高中 立体 解析 几何

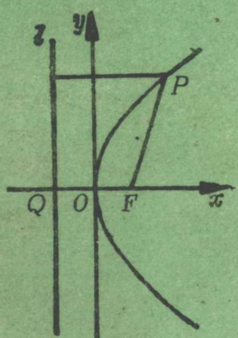
典型题例解与习题精选

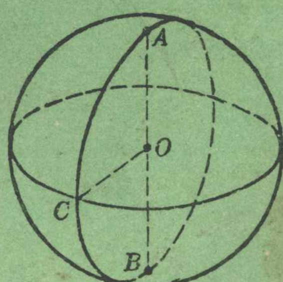
主　编

孙海正　黄明华

编　者

阎延坤　黄明华　隋福林　孙海正





吉林人民出版社

高中立体几何、解析几何
典型题例解与习题精选

主　编

孙海正　黄明华

编　者

阎延坤　黄明华　隋福林　孙海正

吉林人民出版社

（吉）新登字01号

高中立体解析几何

典型题例解与习题精选

吉林人民出版社出版　吉林省新华书店发行

长春市第九印刷厂印刷

787×1092毫米32开本　14.25印张　336 000字

1994年2月第1版　　1994年2月第1次印刷

印数：1—5 000册

ISBN　7-206-01986-2

G·422　定价：9.40元

前　言

“高中代数典型题例解与习题精选”、“高中几何典型题例解与习题精选”与现行高中数学课本配套同步，紧扣数学教学大纲，跟踪高考信息，不仅是高中各年级学生的良师益友，也适用于高考复习之用，也是中学数学教师必备的教学参考书。

本书以单元为基础编写，每单元分：基础知识提要；典型题例解；习题精选；习题答案四个部分。按课本知识顺序，同步深入，密切配合，恰当扩展，巩固提高。

基础知识提要　做为单元主要内容的概括与总结，突出重点和难点、突出基本方法，使知识与方法一目了然。

典型题例解　依据本单元的教学要求，本着注重基础知识和基本技能，本着多方位、多角度突出重点和难点，编者多年实践中经过测试、筛选，比较精选了各单元典型例题。通过典型例题，落实基础知识，揭示解题方法、技巧，归纳总结解题规律，提出注意的问题，帮助学生掌握优良的学习方法，提高分析问题水平，扩展解题思路，培养举一反三能力。

习题精选　根据单元教学要求，根据高考试题特点，每单元都配有习题精选，实质是各单元内容的进一步落实与强化，也是留给学生的自测题，习题精选具有典型性，代表性、新颖性，覆盖面广。

习题答案　为便于学生自我学习，自我检查，自我验收，也便于各种不同程度的同学的需要，每个习题都配有答

案或提示，对于较易习题配有提示，对于中下等难度以上的习题都给出略解或详解。

本书具有很强的实用性。

本书是由全国重点中学东北师大附中及吉林省实验中学、长春市实验中学几位在教学第一线的具有丰富实践经验和著述的中学特级、高级教师编写，集三校经验与长处于一体，并吸取了全国重点中学交流试题中优秀习题。在此表示感谢。

对于本书存在的问题或不足之处，敬请读者批评指正。

编 者

1994年二月于东北师大附中

目　　录

立体几何部分

解析几何部分

立体几何部分

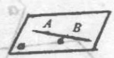
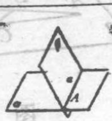
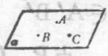
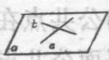
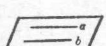
第一章　直线和平面

一　平　面

基础知识提要

1．平面是一个不定义的概念．几何里的平面是无限延展的。

2．平面的基本性质　三个公理和公理3的三个推论，是立体几何的理论基础。其作用如下：

名　称	图　形	作　用
公理　1		判定直线在平面内的依据
公理　2		证明两平面相交的依据 证三点共线的依据 证点在直线上的依据
公理　3 及三个 推论	   	确定平面的依据 证明两平面重合的依据 （“确定”一个平面，系指“有且仅有”一个平面。）

