3导 自考3导丛书

导教·导学·导考

2005年

工程数学（线性代数）

核心学案

自学考试新教材·公共课（二）

教材依据/辽宁大学出版社《工程数学（线性代数）》 魏战线/主编

组 编/全国高等教育自学考试命题研究组

同步辅导同步过关

指定教材核心浓缩

预测试卷历年真题

RED PRECIOUS BOOK 红宝书

航空工业出版社

高等教育自学考试3导丛书

导教·导学·导考

现代汉语

核心学案

自学考试新教材

应对自考课程大规模修订后的新教材内容

教材依据／语文出版社《现代汉语》主编／张斌

组　编／全国高等教育自学考试命题研究组

航空工业出版社

图书在版编目(CIP)数据

工程数学.线性代数/自学考试命题研究组,《工程数学》书编委会编.—北京:航空工业出版社,2005.1

(自学考试新教材核心学案.公共课.第2辑)

ISBN 7-80183-528-X

Ⅰ.工... Ⅱ.①自...②工... Ⅲ.①工程数学—高等学校—自学参考资料②线性代数—高等学校—自学参考资料 Ⅳ.TB11

中国版本国书馆 CIP 数据核字(2004)第129923号

工程数学(线性代数)

Gongcheng Shuxue(Xianxing Daishu)

航空工业出版社出版发行

(北京市安定门外小关东里14号 100029)

发行部电话:010-84926529 010-64978486

三河市燕山印刷有限公司印刷 全国各地新华书店经售

2005年1月第1版 2005年1月第1次印刷

开本:850×1168 1/32 印张:70

字数:2600千字 (全12册)定价:168.00元

简 介

张立勇　一个普通的农民孩子，清华大学打工 8 年，一直坚持刻苦自学，不仅 80 分以上通过四级、六级考试，托福考试 630 分，而且获得了北京大学本科文凭。2004 年 10 月共青团中央向张立勇颁发了“中国青年学习成才奖”，他被誉为共青团中央树立的全国十大杰出学习青年之一。

张立勇的事迹被中央电视台“东方之子”“面对面”“新闻会客厅”等多个栏目采访报道，被北京电视台、中国教育电视台等电视媒体，新浪网、雅虎网等网络媒体，《人民日报》《中国青年报》《大学生》等报纸杂志，共 100 多家媒体采访报道，在社会上引起很大反响。被众多青年学子视为学习的榜样。

“因为我选择了这样一条自己的人生道路，所以我没有机会像大多数的学子那样，经历从学校到学校，顺利地接受高等教育的过程。我只能通过自学来圆我的大学梦。”

“我常常想，上帝会厚爱每一个人的，它会用不同的方式对你所付出的艰辛和努力给予补偿。但是，上帝只钟爱那些自助的人。如果你不努力，你不拼搏，所有的机会都会和你失之交臂。如果在这十年之中，我放弃了对人生理想和人生价值的追求，那么，当这一切机遇到来的时候，我又怎么可能把握住呢？”

“大家觉得我是一个榜样，但我个人并不这么想。社会把我放到这样的位置，充当这样的角色，能够影响一些人，这是最让我自豪的。”

-------- 张立勇

导教·导学·导考

编委会

编委主任：程　琨　魏　莹

编委名单：（按姓氏笔画排列）

万　鹏　刘　斌　刘海飞　刘　涛

闫树茂　宋玉珍　张　沁　张远盛

肖　果　郃桂英　崔海燕　程　琨

董金波　董　蕾　蒋　怡　魏　莹

前 言

"其实人的智力相差并不悬殊,可毅力的差距却使每个人拥有各自不同的前途。尤其是对于参加自考的人来说,毅力是非常重要的,当然还需要有得当的学习方法。"

"有很多人抱怨自考难以通过,然而正是这种严格的管理制度保证了自考毕业生的质量,使自考生获得了社会的认可和一致的好评。"

