湍流空间位置特征长度理论

THE THEORY OF TURBULENT CHARACTERISTIC LENGT IN SPACE SITE

暨朝颂著

北京科技大学

2013 年 3 月・北京

湍流空间位置特征长度理论

THE THEORY OF TURBULENT CHARACTERISTIC LENGT IN SPACE SITE

暨朝颂著

北京科技大学

2013年3月·北京

脚踏实地，开拓进取，批判谬误，探求真理。

科学进步，是人类创造性劳动的产物，是改造与认识世界的智慧结晶。

主观臆造，是对科学进步的反动。

提倡创新，破除陈腐观念。

—洞溪居士

前言

一个世纪以来，关于混合长度理论与管流速度分布公式都是按照普朗特和卡门的理论来论述的，曾也有人发现其中有点问题，试图进行修改。但由于理念未改，千方百计维护这两位大师的观点，整个流体力学界（国内外）谁都不敢挑战他们。其实大师们的错误是显而易见的，都是属于物理概念与数学方法上的错误。但人们却视若网闻，更有甚者，顺势提出了更多的错误观点，泛滥整个流体力学之中。针对这种情况，萌发了彻底修改他们的理论、定义和公式，包括批判文献中出现的形形色色的“修改”的念头，建立起完善的、经得起推敲的理论。经过五十多年的研究，将其中有代表性的六篇文章汇集成册：

1、湍流空间位置特征长度理论。该理论是根据流体微团在空间位置中的可测（实测）参量，应用函数概念和量纲分析法，揭示并确立了脉动速度、时均速度与空间位置坐标的依从关系。定义严谨，涵义确切。既有理论根据，又有实践基础。求解雷诺湍流微分方程，得出了雷诺应力的结构方程，用来修正特征长度理论在湍流核心区中的雷诺应力公式。用它可分别推导湍流核心区与湍流边界层区域中的流速分布函数。

2、关于普朗特混合长度理论的分析。应用分子运动理论，证明普朗特混合长度理论的立论根据是错误的，造成混合长度定义的前后矛盾，最终定义（微团的坐标）与当初假设（微团的‘自由程’）之间，其物理涵义互不相关，严重违反了相似原理，是一种主观杜撰出来的理论。导出来的公式又未能正确修改，存在着结构性的错误。同时列举了有代表性的例子，详细分析了混合长度理论的具体错误。最后得出结论：该理论从立论到得出对数率都是错误的，在科学上没有意义。

3、关于卡门理论及其公式的分析。详细分析了卡门流速分布公式的推导过程，他是根据相似原理建立的理论，虽形式上采用了普朗特的雷诺应力公式，但物理意义则不相同。其错误之一在于积分时，将流速坡度设定为无穷大值，故其流速分布公式是错误的；其原理上的错误在于建立理论时，将混合长度与雷诺应力都用待求的流速分布函数的导函数来定义，形成了一个“自环”无解的错误理论。

4、管流中湍流速度分布函数。应用作者的“湍流空间位置特征长度理论”和管流中雷诺应力结构方程，建立了管流中湍流速度分布函数。该分布函数不仅能确定管流中的速度分布，而且还能为管道的流量控制测量和管道摩擦阻力系数的测定提供了全新的原理与简易的方法，为矿山巷道通风过程的数学模型的建立提供了可靠的理论基础，为管流动能系数的确定提供了计算方法。同时，应用特征长度理论，建立了湍流边界层区域的总切应力公式和速度分布函数。

5、巷道通风过程的数学模型。本文用作者的湍流特征长度理论——管流中湍流速度分布函数，建立了巷道通风过程的数学模型，并用前人的工业实验公式进行了论证，可用来计算贯通巷道型采场，独头巷道的压入式、抽出式和混合式的风量计算。

6、关于沃洛宁矿井通风基础理论问题的剖析。应用特征长度理论，从沃洛宁的湍流微分方程的表达、湍流微分方程的求解和他的巷道中风流速度分布函数应用的评价等三个方面，对沃洛宁 1951 年创立的矿井通风基础理论的错误进行了全面的剖析。

