义务教育初级中学课本（试用）

YIWU JIAOYU CHUJI ZHONGXUE KEBEN (SHIYONG)

数学

第五册

B

浙江教育出版社

目　　录

第一章

相似三角形


O
36°
M
36°
C
72°
A
B

在日常生活和生产实际中，我们会遇到许多形状相同而大小不一定相同的图形. 例如图 1-1 中两幅不同比例尺的地图，又如某一张照片与它的放大照等等. 这些形状相同的图形我们称它们是相似形.

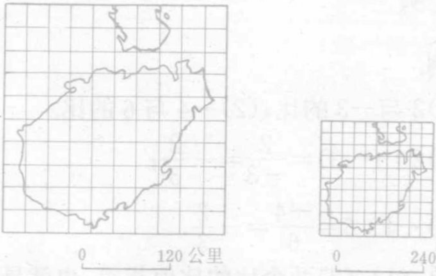


图 1-1

如图 1-2，如果在月圆时，把一个五分硬币（AB 为硬币的直径）放在离眼睛（O）的适当处，使它能够大致遮住月面（CD 为月球的直径，约为 3500km），那么我们只要量出五分硬币的直径和它离眼睛的距离，根据相似三角形的知识，就能算出月球到地球的距离. 相似三角形在日常生活和生产实际中有着广泛的应用.

图 1-2

本章我们将学习相似三角形的概念、判定和性质，以及它们的一些简单应用.

一　比例线段

1.1　比例

先看一例.

计算：(1)2 与 -3 的比；(2)-4 与 6 的比.

解：　(1)$2:(-3)=\frac{2}{-3}=-\frac{2}{3}$；

(2)$-4:6=\frac{-4}{6}=-\frac{2}{3}$.

计算结果，(1)，(2)两个比的比值相等，也就是

$$2:(-3)=(-4):6.$$

或写成 $\frac{2}{-3}=\frac{-4}{6}$.

和小学里学过的一样，我们就说 2、-3、-4、6 这四个数成比例.

如果用字母来表示数，那么比例可以写成如下的形式（只研究所有字母都不等于零的情形）：

$$a:b=c:d，或\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

练习

判别下列各组数是否成比例：

(1) $1,-2,3,-6$；　　(2) $1,-2,-3,-6$；

(3) $-1,-2,-3,-6$；　　(4) $10k,2k,5k,k$.

在比例 $a:b=c:d$(或$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$)中,a,d 叫做**比例外项**,b,c 叫做**比例内项**,d 叫做 a,b,c 的**第四比例项**.

例 1　已知 $ad=bc$,求证:a,b,c,d 成比例.

证明:　$\because$　$ad=bc$,

等式两边同除 db,得$\frac{ad}{db}=\frac{cb}{db}$,

$\therefore$　　$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

所以 a,b,c,d 成比例.

由例 1 可知　$ad=bc\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

在同一单位下,两条线段 a,b 长度的比叫做这**两条线段的比**,记做 $a:b$ 或$\frac{a}{b}$.如果四条线段的长度成比例,那么,这四条线段叫做**成比例线段**,简称**比例线段**.

例 2　在 $Rt\triangle ABC$ 中(图 1-3),$\angle ACB=Rt\angle$,$\angle B=30°$,$CD\perp AB$,D 为垂足.(1)求 AD 与 AC 的比的比值;(2)求证:$AD:AC=AC:AB$.

解:　(1)$\because$　$CD\perp AB$,

$\therefore$　$\angle ADC=Rt\angle$.

在 $Rt\triangle ADC$ 中,

$\because$　$\angle ACD=\angle B=30°$,

$\therefore$　$\frac{AD}{AC}=\frac{1}{2}$.

(2)证明:　$Rt\triangle ABC$ 中,$\angle B=30°$,

$\therefore$　$\frac{AC}{AB}=\frac{1}{2}$.

图 1-3

由(1),得 $\frac{AD}{AC}=\frac{1}{2}$.

$\therefore\quad \frac{AD}{AC}=\frac{AC}{AB}$,

即 $\quad AD:AC=AC:AB$.

这个比例中两个比例内项相同.如果比例中两个比例内项相等,即比例为

$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ 或 $a:b=b:c$

时,我们把 b 叫做 a 和 c 的**比例中项**.如例 2 中,AC 就是 AD 和 AB 的比例中项.

练习

1. 判别下列各组数是否成比例,如果成比例,写出比例式:

(1) 5,−3,15,−9;　　(2) $\frac{1}{2},\frac{1}{4}$,2,1.