——一名从自考获得本科学历后又考上硕士生直到博士生的成功者的自述

参加自学考试,除了需要具备以上成功者所提到的毅力和方法外,还应该了解自考的每门课程都采用我们通常所说的"过关"考试——只要通过课程的一次性考试,就可拿到课程的学分,通过某专业要求课程的全部考试,也就会顺利获得这个专业的自考毕业证。然而,一分之差也会导致参考课程过关失败,有些考生难免多次重考才能修完规定课程。因此,在本书的编写过程中,编委们反复研讨自学考试的特点,努力寻求帮助自考生的有效途径。本书是多位学者、专家,历时数年的产物,具有以下优点。

一 掌握核心内容,了解命题动态,注重知识系统化

了解命题精神,是自学考试的核心,是达到专业标准的关键。自学考试的课程命题以课程自学考试大纲为依据,以最新指定教材为范围。本书紧紧贴住每一门课程的考试大纲和指定教材,用【考纲要求提示】、【知识结构图示】、【核心内容速记】、【同步精华题解】、【典型例题解析】等多个栏目解剖教材内容,是一套脉络清晰的速成讲义,可以使考生在厚厚的教材中抓住重点,对教材的系统学习有极强的指导作用。同时,对于临考考生,它又可以成为离开教材仍能独立使用的贴身笔记。《核心学案》摒弃了一些辅导书的题海战术,引导考生重视教材的学习。那么怎样去自学才能弄懂教材并将厚书读"薄"呢?抓住重点才是关键。《核心学案》用清晰的思路,帮助考生将教材知识系统化,使考生在答卷时知识系统、逻辑清晰、胸有成竹。

二 依据权威资料,重视最新信息,紧跟时代脉搏

参加高等教育自学考试的考生,常常会感到市面上的辅导资料甚至教材都有

滞后性。全国高教自考办也认可这一事实，并采取了一些有效措施，比如在发布考试大纲和指定教材的基础上又组编了《全国高等教育自学考试活页丛书》等补充学习材料，并明文规定增补内容纳入统一命题范围，要占卷面 5～10 分。同时高教自考办还加快了教材的修订频率。面对这种情况，原有的一些辅导资料的严重滞后和内容缺陷也是必然的。本套《核心学案》则高度重视这一现象，在依据考试大纲和指定教材时，选用高教自考办的最新修订本（2004 年起自考课程已在做大规模修订），并将活页丛书等内容融会贯通其中，有的科目还特意增加了【最新内容补充】以引起考生重视。另外，本套书还吸收了许多自考强化班的授课精华，目的是帮助考生了解最新考试动态。我们还将开通网上自考辅导随时更新有关内容和提供特色售后服务，欢迎点击 www. study-book. com. cn。

三 做到讲练结合，力求精讲精练，提高辅导命中率

本套书配有【同步精华题解】和综合演练题，是在对考纲、教材归纳总结后选编的一些经典同步练习题。这些练习题的题型与考试题型完全一致，使考生能够迅速掌握答题方法与同步要点。另外，本书的编者还依据各科内容，遴选考点，在对历年实考真题做详细分析的基础上精编了《命题预测试卷》。这些试卷不仅题型题量完全与真考试卷保持一致，而且力求覆盖考试大纲的各科重点。考生如果在学习《核心学案》的基础上再认真研习《命题预测试卷》，既可熟悉题型、了解试卷难易度，又可将其作为自测、练习之用，找出差距，查漏补缺。因此，在《核心学案》的首印首发优惠活动中，为了帮助考生用好的学习方法提高应试过关率，我们特意将《命题预测试卷》作为《核心学案》的赠品送给每个考生。这样，本书即成为真正具有命中率的辅导用书。

总之，面对数千万的自考考生，我们是抱着高度的责任感来完成这项使命的。我们的目的是：减轻考生的学习负担；我们口号是：用最短的时间使考生自考过关！因为工作量的巨大和考期的压力，也许我们遗留了某些不足，欢迎读者批评指正。来函可致：reader@ study-book. com. cn，我们将高度重视，以求完善。