作者暨朝颂 2013 年 3 月于北京

作者简介：湖南浏阳人，1928 年生，北京科技大学教授，从事矿内气体动力学、流体力学、矿山环境工程的教学科研。

目 录

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

湍流空间位置特征长度理论

暨朝颂

（北京科技大学，北京 100083）

［摘要］该理论是根据流体微团在空间位置中的可测（实测）参量，应用函数概念和量纲分析法，揭示并确立了脉动速度、时均速度与空间位置坐标的依从关系。定义严谨，涵义确切。既有理论根据，又有实践基础。求解雷诺湍流微分方程，得出了雷诺应力的结构方程，用来修正特征长度理论在湍流核心区中的雷诺应力公式。用它可分别推导湍流核心区与湍流边界层区域中的流速分布函数。

［关键词］空间位置特征长度；雷诺应力结构；比直径。

［中图分类号］O357.5

1. 空间位置特征长度理论的建立

在稳定完全发展的管流中，湍流流体微团的时均速度$\bar{u}$，及其轴向与径向脉动速度乘积的时均值$\overline{u'v'}$，两者都取决于**该微团所处空间位置的坐标**y，它们之间存在确定的对应关系（参见图 1 和图 2），即$F(y)$与$\phi(\bar{u})$、$\varphi(\overline{u'v'})$互为反函数，且都是单调函数 ：在湍流边界层中为常增函数，在湍流核心区中为常减函数。其中，$\bar{u}=F(y)$，故$\frac{d\bar{u}}{dy}=F'(y)$；$y=\varphi(\overline{u'v'})$，故$\frac{d\bar{u}}{dy}=F'[\varphi(\overline{u'v'})]$。显然，$\overline{u'v'}$是$y$和$\frac{d\bar{u}}{dy}$的函数：

$$\overline{u'v'}=f\left(y,\frac{d\bar{u}}{dy}\right) \tag{1a}$$

应用量纲分析方法得出：

$$\overline{u'v'}=K(y)^x\left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)^z \tag{1b}$$

式中K——无量纲比例系数；x，z——未知指数。列出量纲方程式：

$$L^2T^{-2}=L^x\left(\frac{1}{T}\right)^z \tag{1c}$$

上式两侧具有相同的量纲，故有$x=2,z=2$。由此得出下面的公式：

$$\overline{u'v'}=Ky^2\left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)^2 \tag{1}$$

因u'与v'的符号相反，故上式应修改为：

$$-\overline{u'v'}=Ky^2\left(\frac{d\bar{u}}{dy}\right)^2 \tag{2}$$

式中 $Ky^2=(ky)^2=l_m^2$，l_m 称为湍流空间位置特征长度：

$$l_m = ky \tag{3}$$

式中 k —实验系数，无量纲。根据雪伏列夫的实验证明[1,2]：

$$k=\frac{0.337}{\left(\dfrac{d_0}{1000}\right)^{0.08}}=\frac{0.337}{d^{0.08}} \tag{4}$$

式中 d_0—管道的内直径，mm；1000 代表 1000mm；d —比直径，无量纲的直径。

公式（2）两侧乘以流体的密度 ρ，则得出雷诺应力公式：

$$\tau=-\rho\overline{u'v'}=\rho l_m^2\left(\frac{d\overline{u}}{dy}\right)^2 \tag{5}$$

由图 2 可以看出：在湍流边界层中，（5）式的起点和倾向都是正确的，但其斜率太小，需根据实际情况加以修正。该层区域中的分子粘性应力不能忽略，故（5）式的右侧需增加一项分子粘性应力，此时的 τ 表示湍流边界层的总切应力；在湍流核心区，分子粘性应力可忽略不计，（5）式适合用来研究雷诺应力。但又由于切应力的结构反转，雷诺应力随 y 值的增大而减小，故必须用下面的方法加以修正。

