线性代数

王友梧　主编/戴天时　编写

吉林大学出版社

线 性 代 数

王友梧 主编/戴天时 编写

吉 林 大 学 出 版 社

线 性 代 数

王友梧 主编
戴天时 编写

吉林大学出版社出版　　吉林大学出版社发行
（长春市解放大路85号）　　吉林工业大学印刷厂印刷

开本：787×1092毫米1/32　　1990年7月第1版
印张：6　　1990年7月第1次印刷
字数：131千字　　印数：1—4 000册

ISBN 7—5601—0536—X/O·62　　定价：2.10元

前　　言

教材是学生获取知识、培养能力所不可缺少的工具。中外古今的教育家都十分重视教材建设，出现了许多影响深远的优秀教材。四十年来，我国教育领导部门曾多次制订各类教学大纲，组织编写出版全国通用教材，为提高教学质量起了积极作用。近年来，随着教育事业的发展，一些学校也先后出版了不少教材。我们认为，为了适应教学改革，在大体遵循现行的各类课程教学基本要求的基础上，各高等学校根据自己的教学需要，总结多年的教学经验，编写一些各有特色的教材，是很有必要的。

为了更好地适应新形势下的教学需要，吉林工业大学应用数学系于1988年秋成立了以董加礼教授为组长、以王友梧教授为主编的工科数学基础课教材编写组。参加编写的同志及具体分工为：

高文森、李凤琴：高等数学（上册）

冯鹏起、曹尔璞、王友梧：高等数学（下册）

高仪新、赵忠柏：高等数学习题课讲义

戴天时：线性代数

李凤琴、高文森：概率统计

这套教材以全国高等学校工科数学教学指导委员会制订的教学基本要求为依据，以我校过去编写出版的教材为基础，吸取国内外同类教材精华，贯彻基础扎实、方法适用的

原则，力争做到科学性、系统性与可行性的统一，以利于对学生能力的培养。各本教材由编写者分头执笔形成初稿，由主编进行认真推敲，提出修改意见后，再由编者进行改写。反复几次，最后由主编王友梧教授统编定稿。

这本《线性代数》就是这套教材中的一本。它的内容包括：行列式、矩阵与向量、线性方程组、矩阵的相似对角化和二次型。本书以矩阵为主线，重视了初等变换和向量组的线性相关性。在叙述上力求简炼通俗、由浅入深、直截了当，在循序渐进原则下，尽量使相关的内容集中在一起。对某些证明烦冗或有一定难度的定理，有的略去了证明，有的用仿宋体字排印了证明，仅供参考选用。各章后配备了一定数量的习题，以帮助读者掌握基本理论和基本方法。书后附有计算题的答案及部分证明题的简要解答或提示，供参考。

在这套教材的编写和出版过程中，得到了吉林工业大学教务处、财务处、印刷厂的大力支持。对此，教材编写组和应用数学系谨向他们表示衷心的感谢。

限于我们的业务水平和教学经验，书中可能会有不少缺点，甚至错误，敬请使用本书的兄弟院校同行和广大读者给予批评指正。

吉林工业大学应用数学系

1990年5月

目　　录

第一章 行列式

行列式是一种常用的数学工具，在教学本身和其它应用学科以及工程技术中，均有广泛的应用. 本章主要介绍 n 阶行列式的概念、性质、计算方法以及解线性方程组的克莱姆法则. 为研究行列式理论的需要，还将介绍有关排列的一些知识.

第一节 排 列

前 n 个自然数 1，2，…，n 可以按照任何一种次序排成一列. 例如前三个自然数就可以排成如下不同次序的数列：

123，132，213，231，312，321

定义 1 前 n 个自然数 1，2，…，n 的每一种有次序的排列称为一个 **n 级排列**，也可简称为一个**排列**.

两个 n 级排列，只要有某一个对应位置的数字不同，就视为不同的排列. 由此易知，所有不同的 n 级排列的总数必为 $n!$ 个. 这是因为，第一个位置可以从 n 个数字中任取一个来排，共有 n 种排法. 而对于这 n 种的每一种，其余位置尚可由余下的 $n-1$ 个数任意排列. 此时，第二个位置尚有 $n-1$ 种不同的排法. 同样，对于前两个位置的 $n(n-1)$ 种不同排法的每一种，第三个位置尚有 $n-2$ 种不同的排法. 如此继续下

去，到最后一个位置，只剩下一个数字，只有一种排法．故一共有 $n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1=n!$ 种不同的排法，从而产生 $n!$ 种不同的 n 级排列．

n 级排列 $123\cdots n$ 称为**顺序排列**或**标准排列**．异于顺序排列的任何一个排列中都会出现数字大小次序的颠倒．在一个排列中，任何两个数之间，如果有大数排在小数之前的情况发生，就说出现了一个**逆序**．一个排列中所有逆序的总个数称为该排列的**逆序数**．

排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数记为 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$．