2. 说出下列比例中的内项、外项和第四比例项:

(1) $\frac{p}{q}=\frac{f}{s}$;　　(2) $(x+1):x=(1+\frac{1}{x}):1$.

3. 如图所示的三个矩形中,哪两个矩形的长和宽是成比例的线段?

(第 3 题)

4. 已知线段 a,b,c,且 $a^2=bc$.

(1) 把 $a^2=bc$ 变形成比例式;(2) 指出 a,b,c 中的比例中项.

作业

1. 判别下列各数是否成比例,若成比例请写出比例式:

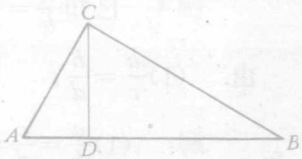
(1) 把-3，18，-2，12；　　　　(2) $6a$，$4a$，$3b$，$2b$.

2. 烟囱高 45m，影长 30m；竿高 1.5m，影长 1m. 物高与影长成比例吗？

3. (1) 求正三角形的高与边长之比；

(2) 求正方形的边长与对角线之比.

4. 图纸上画出的某个零件的长是 $a$mm，如果比例尺是 1∶20，那么这个零件实际的长是多少？如果比例尺是 4∶1 呢？



(第 5 题)

5. 如图，在 $Rt\triangle ABC$ 中，$CD\perp AB$，D 为垂足，$\angle B=30°$. AC，AD，BC，CD 是比例线段吗？如果是，请写出比例式.

1.2 比例的性质(一)

我们已经知道　$ad=bc\Rightarrow\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$，　　　　①

那么能否由$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$推出 $ad=bc$ 呢？

只要在比例式$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$的两边同乘以 bd，就得到

$$ad=bc.$$

也就是　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}\Rightarrow ad=bc.$　　　　②

①和②合起来，就得到比例的基本性质：

$$\boldsymbol{\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow ad=bc.}$$

符号"⇔"读作"等价于". 它表示从左端可以推出右端，从右端也可以推出左端.

推论 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}\Leftrightarrow b^2=ac$.

例1　已知$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，判别下列哪些比例成立，并说明理由.　(1)$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$；　(2)$\frac{d}{c}=\frac{b}{a}$.

解：　(1)$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow ad=bc$，

$ad=bc$的两边同除以dc，得　$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$.

(2)用同样方法可以说明$\frac{d}{c}=\frac{b}{a}$成立.

由(1)，(2)可知，

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\begin{cases}\frac{a}{c}=\frac{b}{d};\\[2mm]\frac{d}{c}=\frac{b}{a}.\end{cases}$$

也就是说，比例的两个内项可以交换位置，两个外项也可以交换位置.

练习

根据下列条件，求$a:b$.

(1)$2a=3b$；　(2)$\frac{5}{a}=\frac{7}{b}$.

例2　图1-4是我国台湾省的几个城市的位置图，问从高雄市到基隆市的实际距离约是多少？

解：　从图上量出高雄市到基隆市的距离约为35.1mm，设实际距离为s，则

$$\frac{35.1}{s}=\frac{1}{9000000},$$

$\therefore \quad s=35.1\times9000000(\text{mm}),$

即 $s\approx316(\text{km})$.

答：高雄市到基隆市的实际距离是 316km.

如果量得图中的 $\angle\alpha=28°$，我们就能确定基隆市在高雄市的北偏东 28°的 316km 处.

比例尺 1∶9000000

图 1-4

例 3 已知线段 $PQ=l$，C 是 PQ 上的一点（图 1-5），且 PC 是 PQ 和 QC 的比例中项，求 PC 的长.

解： 设 $PC=x$，那么

$QC=PQ-PC=l-x.$

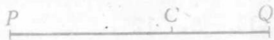


图 1-5

因为 PC 是 PQ 和 QC 的比例中项，所以 $\quad x^2=l(l-x),$

$$x^2+lx-l^2=0.$$

解得

$$x_1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}l,\quad x_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}l\text{（不合题意）}.$$

即 $$PC=\frac{\sqrt{5}-1}{2}l\approx0.618l.$$

把一条线段（PQ）分成两条线段，使其中较大的线段（PC）是原线段（PQ）与较小的线段（QC）的比例中项，这种分法用途很广，所以人们把它称做**黄金分割**.

练习

1. 已知：$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$，请再写出四个关于 a,b,c,d 这四个数的比例式.