编　者

目录

第一章 矩阵和行列式

考纲要求提示

1. 理解矩阵的概念,熟知单位矩阵、零矩阵的定义;
2. 掌握矩阵的初等变换及解线性方程组的消元法;
3. 熟练掌握矩阵的运算(包括线性运算、乘法、方阵的幂、转置和求逆矩阵);
4. 了解上(下)三角形矩阵、对角矩阵、对称矩阵、反对称矩阵的定义及其简单运算性质;
5. 了解分块矩阵及其运算;
6. 知道行列式的定义,记住行列式的性质及按行(列)展开法则;
7. 熟练掌握2、3 阶行列式的计算;
8. 会计算简单的 n 阶行列式;
9. 掌握克莱姆(Cramer)法则.

知识结构图示

- 矩阵和行列式
  - 矩阵的概念
  - 消元法与矩阵的初等变换
    - 线性方程组与矩阵
    - 消元法与矩阵的初等行变换
    - 矩阵的等价
  - 矩阵的运算
    - 矩阵的加法及数与矩阵的乘法
    - 矩阵的乘法
    - 矩阵的转置
  - 分块矩阵
    - 子矩阵
    - 分块矩阵
  - 行列式
    - 2 阶和 3 阶行列式
    - 排列及其逆序数
    - n 阶行列式的定义
    - 行列式的性质
    - 行列式按一行(列)展开法则
  - 逆矩阵
    - 逆矩阵的基本概念
    - 初等方阵和初等变换法求逆矩阵
  - 克莱姆(Cramer)法则

核心内容速记

1. 矩阵的概念

由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,n)$ 排成的 m 行、n 列(横排的叫行,竖排的叫列)的矩形数表,称为一个 **$m\times n$ 矩阵**. 其中 a_{ij} 称为该矩阵的第 i 行第 j 列**元素**,简称为该矩阵的 (i,j) 元素.

当 $m=n$ 时,矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 称为 **n 阶方阵或 n 阶矩阵**.

2. 几种重要的特殊矩阵

(1)零矩阵:所有元素都是零的 $m\times n$ 矩阵,称为 $m\times n$ **零矩阵**.

(2)单位矩阵:主对角线上的元素都是 1,而其他元素全为零的 n 阶方阵,称为 n 阶**单位阵**.

(3)行矩阵与列矩阵:仅有 1 行的 $1\times n$ 矩阵

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

称为一个**行矩阵或 n 维行向量**. 仅有 1 列的 $m\times 1$ 矩阵

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

称为一个**列矩阵**或 **m 维列向量**.

(4)上(下)三角矩阵:主对角线下(上)边的元素全为零的 n 阶方阵称**上(下)三角矩阵**.

(5)对角矩阵:主对角线以外的元素全为零的 n 阶方阵称为 n 阶**对角矩阵**.

3. 矩阵相等

设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n},\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$. 这里 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的行数相等,$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的列数也相等,把这样的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 称为**同型矩阵**. 如果两个同型矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的对应元素都相等,即 $a_{ij}=b_{ij}(i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,n)$,则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相等,记为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

注意,两个不同型的矩阵必不相等. 特别注意,两个不同型的零矩阵是不相等的(虽然它们的元素都是零),两个阶数不同的单位矩阵也是不相等的(虽然它们的形状类似).

4. 矩阵的初等变换

把对矩阵施行的下列三种变换:

(1)交换第 i 行与第 j 行的位置(记为 $r_i\leftrightarrow r_j$);

(2)用非零数 k 乘第 i 行(记为 $k\times \boldsymbol{r}_i$);

(3)把第 i 行的 k 倍加到第 j 行上去(记为 $k\times \boldsymbol{r}_i+\boldsymbol{r}_j$)

分别称为矩阵的第 1 种、第 2 种和第 3 种初等行变换,统称为矩阵的**初等行变换**.

