

清华大学出版社“十二五”规划教材

大学数学

高胜哲 主编

清华大学出版社

013062916

013
567



大学数学

高胜哲 主编



北航

C1670619

清华大学出版社
北京

013
567

内 容 简 介

本书是编者在多年教学实践的基础上,针对高等院校文科类各专业学生的学习需要而编写的大学数学教材,主要内容包括:微积分、线性代数、概率论基础及数学实验四个部分.全书知识面宽,通俗易懂,各部分内容相对独立,使教学有相当的灵活性,又有一定的余地.书中每章都配有适量的习题供读者学习巩固,并在书末对大部分题目给出了答案或提示.

本书既可作为高等院校文科类各专业的大学数学课程的教材,也可作为相关专业的教学参考书和自学用书.

版权所有,侵权必究.侵权举报电话:010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

大学数学/高胜哲主编.--北京:清华大学出版社,2013

ISBN 978-7-302-33069-1

I. ①大… II. ①高… III. ①高等数学—高等学校—教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 150219 号

责任编辑:陈 明 洪 英

封面设计:傅瑞学

责任校对:王淑云

责任印制:何 芊

出版发行:清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址:北京清华大学学研大厦 A 座

邮 编:100084

社 总 机:010-62770175

邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质量反馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 装 者:三河市李旗庄少明印装厂

经 销:全国新华书店

开 本:185mm×230mm

印 张:15.75

字 数:339 千字

版 次:2013 年 8 月第 1 版

印 次:2013 年 8 月第 1 次印刷

印 数:1~3000

定 价:29.80 元

产品编号:049927-01

编写人员

主 编：高胜哲

副主编：高 辉 齐丽岩 张 慧

参 编：冯 驰 张 明

前 言

随着大学数学成为高等院校文科类专业的通识课程,大学数学课程在高等院校文科类专业学生的教育教学中起到越来越重要的作用.

本书包括微积分、线性代数、概率论基础及数学实验 4 个部分,共 12 章.各章都配有适量的习题供读者学习巩固,并在书末对大部分题目给出了答案或提示.本书在编写过程中,充分融合作者多年的教学实践经验,注重介绍基本概念、理论和方法,注重培养学生的数学思维能力,注重提高学生的数学素质,强调对学生的基础知识和基本运算能力训练,注意减少技巧性较强的例题和习题.本书既可作为高等院校文科类专业大学数学课程的教材,也可作为相关专业的教学参考书和自学用书.

本书的编写分工如下:第 1、2 章由冯驰编写,第 3、12 章由张明编写,第 4、5 章由高胜哲编写,第 6、11 章由张慧编写,第 7、8 章由齐丽岩编写,第 9、10 章由高辉编写.最后全书由高胜哲统一修改、统稿、定稿.

大连海洋大学理学院领导,以及张立石教授,赵学达、屈磊磊等老师在本书的编写过程中给予了大量帮助和支持,作者在此表示衷心的感谢.

由于编者水平有限,书中存在的不妥之处敬请读者和同行批评指正.

编 者

2013 年 1 月于大连

目 录

第 1 章 函数与极限	1
1.1 函数	1
1.1.1 函数的定义	1
1.1.2 函数的几种特性	3
1.1.3 反函数与复合函数	4
1.1.4 初等函数	5
1.2 数列的极限	6
1.2.1 数列极限的定义	6
1.2.2 数列极限的性质	8
1.3 函数的极限	9
1.3.1 函数的极限	9
1.3.2 函数极限的性质	13
1.3.3 函数极限的四则运算法则	13
1.3.4 复合函数的极限运算法则	15
1.4 两个重要极限	15
1.4.1 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	15
1.4.2 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$	17
1.5 无穷小量与无穷大量	19
1.5.1 无穷小量与无穷大量	19
1.5.2 无穷小量的性质	21
1.5.3 无穷小的比较	21
1.6 函数的连续性与间断点	23
1.6.1 函数的连续性	23
1.6.2 初等函数的连续性	24
1.6.3 函数的间断点	25
1.7 闭区间上连续函数的性质	27
习题 1	29