2. 求下列各式中的 x：

(1) $4:3=5:x$；　　(2) $(-3):x=2:(-6)$.

3. 画一条线段，然后利用例 3 的结果(近似值)把它进行黄金分割.

作业

1. 求下列各式中的 x：

(1) $7:10=6:3x$；　　(2) $(-3):x=\frac{2}{3}:\frac{3}{4}$；

(3) $x^2:(x+1)=(x-1):2$.

2. 求下列各组数的比例中项：

(1) $-5,-125$；　　(2) $\frac{1}{x},4x^3(x>0)$.

3. 从下列各式求 $x:y$：

(1) $-3y=4x$；　　(2) $5:7=y:x$；

(3) $7:x=4:y$.

4. 根据例 2 的图 1-4，求出从台中市到台北市的距离，以及台北市的方位.

1.3　比例的性质(二)

比例还有下面两个重要性质：

1. 合比定理

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}.$$

证明：　$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{b}\pm1=\frac{c}{d}\pm1$

$\Rightarrow \frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$.

例 1　已知$\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$.求：

(1)$\frac{a+b}{b}$；(2)$\frac{a-b}{b}$；(3)$\frac{a-b}{a+b}$.

解：(1)$\frac{a}{b} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{3+4}{4}$　①(合比定理)

$\Rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{7}{4}$；

(2)$\frac{a}{b} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{3-4}{4}$　②

$\Rightarrow \frac{a-b}{b} = -\frac{1}{4}$；

(3) ②÷①,得　$\frac{a-b}{a+b} = \frac{3-4}{3+4}$,

$\therefore \frac{a-b}{a+b} = -\frac{1}{7}$.

2.等比定理

$\boldsymbol{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \cdots = \frac{m}{n}}$　$(\boldsymbol{b+d+\cdots+n \neq 0})$

$\boldsymbol{\Rightarrow \frac{a+c+\cdots+m}{b+d+\cdots+n} = \frac{a}{b}}$.

证明：设$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \cdots = \frac{m}{n} = k$,那么$a = bk$, $c = dk$, $\cdots$, $m = nk$.

$\because b+d+\cdots+n \neq 0$,

$\therefore \frac{a+c+\cdots+m}{b+d+\cdots+n} = \frac{bk+dk+\cdots+nk}{b+d+\cdots+n}$

$= \frac{(b+d+\cdots+n)k}{b+d+\cdots+n} = k = \frac{a}{b}$.

例 2　已知三角形三条边之比为$a : b : c = 2 : 3 : 4$,三

角形的周长为 18cm. 求各边的长.

解: $\because\ a:b:c=2:3:4$,

$\therefore\ \frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{4}$.

$\therefore\ \frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{4}=\frac{a+b+c}{2+3+4}$(等比定理)$=\frac{18}{9}=2$,

$\therefore\ a=2\times2=4(\text{cm})$;

$b=3\times2=6(\text{cm})$;

$c=4\times2=8(\text{cm})$.

答:三角形的三条边长分别为 4cm,6cm,8cm.

练习

1. 根据下列各式求 $a:b$ 的值:

(1) $\frac{a}{3}=\frac{-b}{4}$;　　(2) $\frac{a+b}{b}=\frac{3}{8}$.

2. 判别下列推理是否正确?

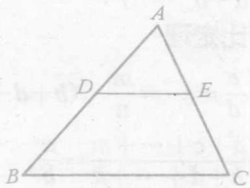
(1) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$;

(2) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a-b}{b}=\frac{c+d}{d}$;

(3) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{c}{d}=\frac{a+2c}{b+2d}$.

3. 如图,已知$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$.

求证:$\frac{AB}{DB}=\frac{AC}{EC}$.



(第 3 题)

作业

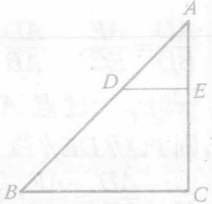
1. 根据下列各式,求 $x:y$:

(1) $\frac{3}{x}=\frac{4}{y}$;　　(2) $\frac{x-y}{y}=\frac{2}{3}$.

2. 已知：$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$. 求$\frac{x+y+z}{x}$的值.

3. 已知：如图，$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$，$AD=15$，$AB=40$，$AC=28$，求 AE 的长.

4. 已知：$x:y:z=3:4:5$，$x+y-z=6$，求 x,y,z.



（第 3 题）

1.4 平行线分线段成比例

观察图 1-6.