5. 阶梯形矩阵

定义 (1)如果存在零行(元素全是零的行),则零行都在非零行(元素不全为零的行)的下边;

(2)每个首非零元(非零行最左边的非零元素)所在的列中,位于这个首非零元下边的元素全是零.

称满足上面两个条件的矩阵为**阶梯形矩阵**.

定理 对于任一非零矩阵 $\boldsymbol{A}$,都可通过若干次初等行变换把它化成阶梯形矩阵.

6. 矩阵的等价

如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经若干次初等行(列)变换变成了矩阵 $\boldsymbol{B}$,则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ **行(列)等价**,或称 $\boldsymbol{A}$ **行(列)等价于** $\boldsymbol{B}$,记为 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$.

矩阵等价是同型矩阵之间的一种关系. 这种关系具有下列基本性质:

(1)反身性:$\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{A}$;

(2)对称性:若 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$,则 $\boldsymbol{B}\cong\boldsymbol{A}$;

(3)传递性:若 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{B}\cong\boldsymbol{C}$,则 $\boldsymbol{A}\cong\boldsymbol{C}$.

矩阵行等价和矩阵列等价统称为**矩阵等价**.

7. 矩阵的运算

(1)矩阵的加法

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 是两个 $m\times n$ 矩阵,规定 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和是由 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的对应元素相加所得到的另一个 $m\times n$ 矩阵,记为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$,即

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}.$$

零矩阵的元素全为零,因此对任何矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$,都有

$$\boldsymbol{A}_{m\times n}+\boldsymbol{O}_{m\times n}=\boldsymbol{O}_{m\times n}+\boldsymbol{A}_{m\times n}=\boldsymbol{A}_{m\times n}.$$

由负矩阵可以定义矩阵的减法为

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})=(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}.$$

矩阵的加法运算满足下列运算规律:

①$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$(加法交换律);

②$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$(加法结合律);

③$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$(零矩阵的作用);

④$\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$(负矩阵的作用).

(2)数与矩阵的乘法

设矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，k 为非零常数，规定 k 与 A 的乘积是用 k 去乘 A 的每个元素所得到的另一个 $m\times n$ 矩阵，记为 kA（或 Ak），即

$$kA=(ka_{ij})_{m\times n}.$$

数乘矩阵的运算满足下列运算规律（其中 A、B 为任意 $m\times n$ 矩阵，k、l 为任意常数）：

①$1A=A$；

②$k(lA)=(kl)A$（结合律）；

③$(k+l)A=kA+lA$（分配律）；

④$k(A+B)=kA+kB$（分配律）.

(3)矩阵的乘法

设矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times s}$，$B=(b_{ij})_{s\times n}$，规定 A 与 B 的乘积为矩阵 $C=(c_{ij})_{m\times n}$，记为 $AB=C$，其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}\quad(i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,n)$$

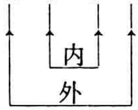
即 AB 的第 i 行第 j 列元素为 A 的第 i 行元素与 B 的第 j 列对应元素的乘积之和.

关于矩阵乘法的定义，必须注意以下两点：

①因为乘积矩阵的 (i,j) 元素规定为左边矩阵的第 i 行元素与右边矩阵的第 j 列对应元素的乘积之和，所以只有当左边矩阵的列数等于右边矩阵的行数时，它们才可以相乘，否则不能相乘.

②乘积矩阵的行数等于左边矩阵的行数，乘积矩阵的列数等于右边矩阵的列数. 矩阵 $A_{m\times s}$ 与 $B_{s\times n}$ 相乘可用下式来表示

$$\begin{array}{ccc} A & B & = & AB \\ m\times s & s\times n & & m\times n \end{array}$$



当内部的两个数字相同时，AB 就有意义，此时外边的两个数字就分别给出了乘积矩阵 AB 的行数和列数.