第2章 导数与微分	31
2.1 导数概念	31
2.1.1 导数的定义	31
2.1.2 单侧导数	34
2.1.3 导数的几何意义	35
2.1.4 可导与连续的关系	36
2.2 函数的求导法则	37
2.2.1 函数的和、差、积、商的求导法则	37
2.2.2 反函数的导数	38
2.2.3 基本初等函数导数公式	39
2.2.4 复合函数的求导法则	40
2.2.5 隐函数的求导法则	41
2.2.6 参数方程的求导法则	42
2.3 高阶导数	43
2.4 函数的微分	44
2.4.1 微分概念	44
2.4.2 微分的几何意义	46
2.4.3 微分计算	46
习题2	48
第3章 微分中值定理及导数应用	50
3.1 微分中值定理	50
3.1.1 罗尔定理	50
3.1.2 拉格朗日中值定理	51
3.1.3 柯西中值定理	53
3.2 洛必达法则	54
3.3 函数的单调性、极值与最值	57
3.3.1 函数单调性的判别法	57
3.3.2 函数的极值	59
3.3.3 函数的最值	62
3.4 函数的凹凸性及拐点	63
习题3	64
第4章 不定积分	67
4.1 不定积分的概念与性质	67

4.1.1	原函数与不定积分的概念	67
4.1.2	基本积分公式	68
4.1.3	不定积分的性质	69
4.2	换元积分法	71
4.2.1	第一类换元积分法	71
4.2.2	第二类换元积分法	74
4.3	分部积分法	77
习题 4		80
第 5 章 定积分及其应用		82
5.1	定积分的概念与性质	82
5.1.1	定积分问题的实例——曲边梯形的面积	82
5.1.2	定积分的定义	83
5.1.3	定积分的几何意义	84
5.1.4	定积分的性质	85
5.2	定积分的计算	86
5.2.1	微积分基本公式	86
5.2.2	定积分的换元积分法和分部积分法	87
5.3	定积分的几何应用	90
5.3.1	定积分的元素法	91
5.3.2	平面图形的面积	91
5.3.3	旋转体的体积	93
习题 5		95
第 6 章 微分方程		97
6.1	微分方程的基本概念	97
6.2	一阶微分方程	99
6.2.1	可分离变量的微分方程	99
6.2.2	一阶线性微分方程	101
6.3	微分方程的应用	103
6.3.1	几何问题的简单方程模型	103
6.3.2	物理问题的简单方程模型	104
6.3.3	其他问题模型	106
6.4	二阶常系数线性微分方程	108
6.4.1	二阶常系数齐次线性微分方程	109

6.4.2	二阶常系数非齐次线性微分方程	110
习题 6		113
第 7 章 行列式与线性方程组 115		
7.1	行列式的定义	115
7.1.1	二阶行列式与二元线性方程组	115
7.1.2	三阶行列式与三元线性方程组	116
7.1.3	n 阶行列式的定义	119
7.1.4	几个常用的特殊行列式	120
7.2	行列式的性质	121
7.3	克拉默法则	127
习题 7		129
第 8 章 矩阵与线性方程组 131		
8.1	矩阵的概念	131
8.1.1	引例	131
8.1.2	矩阵的概念	132
8.1.3	几种特殊矩阵	133
8.2	矩阵的运算	135
8.2.1	矩阵加法	135
8.2.2	数乘运算	135
8.2.3	矩阵的乘法	136
8.2.4	线性方程组的矩阵表示	137
8.2.5	矩阵的转置	138
8.2.6	方阵的行列式	139
8.3	矩阵的初等变换及初等矩阵	139
8.3.1	矩阵的初等变换	140
8.3.2	初等矩阵	142
8.4	逆矩阵	143
8.4.1	逆矩阵的定义	143
8.4.2	逆矩阵的性质	143
8.4.3	逆矩阵的计算	143
8.4.4	矩阵方程及其解法	147
8.5	矩阵的秩	148
8.5.1	矩阵的秩的定义	148