3．水平放置的平面图形的直观图的画法。

斜二测画法，正轴测画法。

典型题例解

1．证点共线

例1．已知 ΔABC 在平面α外，它的三边所在直线分别交平面α于P、Q、R，则P、Q、R共线，

证明：过AB，AC确定平面β交平面α于a．$\because$ $P\in AB$，$\therefore$ $P\in\beta$，又$P\in\alpha$，$\therefore$ $P\in a$．同理可证$Q\in a$，$R\in a$，$\therefore$ P，Q，R共线。

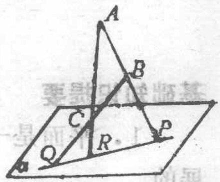


图 1-1

例2：若不在同一平面内的两个三角形的三对边分别相交于一点，求证这三点共线。

已知：（如图）ΔABC与$\Delta A'B'C'$所在平面分别为α、β．AB与A′B′ BC与B′C′，AC与A′C′分别交于P，Q，R。

求证：P、Q、R共线。

证明：设$\alpha\cap\beta=l$ $\because$ $AB\subset\alpha$，$P\in AB$ $\therefore P\in\alpha$，又$\because$ $A'B'\subset\beta$，$P\in A'B'$ $\therefore$ $P\in\beta$ $\therefore$ $P\in l$，同理可证$Q\in l$，$R\in l$，$\therefore$ 点P、Q、R共线。

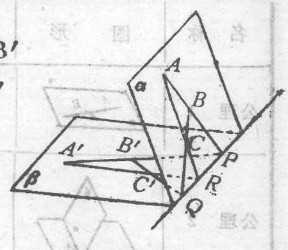


图 1-2

小结：证点共线问题用公理2，转证所证各点都在交线上。公理2的作用是判定两平面相交的依据，交线唯一，交线上的点是两平面的公共点，两平面的公共点在交线上，交线外没有公共点。两平面的交线是两平面公共点的集合。用其判定点共线。

2．证线共点

例 3．不在同一平面内，两两相交的三条直线必交于一点。

已知：$a\cap b=O$，c与a、b都相交，

且a、b、c不共面

求证：$O\in c$。

证明：反证法，设$O\notin c$，

则令$a\cap c=A$、$b\cap c=B$，

∵ $a\cap b=O$，∴ a、b确定平面α，

∵ $A\in a$，∴ $A\in\alpha$，又$B\in b$ ∴ $B\in\alpha$，

又∵ A、$B\in c$ ∴ $c\subset\alpha$，与a、b、c不共面矛盾，

∴ 假论不成立，原命题成立。

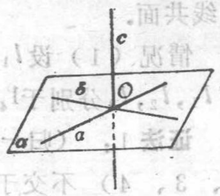


图 1-3

小结：用反证法证题是立体几何中常用的方法，其程序是"反设题断"⟶逻辑矛盾⟶恢复题断。

例 4．两不全等的三角形，不在同一平面内，它们的边两两对应平行，试证三对应点连线必交于一点。

已知：ΔABC与$\Delta A'B'C'$对应边平行（如图）

求证：延长AA′，BB′，CC′后必交于一点，

证明：∵ $AB\parallel A'B'$，AB与A′B′确定平面α，∵ $AB\neq A'B'$，则AA′与BB′延长交于O，同理设BC与B′C′确定平面β，AC与A′C′确定平面γ，可知O在β，γ的交线CC′上，∴ AA′，BB′，CC′延长必交于一点。

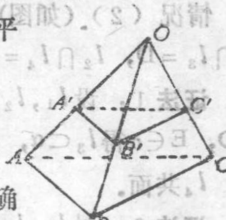


图 1-4

小结：证共点问题常常用到公理3及三个推论确定平面，再用公理2证得该点在交线上，再用公理1证得其它直线都过这一点。

3. 证线共面

例5. 求证两两相交且不共点的四条直线共面.

图 1-5

情况（1）设l_1,l_2,l_3交于点A, l_1,l_2,l_3分别于l_4交于点D、C、P,

证法1：（归一法）∵ l_i (i=1、2、3、4）不交于一点，A∉l_4，过A l_4确定平面α，则B、C、D∈α，由A、B∈α得$l_3\subset\alpha$同理l_1、$l_2\subset\alpha$

∴ l_1、l_2、l_3、l_4共面.