2．湍流核心区中雷诺应力公式的修正

由于管道中为稳定完全发展的湍流，流速分量为（$\overline{u}$，$\overline{v}$，$\overline{w}$）、柱坐标为（x，r，θ）的雷诺湍流微分方程可简化为[2]

$$\frac{\partial\overline{p}}{\partial x}=-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\rho\overline{u'v'}\right)+\mu\left(\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\overline{u}}{\partial r}\right),\qquad \frac{\partial\overline{p}}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\rho\overline{v'^2}\right)+\rho\frac{\overline{w'^2}}{r} \tag{6}$$

式中 ρ、μ、p —流体的密度、动力粘性和静压力；u'、v'、w' —脉动速度。

公式（6）的第一个方程对 r 积分，得

$$\frac{r^2}{2}\frac{\partial\overline{p}}{\partial x}=-r\left(\rho\overline{u'v'}-\mu\frac{\partial\overline{u}}{\partial r}\right)+A(x) \tag{7}$$

于 $r=0$ 处，计算式（7），$A(x)=0$，故得

$$\frac{r}{2}\frac{\partial\overline{p}}{\partial x}=-\left(\rho\overline{u'v'}-\mu\frac{\partial\overline{u}}{\partial r}\right) \tag{8}$$

（8）式中，$\dfrac{\partial\overline{p}}{\partial x}$ 是沿 x 轴方向的压力变化，在均匀管道中，它是一常量，故可写成

$$-\frac{\partial \overline{p}}{\partial x}=\rho J \tag{9}$$

式中 J—单位质量流体沿管道单位长度的压降，称比压降。将（9）式代入（8）式得

$$\frac{r\rho J}{2}=\rho\overline{u'v'}-\mu\frac{d\overline{u}}{dr}=\tau \tag{10}$$

式中 τ—湍流的总切应力。

使新 y 轴通过管道直径，x 轴位于管道壁面上，如图 1 所示。注意到 $dr=-dy$，因此 $\frac{d\overline{u}}{dr}=-\frac{d\overline{u}}{dy}$，于是 v' 的指向也要改变，以便在 $\overline{u'v'}$ 的乘积中正 v' 与正 u' 相关。故由（10）式得

$$-\frac{r_0\rho J}{2}+\frac{y\rho J}{2}=-\rho\overline{u'v'}+\mu\frac{d\overline{u}}{dy} \tag{11}$$

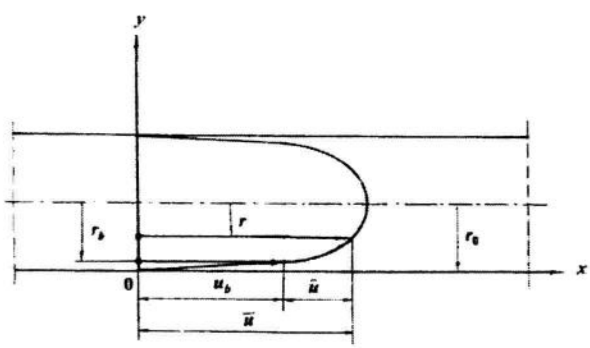

图 1　圆形管道中流体速度分布图

（10）和（11）式是管道中流体湍流运动的基本方程。当 $r=r_0$ 时，（10）式可表成

$$\frac{r_0\rho J}{2}=-\mu\frac{d\overline{u}}{dr}=\tau_0 \tag{12}$$

式中 τ_0—管壁面上流体分子粘性引起的切应力。

在湍流核心区中，（11）式中分子粘性引起的视应力可忽略不计。故得出

$$-\frac{r_0\rho J}{2}+\frac{y\rho J}{2}=-\rho\overline{u'v'}=\tau \tag{13}$$

式中 τ 表示雷诺应力的理论公式，公式（13）两边除以公式（12），得出

$$\frac{y}{r_0}=1-\frac{\rho\overline{u'v'}}{\tau_0} \tag{14}$$

上式为雷诺应力结构方程的理论公式，对比图 2 中实测的雷诺应力方程的实线图[3]，可以看出：在湍流核心区，此公式完全符合实际情况，但在靠近管壁面附近的地方，它是不能成立的。这可用来说明上述空间位置特征长度理论必须修正的原因和修正的方法：