8.5.2	矩阵的秩的求法	149
8.6	线性方程组的解法	150
	习题 8	154
第 9 章	随机事件与概率	157
9.1	随机事件	157
9.1.1	随机现象	157
9.1.2	随机事件	157
9.1.3	随机事件的关系和运算	158
9.2	概率的定义及其性质	161
9.2.1	频率	161
9.2.2	概率的公理化定义及性质	162
9.3	古典概型	164
9.4	条件概率及条件概率三大公式	168
9.4.1	条件概率	168
9.4.2	乘法公式	169
9.4.3	全概率公式	170
9.5	事件的独立性	173
9.5.1	两个事件的独立性	173
9.5.2	多个事件的独立性	173
	习题 9	174
第 10 章	随机变量及其分布	177
10.1	随机变量	177
10.2	离散型随机变量	178
10.2.1	离散型随机变量及其分布律	178
10.2.2	常用的离散型分布	179
10.3	随机变量的分布函数	181
10.3.1	分布函数的定义	181
10.3.2	分布函数的性质	182
10.3.3	离散型随机变量的分布函数	182
10.4	连续型随机变量	183
10.4.1	连续型随机变量的概率密度函数	183
10.4.2	常用三种连续型随机变量的分布	184
10.5	随机变量的函数的分布	187

10.5.1	离散型随机变量函数的分布	187
10.5.2	连续型随机变量的函数的分布	188
习题 10		190
第 11 章 随机变量的数字特征		192
11.1	数学期望	192
11.1.1	数学期望的概念	192
11.1.2	随机变量函数的数学期望	195
11.1.3	数学期望的性质	197
11.2	方差	197
11.2.1	方差及其计算公式	197
11.2.2	方差的性质	199
习题 11		201
第 12 章 数学实验		203
12.1	函数绘图	203
12.1.1	实验目的	203
12.1.2	实验内容	203
12.2	函数的极限与连续	205
12.2.1	实验目的	205
12.2.2	实验内容	205
12.3	函数的导数与微分	207
12.3.1	实验目的	207
12.3.2	实验内容	207
12.4	不定积分与定积分	211
12.4.1	实验目的	211
12.4.2	实验内容	211
12.5	常微分方程	214
12.5.1	实验目的	214
12.5.2	实验内容	214
12.6	矩阵的输入	215
12.6.1	实验目的	215
12.6.2	实验内容	216
12.7	矩阵的运算	218
12.7.1	实验目的	218

12.7.2 实验内容·····	218
12.8 行列式与线性方程组的求解·····	221
12.8.1 实验目的·····	221
12.8.2 实验内容·····	221
部分习题参考答案·····	224
附录 A 预备知识·····	235
附录 B 标准正态分布函数值表·····	237
参考文献·····	238

第 1 章 函数与极限

微积分学是以函数为研究对象的一门科学. 所谓函数关系就是变量之间的依赖关系, 而极限方法是研究函数的一种基本方法, 它是学习微分学、积分学的基础. 本章将介绍函数、函数极限和函数连续等基本概念以及它们的一些性质.

1.1 函 数

1.1.1 函数的定义

我们在研究一些生产、生活的实际问题或自然现象的过程中, 经常发现这些过程所涉及的变量并不是独立变化的, 而是需要考虑两个彼此相互依赖、有关联的变量. 我们考察如下两个例子.

例 1.1.1 等腰直角三角形的面积 s 与其直角边的边长 x 的关系为

$$s = \frac{1}{2}x^2, \quad x \in (0, +\infty).$$

可见等腰直角三角形的面积随着边长的变化而变化.

例 1.1.2 据统计, 20 世纪 60 年代世界人口增长情况如表 1-1 所示.