矩阵乘法满足下列运算规律（假定其中的矩阵乘法都有意义，E_m 和 E_n 分别是 m 阶和 n 阶的单位矩阵，k 为任一常数）：

①$E_mA_{m\times n}=A_{m\times n}E_n=A_{m\times n}$（单位矩阵的作用）；

②$(AB)C=A(BC)$（乘法结合律）；

③$(kA)B=A(kB)=k(AB)$（关于数乘的结合律）；

④$A(B+C)=AB+AC$（左分配律）；

⑤$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$(右分配律).

(4)矩阵的转置

把 $m\times n$ 矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

的行依次换成列(列依次换成行)所得到的 $n\times m$ 矩阵,称为 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵,记为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$(或 $\boldsymbol{A}'$),即

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

矩阵的转置满足下列规律:

①$(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$;

②$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$;

③$(k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$($k$ 为非零常数);

④$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$

可将规律④推广,例如:

$$(\boldsymbol{ABC})^{\mathrm{T}}=[(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}]^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}.$$

8. 对称矩阵和反对称矩阵

若方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$ 或 $a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为**对称矩阵**. 例如,矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -3 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

就是一个对称矩阵.

若方阵 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times n}$满足 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{B}$ 或 $b_{ij}=-b_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$,则称 $\boldsymbol{B}$ 为**反对称矩阵**. 由反对称矩阵的定义知,当 $j=i$ 时,有 $b_{ii}=-b_{ii}$,所以 $b_{ii}=0$,即反对称矩阵的主对角线上的元素全为零. 例如,矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

就是一个反对称矩阵.

9. 分块矩阵

(1)概念:将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 按照行线或列线分成若干个子块,将 $\boldsymbol{A}$ 看成由若干个小矩阵块构成,称为**分块矩阵**.

(2)分块矩阵的运算

①分块矩阵的加法

设对同型矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 作同样的划分,得分块矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1t}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{st}\end{bmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_{11} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1t}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \boldsymbol{B}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{B}_{st}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{B}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1t}+\boldsymbol{B}_{1t}\\ \cdots\ \cdots & \cdots & \cdots\ \cdots\ \cdots\\ \boldsymbol{A}_{s1}+\boldsymbol{B}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{st}+\boldsymbol{B}_{st}\end{bmatrix}$$

②数与分块矩阵的乘法

$$k\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}k\boldsymbol{A}_{11} & \cdots & k\boldsymbol{A}_{1t}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ k\boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & k\boldsymbol{A}_{st}\end{bmatrix}\qquad (k\text{ 为常数})$$

③分块矩阵的转置

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1t}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2t}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \boldsymbol{A}_{s1} & \boldsymbol{A}_{s2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{st}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{21}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{A}_{s1}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{A}_{12}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{22}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{A}_{s2}^{\mathrm{T}}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \boldsymbol{A}_{1t}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}_{2t}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{A}_{st}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$$

即分块矩阵的转置,是将它的行列依次互换,同时将各子块转置.

④分块矩阵的乘法

设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为可相乘的矩阵,分块成

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \boldsymbol{A}_{s1} & \boldsymbol{A}_{s2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1t}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \boldsymbol{B}_{r1} & \boldsymbol{B}_{r2} & \cdots & \boldsymbol{B}_{rt}\end{bmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{A}_{i1},\boldsymbol{A}_{i2},\cdots,\boldsymbol{A}_{ir}$ 的列数分别等于 $\boldsymbol{B}_{1j},\boldsymbol{B}_{2j},\cdots,\boldsymbol{B}_{rj}$ 的行数,则

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_{11} & \boldsymbol{C}_{12} & \cdots & \boldsymbol{C}_{1t}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \boldsymbol{C}_{s1} & \boldsymbol{C}_{s2} & \cdots & \boldsymbol{C}_{st}\end{bmatrix}$$

其中, $$\boldsymbol{C}_{ij}=\sum_{k=1}^{r}\boldsymbol{A}_{ik}\boldsymbol{B}_{kj},\ (i=1,\cdots,s;\ j=1,\cdots,t)$$

(3)准对角矩阵

形如 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \mathbf{A}_i & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \mathbf{A}_s\end{bmatrix}$,其中 $\mathbf{A}_i$ 为 n 阶方阵($i=1,2,\cdots,s$)的矩阵称为**准对角矩阵**.