当 $y=0$ 时（管道壁面上），（5）式的 $\tau=0$，当 $y=r_0$ 时（管道轴心线上），（5）式的 $\tau=\tau_0$［在管心线上，（15）式的 $\tau=0$，将（12）和（5）式代入即得］；其二，对 y 求（5）式 τ 函数的导数，当 y 从零变到 r_0 的区间，τ' 的符号都不改变，故该函数无极大极小值；其三，根据（14）式，雷诺应力的结构成直线分布。显然，空间位置特征长度理论的雷诺应力结构如图 2 中的虚线所示。在湍流核心区，其斜率与实测的实线和（13）式的理论线的斜率都**完全相反**，故必须将其斜率反转过来。

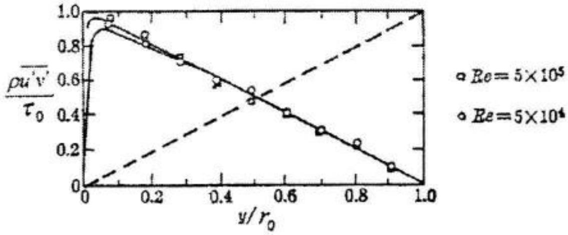

图 2　完全发展的管流中雷诺应力的结构

根据公式（13）和图 2 中的实线图，将空间位置特征长度理论的雷诺应力修改为：

$$\tau=-\frac{r_0\rho J}{2}+\rho l_m^2\left(\frac{d\overline{u}}{dy}\right)^2 \tag{15}$$

根据图 2 的湍流结构，因公式（15）为雷诺应力的理论公式，故只**适用湍流核心区**。

对比公式（13）与（15），可以看出，为了让公式（15）的雷诺应力结构符合实际情况，包括管轴心线上的雷诺应力等于零，故必须令

$$\rho l_m^2\left(\frac{d\overline{u}}{dy}\right)^2=\frac{y\rho J}{2} \tag{16}$$

公式（16）是推导管流速度分布公式的基础。

3. 湍流边界层区域的总切应力

根据特征长度理论，在湍流边界层中，雷诺应力公式（5）的起点和倾向都是正确的，但需修正它的斜率。当其斜率修正后，在湍流边界层的上边界处（$y=\delta$），雷诺应力 τ_b 可写成

$$\tau_b=\rho k^2(r_0-\delta)^2\left(\frac{d\overline{u}}{dy}\right)^2 \tag{17}$$

同时，考虑到该区域内的分子粘性应力不能忽略，故湍流总切应力为

$$\tau=\tau_0\left(1-\frac{y}{\delta}\right)+\rho k^2\left(r_0-\delta\right)^2\left(\frac{d\overline{u}}{dy}\right)^2\frac{y}{\delta} \tag{18}$$

式中 $0\le y\le\delta$ 。

上式可用来推导湍流边界层区域中的流速分布函数。

4. 结束语

特征长度理论具有如下的优点：

1、特征长度理论是根据流体微团在空间位置中的可测（实测）参量，应用函数概念和量纲分析法，揭示并确立了脉动速度、时均速度与空间位置坐标之间的依存关系。定义严谨，涵义确切。既有理论根据，又有实践基础；

2、建立了雷诺应力的结构方程，在湍流核心区中，它与 J.拉夫的实验资料完全吻合，保证了空间位置特征长度理论的正确性；

3、建立的公式（16），为湍流核心区中速度分布公式的推导奠定了理论基础；

4、无论在建立理论的过程中还是用它推导管流的速度分布，都无需首先顾及管壁面的粗糙度和湍流边界层的状况等条件，这有利于用来解决近壁面非常复杂的问题；

5、k 值是根据不同管径实验得出的，对于不同直径的管道都可适用，无需先有管流的速度分布公式，再去套用特定的实验系数。

6、首次建立了湍流边界层的总切应力表达式（18），为该层区域中速度分布公式的推导奠定了理论基础。

综上所述，空间位置特征长度理论是建立在客观、确定基础上的，保证了它的直观性、正确性和实用性，可用来研究管流的速度分布的规律。

参考文献

［1］.拉迪申可夫 A.M.，洛巴巧夫 B.Г.，水力学［M］，第一版，北京：高等教育出社 1958 104—116。

［2］Шевелев ф.А. Исследование основых гидравлических закондмерностей турбулентного движения в трубах , Госстройиздат 1953.