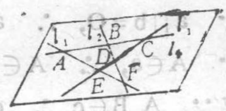


图 1-6

证法2：（重合法）∵ $l_1\cap l_2=A$，过l_1，l_2确定平面α，又∵ $l_3\cap l_4=B$，过l_3、l_4确定平面β，∵ D∈l_1 ∴ D∈α，又∵ C∈l_2 ∴C∈α，又C、D∈l_4 ∴$l_4\subset\alpha$，∴B∈α，又A∈l_3可知α、β为l_3、l_4确定的平面 ∴a与β重合 ∴l_1，l_2，l_3，l_4共面，

情况（2）（如图）$l_1\cap l_2=F$，$l_1\cap l_3=E$，$l_1\cap l_4=A$，$l_2\cap l_3=D$，$l_2\cap l_4=B$，$l_3\cap l_4=C$.

证法1：设l_1，l_2确定平面α，则A，E，F∈α，B，D∈α，由D，E∈α得$l_3\subset\alpha$，由A，B∈α得$l_4\subset\alpha$ ∴l_1，l_2，l_3，l_4共面.

证法2：过l_1、l_2确定平面α.则A，B、D、E、F∈α，过l_2、l_3确定平面β，则B、C、D、E、F∈β，可知α，β为B，E，F确定的平面，α、β重合于α. 由A、B∈α ∴ $l_4\subset\alpha$

∴ l_1、l_2、l_3、l_4共面.

小结：证共面，异面问题是立体几何中一类基本类型题，论证的理论依据是三个公理和公理3的三个推论，证明方法是，"归一法"，"重合法"，证异面时，常用"反证法"，"同一法".

习题精选

（一）选择题

1．三条直线相交于一点，可确定平面的个数为　　（　　）

（A）1个　（B）3个　（C）6个　（D）1或3个

2．空间四点中，如果任意三点都不共线，那么经过其中三点的平面　　（　　）

（A）必定有4个　（B）4个或1个

（C）3个或1个　（D）1个，3个，4个都可能

3．"直线a经过平面β外一点P"用符号表示为　　（　　）

（A）$P\in a$，$a/\!/\beta$　（B）$a\cap\beta=P$

（C）$P\in a$，$P\notin\beta$　（D）$P\in a$，$a\subset\beta$

4．下列说法正确的是　　（　　）

（A）平面α和平面β只有一个公共点．

（B）两两相交的三条直线共面．

（C）不共面的四点中，任何三点不共线．

（D）有三个公共点的两平面必重合．

5．下列判断

（1）空间三点确定一个平面．

（2）四边形必是平面图形．

（3）边长相等的六边形必是平面图形．

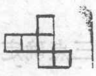
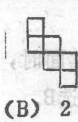
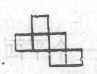
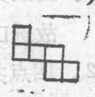
（4）梯形一定是平面图形．

（5）如果一直线与两直线相交，则三直线共面．

（6）空间互不相交三直线必不共面．其中正确判断个数为．　　（　　）

（A）1个　（B）2个　（C）3个　（D）4个

6．正方体各面的展开图个数为　　（　　）

（A）1个　（B）2个　（C）3个　（D）4个

（二）填空题

7．三点可确定＿＿＿＿＿＿个平面；

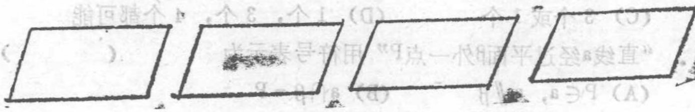
两条直线可确定＿＿＿＿＿＿个平面；

不共面的四点可确定＿＿＿＿＿＿个平面；

共点的三条直线可确定＿＿＿＿＿＿个平面；

不相交的三条直线可确定＿＿＿＿＿＿个平面，

8．（1）三线共面的位置关系可能是



（2）三线两两互相垂直的位置关系，可能是

（三）解答题

9．已知四点不共面，证明它们之中任何三点不共线．逆命题成立吗？

10．若直线$l_1 \parallel l_2 \parallel l_3$，$l$与$l_i$（$i=1，2，3$）相交，求证$l_1$、$l_2$、$l_3$、$l$共面．

