
附录 C 非中心化的 χ^2 分布和 F 分布	397
C.1 χ^2 分布	397
C.2 非中心化 χ^2 分布	397
C.3 F 分布	398
C.4 非中心化 F 分布	398
附录 D 二次型及有关定理	400
D.1 二次型定义	400
D.2 二次型及二次型矩阵的正定性	400
D.3 正定矩阵的判别法	401
D.4 二次型定理	401
附录 E 两个备选假设下出现第 II 类、第 III 类错误的概率表	403

第 1 章 测量平差中的误差处理概述

1.1 模型误差

1.1.1 数学模型

从所要研究的客观母体中取得一组观测值,可以用来估计表征该客观母体的有关未知参数,这在数理统计学中称为参数估计,在测量学中称为平差。为此,首先需要建立一个反映观测值和待求未知参数之间关系的数学模型。

观测值向量作为一组随机变量,可以用它的一阶矩(期望)和二阶中心矩(方差-协方差)来描述。其中,描述观测值期望的模型称为**函数模型**,而描述观测值精度特性的模型称为**随机模型**,两者的结合则称为平差的数学模型。

对于满秩的高斯-马尔柯夫线性(或线性化)模型有如下的定义:

假设 A 为已知的 $n \times u$ 阶系数矩阵(通常称为一级设计矩阵), x 为 u 维未知参数向量, l 为 n 维随机观测值向量,其方差-协方差矩阵为 $D(l) = \sigma_0^2 P^{-1}$ (σ_0^2 为单位权方差),而且假设计矩阵 A 为列满秩,即 $\text{rg}(A) = u$,权矩阵 P 为正定矩阵,于是存在下列满秩的高斯-马尔柯夫线性模型:

$$E(l) = A\tilde{x} \quad \text{且} \quad D(l) = \sigma_0^2 P^{-1} \quad (1-1-1)$$

该数学模型在国外之所以称为高斯-马尔柯夫模型是因为:高斯(1809 年)利用似然函数由此模型导出最小二乘法,并随后(1823 年)指出它为最佳估值;马尔柯夫(1912 年)利用最佳线性无偏估计估求该模型的参数。实际上,这就是测量平差中的间接观测平差(平差标准问题 II)。平差的目的是由这一组观测值来求出未知参数的估值,并估计其精度。

1.1.2 模型误差

从统计学意义上讲,模型误差可定义为所建立的模型(包括函数模型和随机模型)与客观现实之间的差异,用公式表示为:

$$F_1 = M_0 - W \tag{1-1-2}$$

式中， F_1 为真模型误差；

M_0 为所利用的数学模型；

W 为未知的客观现实，且 $M_0 \neq W$ 。

如果从数理统计的检验理论出发，把一个数学模型视为相对于客观现实的一个假设（零假设），则在模型确定时人们的出发点是使模型误差（既对于观测值的期望，也对于观测值的方差）为零。对零假设的检验，需要定义一个或多个备选假设。这样的备选假设通常总是企图使所建立的模型扩展得更加精确，从而减小模型误差。

由于客观现实 W 是未知的，人们只好用一个尽可能扩展和精化了的数学模型来代替它。于是，将所利用的模型 M_0 与该扩展精化了的模型 M 之间的差异定义为**似真模型误差**，对实际研究是有意义的。

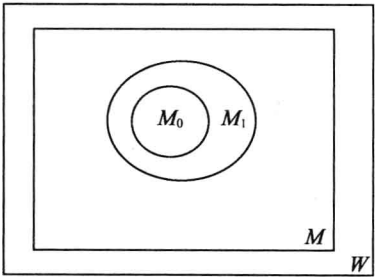
$$F_2 = M_0 - M \tag{1-1-3}$$

我们可以将数学模型 M 尽可能地扩展和精化，使它与客观现实的差异变得很小（ $M - W \rightarrow 0$ ）。譬如，对于自检校光束法平差，Schroth 在他的博士论文中就提出了一个函数模型和随机模型均经过扩展了的数学模型（见 4.6 节）。在这种前提下便得到：

$$F_2 = M_0 - M = (M_0 - W) - (M - W) \approx M_0 - W \tag{1-1-4}$$

于是，我们可以从这样定义的模型误差出发进行其他的讨论。

在假设检验中所要统计检验的是：所利用的模型 M_0 （零假设 H_0 ）与一个扩展了的模型 M_1 （备选假设 H_a ）之间的差异是否显著（见图 1-1-1）。如果 $M_1 = M_0$ ，则该模型是不可检验的。



$$M_0 \cap M_1 = M_0$$

图 1-1-1 单个备选假设下原假设与备选假设之关系

当从两个备选假设中进行选择时所统计区分的是：相对于原模型 M_0 提出的两个扩展了的模型 M_1 和 M_2 是否可以区分。此时 M_1 和 M_2 将作为备选假设相对于