逆序数为奇数的排列叫做**奇排列**，逆序数为偶数的排列叫做**偶排列**．

例 判定 5 级排列31542的奇偶性．

解 先求排列的逆序数．对于排在首位的数字 3，它后面比它小的数共有 2 个，故产生 2 个逆序；排在第二位的数字 1 后面没有比它小的数，故不产生逆序；排在第三位的数字 5 后面有 2 个数比它小，故产生 2 个逆序；排在倒数第二位的数字 4 后面有 1 个数比它小，故产生 1 个逆序．于是

$$\tau(31542)=2+0+2+1=5$$

可见31542是一个奇排列．

定义 2 把一个排列中某两个位置的数字互换，称为对排列的一次**对换**．特别地，相邻位置上的两个数字互换，称为一次**邻换**．

引理 一次邻换改变排列的奇偶性．

证 设排列 $p_1\cdots p_s ijq_1\cdots q_t$ 经一次邻换化为 $p_1\cdots p_s jiq_1\cdots q_t$．注意到对于邻换前后的两个排列，$p_1$，…，$p_s$，$q_1$，…，$q_t$ 各数字相互位置以及它们分别与 i 或 j 的相互位置并无

改变，因而逆序数的产生没有变化，只是由于i，j相互调换位置而使逆序数增1或减1，最终导致了前后两排列奇偶性的不同.

定理1 一次对换必改变排列的奇偶性.

证 设排列

$$p_1\cdots p_s i r_1\cdots r_m j q_1\cdots q_t \quad (1)$$

经一次对换化为排列

$$p_1\cdots p_s j r_1\cdots r_m i q_1\cdots q_t \quad (2)$$

据引理，只要证明由（1）到（2）的变化可以经过奇数次邻换实现就可以了.

事实上，由（1）开始，将数字i依次向右做邻换，经$m+1$次可得排列

$$p_1\cdots p_s r_1\cdots r_m j i q_1\cdots q_t$$

接着对这个排列，将数字j依次向左做邻换，再经m次必可化为排列（2）. 总之，（1）可经$2m+1$次邻换变为(2)，而$2m+1$是个奇数.

最后，我们要说明一点：本节所说的排列是前n个自然数的有序排列. 但它完全可以推广到任意n个不同的元素上去. 因为只要把这n个元素事先编号为1，2，…，n也就相当于前n个自然数了.

第二节 n阶行列式的定义与性质

在初等数学中，我们已经对二、三阶行列式有所了解. 通常分别称

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

为二阶和三阶的行列式．它们的值可以按“对角线法则”展成的表达式计算出来：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

本节将讨论一般的n阶行列式．

定义 3 对于自然数n，n^2个数$a_{ij}(i, j=1, 2, \cdots, n)$排成的如下形式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (3)$$

称为一个n阶行列式．“|　|”是行列式的记号．行列式中每个横排称为一行，每个竖排称为一列，数a_{ij}称为第i行第

j列的**元素**，i和j分别称为a_{ij}的**行标**和**列标**.

n阶行列式的值应如何定义呢？首先应该指出，对二、三阶行列式适用的"对角线法则"并不是计算行列式值的本质性规律，也就是说，在前面给出的二、三阶行列式值的表达式中还隐涵着某种一般规律. 譬如对三阶行列式，它的值是$3!=6$项的代数和，而每一项都是该行列式中取自不同行又不同列的3个元素的乘积，并且每一个这样的乘积项前还有一个符号因子，符号因子的正负由该乘积项诸元素在行列式中的位置所决定. 细心地总结这些规律并推广到n阶行列式上去，就得到n阶行列式值的定义.

定义 4 n阶行列式(3)中取自不同行又不同列的n个元素的乘积$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_n}a_{j_n}$称为一个**均匀分布乘积项**，简称**均布项**.

显然，n阶行列式中n个元素之积$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$构成均布项的充要条件是$i_1i_2\cdots i_n$及$j_1j_2\cdots j_n$都是$n$级排列.

对于均布项$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$，我们称排列$i_1i_2\cdots i_n$为它的**行标排列**，$j_1j_2\cdots j_n$为它的**列标排列**.

例 1 在三阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

中，$2(-2)4$是一个均布项. 它的行标排列为132，列标排列为231.

一个均布项中诸元素互换位置得到的所有均布项视为同一个均布项. 譬如例1中的均布项也可表为$4(-2)2$，$(-2)4\cdot 2$等.

两个均布项中只要有某一行的元素属于不同列，这两个均布项必是不同的．那么，n 阶行列式中到底有多少个不同的均布项呢？不妨设每一个均布项的行标排列都是顺序排列．于是每一个不同的列标排列都决定一个不同的均布项．由于n级排列共有$n!$种，因此，n阶行列式共有$n!$个不同的均布项．

定义 5　n阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{4}$$

的值定义为

$$D=\sum(-1)^{\tau_1+\tau_2}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n} \tag{5}$$

这里$\sum$表示对D中所有$n!$个不同的均布项取和．其中$\tau_1=\tau(i_1i_2\cdots i_n)$，$\tau_2=\tau(j_1j_2\cdots j_n)$，$(-1)^{\tau_1+\tau_2}$称为均布项$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$的**符号因子**．

需要指出，同一均布项的不同写法不会改变该项的符号因子．这是因为，一个均布项的符号因子实际上取决于它的行标排列和列标排列的奇偶性是否相同，相同时为$+1$，不同时为-1．而一个均布项的所有不同写法都不过是各元素相互位置的调换．这一过程使行标排列和列标排列对应地经过了相同次对换，两个排列奇偶性的异同始终不变．

按定义 5，一阶行列式$|a|$的值就是a，对于二、三阶行列式，按（5）式算出的行列式值与按“对角线法则”算出的行列式值是一样的，但对于高于三阶的行列式，按“对角线法则”得到的乘积项项数与和式（5）中包含的均布项项

数相比要少许多，因而“对角线法则”不再适用.