11．若ABCD是空间四边形，E、F、G、H分别为AB、BC、CD、DA上的点，若EH与FG相交，则交点在对角线BD上．

12．正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，O_1为上底面的中心，过顶点D_1，B_1，A作一平面，此平面与对角线A_1C交于P点，证明点P在AO_1上．

习题答案

1．三线共面时确定一个平面，三线不共面时确定3个平面（C_3^2），故选D．

2．四点共面时有一个平面，四点不共面时，过任意三点确定一个平面，共有4个平面，（C_4^3）．故选B．

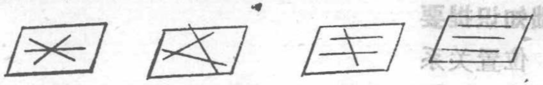
3．C．　4．由公理2知否（A），两两相交的三条直线，共点时可不共面，否B．由公理3知否D，故选C．事实上，如果有三点共线，则四点共面，所以（C）是正确的．

5．由公理3知（1）不正确，四边形中有空间四边形和平面四边形，否（2），（3）也可为空间六边形，由公理3的推论3知（4）正确．一直线与两直线相交可共面也可不共面否（5），共面三平行线互不相交，否（6），因此正确的只有（4），故选A．

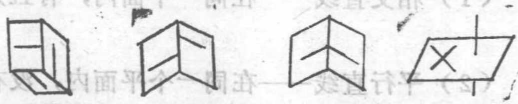
6．都可以拼成正方体，选D．事实上有11种情况．

7．0，1；0，1；4；1，3；0，1，3．

8．1）

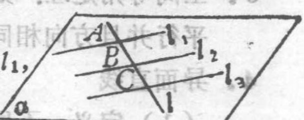


2）



9．略解：反证法，如果三点共线，则四点共面与已知矛盾，所以四点不共面必任何三点不共线．

它的逆命题是四点中，任何三点不共线，则四点不共面．这个命题显然是错误的．如平面四边形四个顶点任何三点不共线，但它们共面．



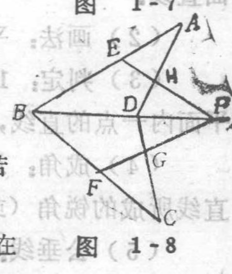
10．设l_1，l_2，l_3与l分别交于A、B、C，过l_1，l_2确定平面α，则A、B$\in\alpha$　∴　$l\in\alpha$，

∴　C$\in\alpha$，过C在平面α内作直线$l_3' \parallel l_1$

∵　$l_3 \cap l = C$，$l_3 \parallel l_1$　∴　l_3'与l_3重合

∴　$l_3 \subset \alpha$　∴　四线共面，

图　1－7



11．过A、B、D和B、C、D分别确定平面α、β交线BD　∵　E、H$\in\alpha$，P$\in$EH，

∴　P$\in\alpha$，同理P$\in\beta$．∴　P$\in$BD．即若EH与FG相交，则交点P在对角线BD上．

12．∵　O_1A在平面A_1C_1CA上　又∵　O_1A在

图　1－8

平面AB_1D_1上 ∴ O_1A为平面A_1C_1CA和平面AB_1D_1的交线，而点P既在平面A_1C_1CA上，又在平面AB_1D_1上，由公理2知P点在AO_1上。