表 1-1

年份 t	1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968
人口 n /百万	2972	3061	3151	3213	3234	3285	3356	3420	3483

显然, 随着年份 t 的推移, 世界人口数 n 在不断增长.

从以上的例子我们看到, 它们所描述的问题虽各不相同, 但却有共同的特征:

- (1) 每个问题中都有两个变量, 它们之间不是彼此孤立的, 而是相互联系、相互制约的;
- (2) 当一个变量在它的变化范围中任意取定一个数值时, 另一个变量按一定的法则存在一定值与之相对应.

具有这两个特征的变量之间的依存关系, 我们称为函数关系. 下面给出函数的定义.

定义 1.1.1 设两个变量 x 和 y , 当变量 x 在一给定的数集 D 中任意取一个值时, 变量 y 按照一定的法则 f 总有确定的数值与之对应, 则称 y 是 x 的函数, 记作 $y=f(x)$. 其中, x 叫作自变量, y 叫作因变量或函数. 数集 D 叫作这个函数的定义域, 记作 D_f , 即 $D_f=D$.

例 1.1.1、例 1.1.2 的定义域分别为: $D_f=(0, +\infty)$, $D_f=\{x|1960 \leq x \leq 1968, x \in \mathbf{N}\}$.

函数值 $f(x)$ 的全体所构成的集合称为函数的值域, 记作 R_f 或 $f(D)$, 即

$$R_f = f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}.$$

除了常用 f 表示函数的记号外, 还可以用“ g ”、“ F ”等英文字母或“ φ ”等希腊字母表示.

由函数的定义可知, 构成函数的两个基本要素为定义域 D 和对应法则 f . 如果两个函数的定义域和对应法则都相同, 则为同一函数, 否则就是不同的. 例如, $f(x)=1$ 与 $g(x)=\sin^2 x + \cos^2 x$ 是同一函数, 而 $f(x)=x$ 与 $g(x)=\sqrt{x^2}$ 就不是同一函数了.

函数的定义域通常按以下两种情形来确定: 一种是在实际问题中, 根据实际意义确定. 例如, 在圆的面积 s 与半径 r 的函数关系中, $s=\pi r^2$, 定义域为 $r>0$, 因为 $r\leq 0$ 时不再有实际意义; 另一种是对抽象地用算式表达的函数, 通常约定这种函数的定义域是使得算式有意义的一切实数组成的集合. 例如, 函数 $y=\sqrt{9-x^2}$ 的定义域为 $[-3, 3]$, 函数 $y=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ 的定义域为 $(-2, 2)$, 这种定义域称为函数的自然定义域.

函数的表示方法主要有 3 种: 解析法(如例 1.1.1)、表格法(如例 1.1.2)、图像法.

点集 $P=\{(x, y) \mid y=f(x), x \in D\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的图形, 如图 1-1 所示.

函数的 3 种表示法各有其特点, 表格法和图像法直观明了, 解析法易于运算. 在处理实际问题时这几种表示方法可以结合使用.

在用解析法表示函数时, 有些函数在其定义域的不同部分, 其表达式不同, 即用多个解析式表示一个函数, 这类函数称为分段函数.

例 1.1.3 函数

$$y = f(x) = \begin{cases} 3\sqrt{x}, & 0 \leq x < 1 \\ 1+x, & 1 \leq x < 2 \\ x^2 + 6x - 5, & 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

是一个分段函数. 它的定义域 $D=[0, 4]$. 当 $x \in [0, 1)$ 时, 对应的函数式 $f(x)=3\sqrt{x}$; 当 $x \in [1, 2)$ 时, 对应的函数式 $f(x)=1+x$; 当 $x \in [2, 4]$ 时, 对应的函数式 $f(x)=x^2+6x-5$. $x=\frac{1}{4} \in [0, 1)$, 则 $f\left(\frac{1}{4}\right)=3\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{3}{2}$.