［3］戴莱 J.W.，哈里曼 D.R.，流体动力学［M］，第一版，北京：人民教育出版社，1983 289—293。

THE THEORY OF TURBULENT CHARACTERISTIC LENGTIN IN SPACE SITE

Ji Chaosong
(University of Science and Technology Beijing, 100083 Beijing)

Abstract

The characteristic length theory is based on the measurable (real measure) parameters of fluid particle in space site, applied the function conception and dimensional analysis, reveals and establishes the interdependent relationship between the coordinate of space site with the fluctuations and temporal mean velocity. The definition of characteristic length is distinctly, the conception of physics is precisely. And applied Reynolds turbulent equation to derive the structure equation of turbulent stress, by which the Reynolds' stress in turbulent core region has been corrected in the characteristic length theory. The theory can be used to derive the distribution functions of flow velocity in turbulent core region and turbulent boundary region respectively.

Key words: **characteristic length in space site, structure of Reynolds' stress, turbulent total shearing stress, specific diameter.**

此为试读，需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

关于普朗特混合长度理论的分析

暨朝颂

（北京科技大学，北京 100083）

[摘　要] 应用分子运动理论，证明普朗特混合长度理论的立论根据是错误的，造成混合长度定义的前后矛盾，最终定义（微团的坐标）与当初假设（微团脉动的振幅）之间，其物理涵义互不相关，严重违反了相似原理，是一种主观杜撰出来的理论。导出来的公式又未能正确修改，存在着结构性的错误。同时列举了有代表性的例子，详细分析了混合长度理论的具体错误。最后得出结论：该理论从立论到得出对数率都是错误的，在科学上没有意义。

[关键词] 分子运动论，平均自由程，混合长度，雷诺应力结构，湍流总切应力。
[中图分类号] 0357.5

1 普朗特混合长度理论概述

在普朗特混合长度理论中[1-4]，脉动速度 u' 和 v' 的表达式是根据混合长度距离 l 和速度梯度 $d\bar{u}/dy$ 得出的，其中 $\bar{u}$ 是某一点的时均速度和 y 是 $\bar{u}$ 的法线距离，通常从边界测出。在气体中，一个分子在撞击另一分子之前所行经的平均距离称之为平均自由程。利用这种类比［参见图 1.a］，普朗特假设流体质点的动量被新环境改变前所位移的距离为 l。于是脉动速度 u' 与 l 的关系式为

$$u' \sim l\frac{d\bar{u}}{dy} \tag{1}$$

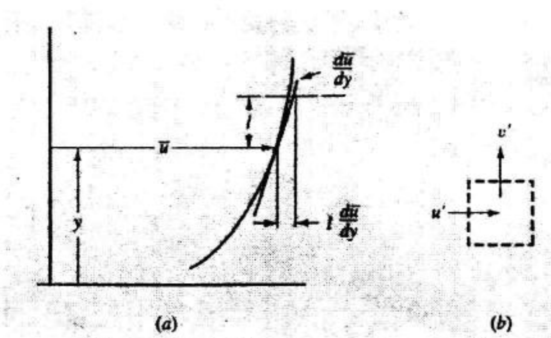

图 1 混合长度理论说明图

上式表示脉动速度 u' 的变化量取决于 y 方向相距为 l 的两点间的速度变化率。根据流体的连续方程，他推论 u' 与 v' 之间必须相关［参见图 1.b］。因此有下面的关系：

$$v' \sim u' \sim l\frac{d\bar{u}}{dy} \tag{2}$$

将（2）式写成等式，则得

$$u' = k_1 l \frac{d\overline{u}}{dy} \text{ 和 } v' = k_2 l \frac{d\overline{u}}{dy} \tag{3}$$

两式相乘并取时均值，得

$$-\overline{u'v'} = k_1 k_2 l^2 \left(\frac{d\overline{u}}{dy}\right)^2 \tag{4}$$