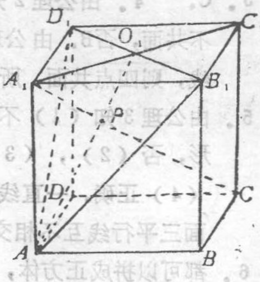


图 1-9

二 空间两条直线

基础知识提要

1．位置关系

（1）相交直线——在同一平面内，有且只有一个公共点；

（2）平行直线——在同一个平面内，没有公共点；

（3）异面直线——不同在任何一个平面内，没有公共点。

2．三线平行公理：平行于同一条直线的两条直线互相平行。

3．空间等角定理：如果一个角两边和另一个角的两边分别平行并且方向相同，那么这两个角相等。

4．异面直线

（1）定义：不同在任何一个平面内的两条直线叫做异面直线。

（2）画法：平面衬托法。

（3）判定：1）定义，2）判定定理：过平面外一点与平面内一点的直线，和平面内不经过该点的直线是异面直线。

（4）成角：过空间任一点，作和两异面直线平行的二直线所成的锐角（或直角），叫做异面直线所成角。

（5）公垂线：和两条异面直线都垂直相交的直线，叫

做两条异面直线的公垂线。

（6）距离：两条异面直线的公垂线，在这两条异面直线间的线段的长度，叫做两条异面直线的距离。

典型题例解

例1．设P为异面直线a，b外一点，那么1）过P与a、b同时平行的直线有____条，2）过P与a、b同时垂直的直线有____条，3）过P与a、b同时相交的直线有____条，4）过P与a、b同时垂直相交的直线有____条，5）过P与a、b同时成α角（若a、b成角也为α）的直线有________条。

解：1）没有。否则由三线平行公理得，a∥b，与a、b异面矛盾。

2）过P作与a、b分别平行的直线a′，b′．a′，b′确定平面α，过P垂直于α的直线只有一条，即过P与a、b同时垂直的直线只有一条。

3）过P、a确定平面α、过P、b确定平面β，如果a、b同时与α、β的交线l相交时，满足条件3）的直线为l只有一条，若a、b中有一条平行于l时，满足条件3）的直线不存在。

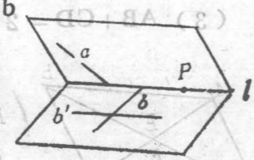


图 1-10

4）若P恰好落在a，b的公垂线上时，满足条件4）的直线就是异面直线的公垂线．若P在a、b公垂线外时，满足条件4）的直线不存在。

5）（1）当$0<\alpha<\frac{\pi}{3}$时，有2条。

（2）当$\alpha=\frac{\pi}{3}$时，有3条。

（3）当$\frac{\pi}{3}<\alpha<\frac{\pi}{2}$时，有4条。

（4）当$\alpha=\frac{\pi}{2}$时，有1条。

例 2．（证异面问题）．空间四边形ABCD中，$AB=AD$，$BC\neq DC$，作$AM\perp BD$于M，$CN\perp BD$于N，则AM与CN异面．

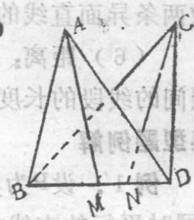


图 1-11

证明： 设A、B、D所确定平面为α，

$\because$ $AB=AD$，$AM\perp BD$ $\therefore$ $BM=DM$，

又$\because$ $BC\neq DC$，$CN\perp BD$

$\therefore$ $BN\neq DN$，$\therefore$ M、N为不同二点 $\because$ $C\notin\alpha$ $N\in\alpha$，$N\notin AM$ $AM\subset\alpha$，由异面直线判定定理知，AM与CN异面．

小结： 证异面直线问题，用异面直线定义、或异面直线判定定理，也常常用到反证法．

例 3．（位置关系）已知空间的两线段AB、CD，若E、F分别为线段BD、AC的中点，根据下列条件，确定线段AB、CD的位置：

（1）E、F重合，（2）$AB+CD>2EF>AB-CD$，

（3）$AB+CD=2EF=AB\sim CD$．

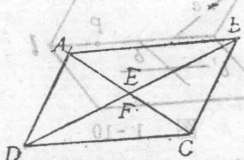


图 1-12

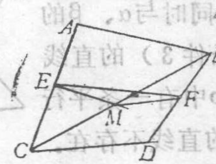


图 1-13

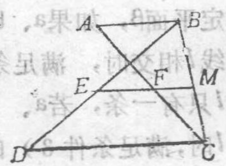


图 1-14

解：（1）当点E和点F重合时，AB、CD共面，且四边形ABCD的对角线互相平分，所以ABCD是平行四边形，故$AB\parallel DC$（图1—12）．

（2）取BC中点M，连ME，MF，EF，则$ME=\frac{1}{2}AB$ $MF=\frac{1}{2}CD$，当E、F、M不在一直线上时，则$ME+MF>EF>ME-MF$，从而$AB+CD>2EF>AB-CD$，此时AB、CD