例 1.1.4 符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

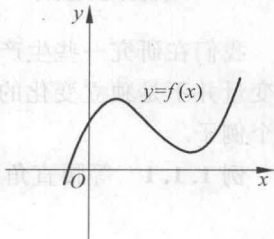


图 1-1

显然函数的定义域 $D=(-\infty, +\infty)$, 值域 $R_f=\{-1, 0, 1\}$, 如图 1-2 所示.

例 1.1.5 取整函数 $y=[x]$, 其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, x 为任一实数, $y=[x]=n, n \leq x < n+1, n=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, 如图 1-3 所示.

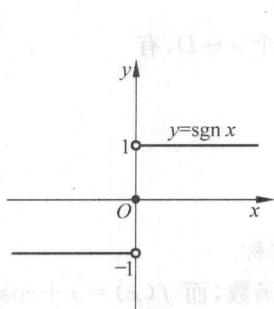


图 1-2

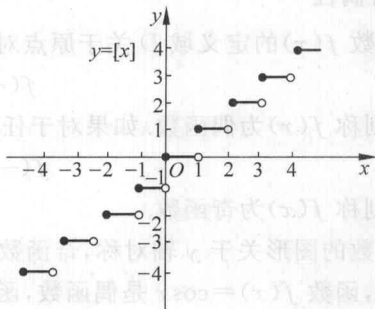


图 1-3

1.1.2 函数的几种特性

1. 单调性

设 I 为函数 $f(x)$ 的定义域内的一个区间. 如果对于 I 上任意两点 x_1 及 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有

$$f(x_1) < f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加的, 如图 1-4 所示; 反之, 如果对于区间 I 上任意两点 x_1 及 x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 恒有

$$f(x_1) > f(x_2),$$

那么就称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调减少的, 如图 1-5 所示. 单调增加和单调减少的函数统称为单调函数, 区间 I 称为单调区间.

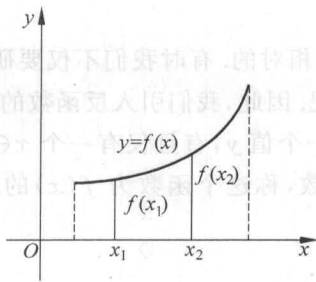


图 1-4

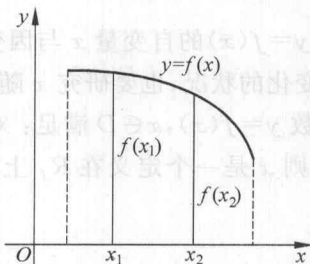


图 1-5

例如,函数 $y=x^3$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上是单调增加的;函数 $y=\frac{1}{x}$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上是单调减少的,在区间 $(-\infty, 0)$ 上是单调减少的,而在其整个定义域上却不是单调的.

2. 奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称. 如果对于任一个 $x \in D$, 有

$$f(-x) = f(x)$$

恒成立,则称 $f(x)$ 为偶函数. 如果对于任一 $x \in D$, 有

$$f(-x) = -f(x)$$

恒成立,则称 $f(x)$ 为奇函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称,奇函数的图形关于原点对称.

例如,函数 $f(x)=\cos x$ 是偶函数,函数 $f(x)=x$ 是奇函数,而 $f(x)=x+\cos x$ 既非奇函数,也非偶函数.

3. 周期性

设函数的定义域为 D , 如果存在一个不为零的正数 T , 使得对于任一个 $x \in D$, 有 $(x \pm T) \in D$, 且 $f(x \pm T) = f(x)$ 恒成立,则称函数 $f(x)$ 为周期函数, T 称为 $f(x)$ 的周期, 通常我们说周期函数的周期是指最小正周期.

例如,函数 $f(x)=\sin x$ 的周期为 2π .

4. 有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 如果存在正数 M , 使得对任一个 $x \in D$ 有

$$|f(x)| \leq M,$$

则称函数 $f(x)$ 在 D 上有界. 如果这样的 M 不存在,则称 $f(x)$ 在 D 上无界.