（4）式两侧乘以流体密度，得雷诺应力公式：

$$\tau = -\rho\overline{u'v'} = \rho k_1 k_2 l^2 \left(\frac{d\overline{u}}{dy}\right)^2 = \rho l^2 \left(\frac{d\overline{u}}{dy}\right)^2 \tag{5}$$

另一种写法是将微团脉动的位移距离（普氏称为混合长度）用l_1表示，于是

$$k_1 k_2 l_1^2 = l^2 = k^2 y^2 \tag{6}$$

令（5）式的雷诺应力τ等于管壁面的分子粘性应力τ_0，得：

$$\tau = \tau_0 = \rho l^2 \left(\frac{d\overline{u}}{dy}\right)^2 \tag{7}$$

将（6）式的l代入（7）式，积分得：

$$\frac{\overline{u}}{u_*} = \frac{1}{k}\ln y + C \tag{8}$$

式中u_*被称为壁面切应力速度。

2 混合长度理论的错误

1 由分子运动论可得出气体分子平均自由程的估算式：

$$\lambda = \frac{\mu}{0.499\rho\overline{v}} \tag{9}$$

式中$\overline{v}$是气体分子的算术平均速度，μ是气体的分子粘性系数。

将（9）式与（1）式相比较，可以看出：在分子运动论中，气体平均自由程与分子运动速度成反比，而在混合长度理论中，混合长度则与脉动速度成正比。显然，两者的物理方程根本不相同，又何以使其相类比。

2 气体的平均自由程取决于分子粘性系数，而混合长度则与湍流旋涡粘性系数相关联。众所周知，湍流脉动与平均场之间存在动量、能量交换，但分子运动与宏观运动之间却不存在这种交换，分子运动的动能并不来自宏观运动，而是自身所固有的。因此分子粘性系数是分子运动的特性，与宏观运动无关；而湍流的旋涡粘性系数不仅与湍流脉动有关，而且还与平均场有关。显然，分子运动与湍流脉动是两个不同的物理概念，它们之间无可比性。

3 由于立论的假设错误，造成混合长度定义的前后矛盾：最终定义（微团的坐标值）与当初假设（微团脉动的位移距离）之间，其物理涵义互不相关，实际是对立论假设的

自我否定，主观设定：$k_1k_2l^2=l^2=k^2y^2$或$k_1k_2l_1^2=l^2=k^2y^2$。人们对此说道：(此处l已没有早先的物理意义)[9]，此语道出了事物的表象，却没有揭露其错误本质：偷换了物理概念。为了掩盖这种概念上的错误，人们在阐述混合长度时，避免直接引述普氏的混合长度公式，而代之以卡门的卡巴长度公式[2,10]，但在推导管流速度分布公式时，仍采用普氏的混合长度的公式。其实，卡巴长度也是一个无用的虚拟公式［请参见作者的后续文章］。当初，关于混合长度，普朗特的假定是：在接近壁面处与离壁面距离成正比，比例系数由实验确定。后来则根据主观来选定，例如下面的(b) 式。故长期以来雷诺应力公式和混合长度公式出现了各种各样的形式，其中最常见的就是令雷诺应力为管壁面分子粘性应力来推导流速分布公式[5] [参见（7）式]。

4 雷诺应力公式的结构性错误。在雷诺应力与位置坐标的直角坐标系统中，（5）式的理论结构为左下右上的对角直线型关系，而在湍流核心区域中，其实际结构则为左上右下的对角直线关系，两者的斜率完全相反[11]。