在图 1-6 中，l_1,l_2,l_3,l_4,l_5,l_6 这组平行线在直线 a 上截得 5 条相等的线段. 根据平行线等分线段定理，这组平行线在直线 b 上也截得 5 条相等的线段. 下面我们来看 l_1,l_3,l_6 在 a,b 这两条直线上截得的四条线段 $AB,BC,A'B',B'C'$ 是否成比例.

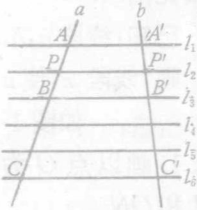


图 1-6

很明显，$\frac{AB}{BC}=\frac{2}{3}$，$\frac{A'B'}{B'C'}=\frac{2}{3}$.

$\therefore \quad \frac{AB}{BC}=\frac{A'B'}{B'C'}$.

同样可得 $\quad \frac{AB}{AC}=\frac{A'B'}{A'C'}$.

请你换三条平行线，如 l_1,l_2,l_6，试一试. 看有否同样的结果.

一般地，就有下面的定理：

平行线分线段成比例定理　三条平行线截两条直线，所得的对应线段成比例.

例 1　在$\triangle ABC$ 中，已知 $DE/\!/BC$（图 1-7），求证：

$\dfrac{AD}{BD}=\dfrac{AE}{EC}$； $\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}$.

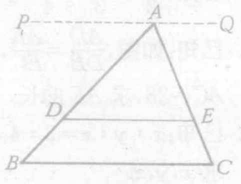


图 1-7

证明： 过点 A，画直线 $PQ /\!/ DE$，则 $PQ /\!/ DE /\!/ BC$.

$\therefore$ $\dfrac{AD}{BD}=\dfrac{AE}{EC}$（平行线分线段成比例定理）.

同理可得 $\dfrac{AD}{AB}=\dfrac{AE}{AC}$.

由例 1，得到

推论　平行于三角形一边的直线截其他两边，所得对应线段成比例.

例 2　画已知线段 a,b,c 的第四比例项.

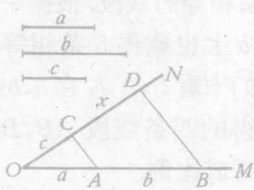


图 1-8

已知：线段 a,b,c（图 1-8）.

画：线段 x，使 $a:b=c:x$.

画法： 如图 1-8.

1. 画以点 O 为端点的射线 OM 和 ON.

2. 在 OM 上依次截取 $OA=a$，$AB=b$；在 ON 上截取 $OC=c$.

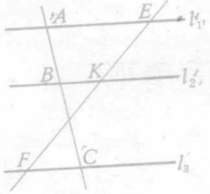
3. 连结 AC. 过点 B 画 $BD /\!/ AC$，交 ON 于点 D.

CD 就是所求的线段 x.

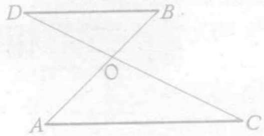
练习

1. 如图，已知 $AB=3\text{cm}$，$BC=5\text{cm}$，$EK=4\text{cm}$. 求：

(1) $EK:KF$； (2) $AB:AC$； (3) $EK:EF$； (4) FK 的长.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，$BD /\!/ AC$，AB 交 CD 于点 O. 求证：$\frac{DO}{BO}=\frac{CO}{AO}$.

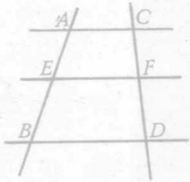
3. 已知线段 a,b,c，画线段 x，使 $\frac{a}{x}=\frac{b}{c}$.

作业

1. 已知如图，$l_1 /\!/ l_2 /\!/ l_3$，写出图中所有的成比例线段.

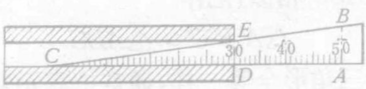
2. 若练习第 2 题中 $AB=4\text{cm}$，$CD=5\text{cm}$，$BO=1.5\text{cm}$，求 CO 的长.

3. 已知线段 a,b,c，画线段 x，使
(1)$a:b=c:x$；　(2)$x:a=b:c$；
(3)$x=\frac{ac}{b}$.



（第 1 题）

4. 如图，测量小玻璃管口径的量具 ABC 上，AB 长为 5mm，AC 被分为 50 等分 如果管口 DE 正好对着量具上 30 的刻度处（$DE /\!/ AB$），那么小管口径是多少 mm？



（第 4 题）