此时 $|\mathbf{A}|=|\mathbf{A}_1|\cdot|\mathbf{A}_2|\cdot\cdots\cdot|\mathbf{A}_s|$.

若每一个 $\mathbf{A}_i$ 都可逆,则 $\mathbf{A}$ 也可逆,且

$$\mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_1^{-1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \mathbf{A}_i^{-1} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \mathbf{A}_s^{-1}\end{bmatrix}$$

10. 行列式

(1)2 阶方阵 $\mathbf{A}$ 的行列式

称 2 阶方阵

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$$

的元素按以下规律做出的代数和

$$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

为这个 2 阶方阵 A 的行列式,记为 $\det A$,即 $\det A=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.

(2)3 阶方阵的行列式

3 阶方阵的行列式定义为

$$\det\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

(3)排列及其逆序数

①n 级排列

由 n 个数字 $1,2,\cdots,n$ 所作成的一个全排列,称为一个 **n 级排列**.

常用($j_1,j_2,\cdots,j_n$)表示一个 n 级排列,其中 j_1 是该排列的第 1 个数,j_2 是该排列的第 2 个数,$\cdots$,j_n 是该排列的第 n 个数.

n 级排列总共有 $n!$ 个.

②逆序

在所有 n 级排列中,$(1,2,\cdots,n)$ 是惟一的按自然数顺序排列的,称它为**自然排列或标准排列**.

在一个排列中,如果有一个大数排在一个小数之前,则称这两个数构成该排列的一个**逆序**.一个排列中逆序的总数,称为该排列的**逆序数**.排列 $(j_1,j_2,\cdots,j_n)$ 的逆序数记为 $\tau(j_1,j_2,\cdots,j_n)$,并且称逆序数为奇数的排列为**奇排列**,称逆序数为偶数的排列为**偶排列**.

(4)n 阶行列式的概念

对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$,它的行列式记为 $\det\boldsymbol{A}$,也可以记为 $|\boldsymbol{A}|$ 或

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

定义为

$$\det\boldsymbol{A}=\sum_{(j_1 j_2\cdots j_n)}(-1)^{\tau(j_1 j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

其中的 $\sum$ 是对所有 n 级排列求和,即 $(j_1,j_2,\cdots,j_n)$ 要取遍所有的 n 级排列(共 $n!$ 个).

上式的右端称为 $\det\boldsymbol{A}$ 的**展开式**,一个 n 阶方阵的行列式也简称为一个 **n 阶行列式**.

(5)行列式的性质

性质 1 行列式和它的转置行列式相等.

性质 2 互换 $\boldsymbol{A}$ 的某两行位置,设所得到的方阵为 $\boldsymbol{B}$,则 $\det\boldsymbol{B}=-\det\boldsymbol{A}$.

性质 3 若 $\boldsymbol{A}$ 中有两行相同,则 $\det\boldsymbol{A}=0$.

性质 4 用常数 k 去乘 $\boldsymbol{A}$ 的某一行,设所得到的方阵为 $\boldsymbol{B}$,则 $\det\boldsymbol{B}=k\det\boldsymbol{A}$.

推论 1 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵,k 为常数,则有 $\det(k\boldsymbol{A})=k^n\det\boldsymbol{A}$.

推论 2 若 $\boldsymbol{A}$ 中存在 1 个零行,则 $\det\boldsymbol{A}=0$.

推论 3 若 $\boldsymbol{A}$ 中有两行成比例,则 $\det\boldsymbol{A}=0$.

性质 5 若 $\boldsymbol{A}$ 中某行各元素都是两个数的和:$a_{ij}=b_{ij}+c_{ij}(j=1,\cdots,n)$,则 $\det\boldsymbol{A}$ 可以分拆成两个相应行列式的和