根据定义可知,有界函数的几何意义是: 函数 $f(x)$ 的图形完全落在直线 $y=M$ 与 $y=-M$ 之间. 例如,在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上, $f(x)=\sin x$ 是有界函数.

1.1.3 反函数与复合函数

函数 $y=f(x)$ 的自变量 x 与因变量 y 的关系往往是相对的. 有时我们不仅要研究 y 随 x 变化而变化的状况,也要研究 x 随 y 变化而变化的状况. 因此,我们引入反函数的概念.

设函数 $y=f(x)$, $x \in D$ 满足: 对于值域 R_f 中的每一个值 y , 有且仅有一个 $x \in D$ 满足 $y=f(x)$, 则 x 是一个定义在 R_f 上以 y 为自变量的函数, 称这个函数为 $f(x)$ 的反函数, 记作

$$x = f^{-1}(y), \quad y \in R_f.$$

在反函数的表达式中,是以 y 为自变量, x 为因变量的. 通常按习惯仍然用 x 作为自变量, y 作为因变量, 因此函数 $f(x)$ 的反函数也可以记作

$$y = f^{-1}(x), \quad x \in R_f.$$

例如, 函数 $y=x^3, x \in \mathbf{R}$ 与函数 $x=y^{\frac{1}{3}}, y \in \mathbf{R}$ 互为反函数.

在同一坐标平面上, 反函数 $y=f^{-1}(x)$ 与它的原函数 $y=f(x)$ 的图形是关于直线 $y=x$ 对称的. 而且, 若原函数 $y=f(x)$ 在定义域 D 上是单调的, 则反函数 $y=f^{-1}(x)$ 在定义域 R_f 上也是单调的.

设函数 $y=f(u), u \in D_f$, 函数 $u=g(x), x \in D_g$, 如果 $D_f \cap R_g \neq \emptyset$, 则由下式确定的函数

$$y=f[g(x)], x \in \{x \mid g(x) \in D_f\}$$

称为由函数 $u=g(x)$ 和函数 $y=f(u)$ 构成的复合函数, 变量 u 称为中间变量.

不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的. 例如, 函数 $y=\arcsin u$ 与 $u=2+x^2$ 复合成 $y=\arcsin(2+x^2)$, 但无意义. 另外, 复合函数可以由两个以上的函数经过复合构成.

如函数 $y=\sqrt[3]{\sin^2 \frac{x}{2}}$ 是由 $y=\sqrt[3]{u}, u=v^2, v=\sin w, w=\frac{x}{2}$ 复合而成.

1.1.4 初等函数

初等函数是我们研究的各类问题中最常见的函数, 是高等数学最主要的研究对象.

我们把常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数这 6 类函数统称为基本初等函数.

(1) 常值函数: $y=C, C$ 为常数;

(2) 幂函数: $y=x^\mu$ (其中 μ 为任意实常数);

(3) 指数函数: $y=a^x (a>0 \text{ 且 } a \neq 1)$;

在实际中, 常使用以 e 为底的指数函数 $y=e^x$, 其中 $e=2.71828\cdots$ 是一个无理数;

(4) 对数函数: $y=\log_a x (a>0 \text{ 且 } a \neq 1)$;

高等数学中经常会遇到以 e 为底的对数函数, 这种对数函数称为自然对数函数, 记作 $y=\ln x$;

(5) 三角函数: 如 $y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$;

(6) 反三角函数: 如 $y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$.

定义 1.1.2 由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合所得到的并可用一个解析式表示的函数, 称为初等函数.

例如, 函数

$$y=\sin^2(3x+1), \quad y=\sqrt{x^2+1}, \quad y=\frac{\lg x + \sqrt[3]{x} + 2\tan x}{10^x - x + 9}$$

等都是初等函数.

特别地, 我们称形如 $u(x)^{v(x)}$ 的函数为幂指函数.