由于一个均布项中各元素相互次序可以任意排布，当我们约定所有均布项的行标排列都取顺序排列时，定义5中的（5）式便成为

$$D=\sum(-1)^{\tau_2}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{6}$$

其中$\tau_2=\tau(j_1j_2\cdots j_n)$.

同样,如约定每个均布项的列标排列都取顺序排列,便有

$$D=\sum(-1)^{\tau_1}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn} \tag{7}$$

其中$\tau_1=\tau(i_1i_2\cdots i_n)$.

例2 计算对角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{vmatrix}$$

的值（行列式中空白位置的元素均为0）.

解 按定义5，D中除$a_1a_2\cdots a_n$外的所有均布项至少有一个零元素作为因子. 所以

$$\begin{aligned} D&=(-1)^{\tau(12\cdots n)+\tau(12\cdots n)}a_1a_2\cdots a_n \\ &=a_1a_2\cdots a_n \end{aligned}$$

例3 证明上三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$a_{11}\ a\ 0\ \cdots\ 0$
$a_{21}\ a_{22}\ 0\ \cdots\ 0$
$a_{31}\ a_{32}\ a_{33}\ 0\ \cdots\ 0$
$a_{n1}\ a_{n2}\ \cdots\cdots\ a_{nn}.$

的值为$D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

证 在所有均布项中，只要第1列的元素不是 a_{11}，则相应均布项值必为0．当第1列取定 a_{11} 后，第1行就不能再有元素参加均布项，而第2列除 a_{12}、a_{22} 外的任何元素参与的均布项值都是0，于是只需考虑第2列取 a_{22} 构成的均布项．同样，第3列只能取 a_{33}，…．直到第 n 列取 a_{nn}．总之，除 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 外的所有均布项值都为0，因此

$$D=(-1)^{\tau(12\cdots n)+\tau(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

根据行列式值的定义，容易知道如下事实：如果行列式某行（或某列）的元素全都是0，则行列式的值必为0．

对于（4）式表明的行列式 D，把它的行、列地位互相调换而得到的行列式

$$D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & n_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (8)$$

称为 D 的**转置行列式**．我们看到，在 D 中处于 i 行 j 列位置的元素，在 D' 中恰处在 j 行 i 列位置上．

在初等数学中，我们已经知道了二、三阶行列式的若干性质．依照 n 阶行列式值的定义可以证明 n 阶行列式亦有类似的性质．

性质1 行列式转置，其值不变．

证 设转置前后的行列式 D 与 D' 如（4）、（8）所示．按定义5，D 与 D' 的值都是 $n!$ 项的代数和．任取 D 中一个均布项 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$，它恰是 D' 中一个均布项．并且由于该项在 D 中的行标排列就是它在 D' 中的列标排列；它

在D中的列标排列就是它在D'中的行标排列. 因此，该项在D中和D'中的符号因子相同. 因为$n!$项可以一一对应相等，所以它们的和亦相等，即有$D'=D$.

由性质 1 可知：对于行列式的行的每一个论断对于列亦必然成立. 因此，以下各条性质我们仅就行的情形加以证明.

性质 2 行列式某行（列）元素遍乘数k，则行列式的值亦随之k倍.

证 设行列式D的第i行元素遍乘数k后得到的行列式为D_1，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{i1} & a_{i2} \cdots a_{in} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} \cdots ka_{in} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

对于D的任何一个均布项$a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n}$，$D_1$中相应位置元素必构成$D_1$的一个均布项$a_{1j_1}\cdots(ka_{ij_i})\cdots a_{nj_n}$，二者具有相同的符号因子，但后者在数值上是前者的$k$倍. 由于$D$与$D_1$中所有均布项可以这样一一对应起来，故有$D_1=kD$.

推论 行列式某行（列）所有元素的公因数可以提到行列式记号的外面来.

根据行列式值的定义，还可以证明行列式的其它性质. 下面只把这些性质的结果叙述出来，证明请读者自己去完成.

性质 3 行列式具有分行（列）可加性. 即有

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
+\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

以及

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1i}+b_{1i} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & \cdots & a_{2i}+b_{2i} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & \cdots & a_{ni}+b_{ni} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
+\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & b_{1i} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & \cdots & b_{2i} & \cdots & a_{2n} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & \cdots & b_{ni} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

性质4 行列式任意两行（列）互换，行列式的值变号．

推论 如果行列式有两行（列）完全相同，则行列式值为0．

由此推论及性质2的推论立得：

性质5 行列式中有两行成比例时，行列的值为0．

例如