5 混合长度理论是从近边层开始研究的，这里既有分子粘性应力，又有雷诺应力，为了简化研究，人们总是用雷诺数足够大时，忽略湍流总切应力通式中的分子粘性应力，结果则把湍流边界层中的分子粘性应力也全都忽略掉了。其实，靠近管壁面附近是由层流底层和过渡区组成的湍流边界层，在层流底层中，几乎全为分子粘性应力；在过渡区中，分子粘性应力与雷诺应力具有相同的量级，哪项也不能忽略；只有在湍流核心区中，在一定的雷诺数的条件下，分子粘性应力才可忽略。故上面的这种忽略，实际上是无视湍流边界层的存在，于是才有将湍流核心区的雷诺应力设定为壁面分子粘性应力的错误。不仅如此，当向湍流核心区推广时，则又遇到了雷诺应力结构反转的问题，把问题越搞越复杂。例如普朗特将雷诺应力公式修改为

$$\tau=\rho l^2\left[\left(\frac{d\bar{u}_1}{dx_1}\right)^2+l_1^2\left(\frac{d^2\bar{u}_2}{dx_2^2}\right)^2\right]^{1/2}$$

该式两侧量纲不同，是一错误公式；又如尼古拉兹于 1932 年，将混合长度公式修改为

$$l=kx_2\left(1-2.2\frac{x_2}{d}+2.4\frac{x_2^2}{d^2}-1.2\frac{x_2^3}{d^3}\right)$$

该式括号中的数学式是对k值的修正，当x_2由$0d$连续变到$d/2$时，k值则由0.4连续变到0.14。问题在于，上述实验公式是建立在下式的基础上的：

$$\tau_{21}=\tau_w\left(1-\frac{x_2}{d/2}\right)=\rho l^2\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial x_2}\right)^2$$

式中$\tau_w\left(1-\frac{x_2}{d/2}\right)$表示湍流的总切应力，其结构为左上右下的对角直线；而$\rho l^2\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial x_2}\right)^2$则表示雷诺应力，其结构为左下右上的对角线。两者表示的切应力不同，结构不同，又何

以能相等，故它是一个错误的公式。可以看出，他没有改变混合长度的表达式$l = kx_2$，只是将常数系数$k = 0.4$改成了变数系数$k = 0.4 \sim 0.14$，这不可能修正上面的基本.方程式。因为公式左侧仍表示湍流的总切应力，结构也未改变；右侧仍表示雷诺应力，结构的起点和倾向也没有改变，但改变了它的斜率，致使雷诺应力结构由原来的对角直线分布改变成了曲线分布，当$x_2 = d/2$时，雷诺应力为$(0.14/0.4)^2 \tau_w$。显然，尼古拉兹的这种修改，不但未能修正湍流核心区的雷诺应力的结构，反而将其结构的直线分布改变成了曲线分布，不符合 J. 拉夫的实测结果［参见图 2］，故这种修改是非常错误的。

综上所述，混合长度理论的错误可归纳为四点：第一、严重违反了相似原理：彼此相似的现象必须服从同一自然规律的现象，即描述现象的基本方程应相同[参见公式（1）与（9），两者根本不同]；单值性条件的物理量组成的相似准则在数值上应相等[雷诺数不相等，一为分子运动，一为湍流运动]。第二、将湍流核心区的雷诺应力设定为管壁面的分子粘性应力，混淆了分子运动与湍流脉动的物理概念。第三、混淆了雷诺应力的理论结构与实测结构的区别。第四、普朗特等人已完全认识到混合长度理论是一个不正确的理论，所以进行了上述的修改。但他们的这种修改，不但违反了量纲准则，而且混淆了理论雷诺应力与实际湍流总切应力的区别，越改越错。总之，普氏的混合长度是一个主观“创造”出来的理论，是一个错误的理论。现举例具体说明于下。

3 混合长度理论错误举例

有人也发现将雷诺应力设定为常量是错误的，必须改正过来，修正其结构。但理念没有改，企图维护普氏理论及其公式的正统性[6-7]，结果却是虚功一场。请看：

$$\tau = \tau_0\left(1-\frac{y}{R}\right) = \rho L^2\left(\frac{dv_x}{dy}\right)^2 \tag{a}$$

式中τ_0是一个常量，但y是一个变量，故τ改变成了变量［注：它本来就是一个变量，只是人们为了能够积分，把它设定为常量了］。遗憾的是，他们把混合长度公式设定为

$$L = ky\sqrt{1-\frac{y}{R}} \tag{b}$$

如果我们将(b)式代入(a) 式，则可得出

$$\tau = \tau_0\left(1-\frac{y}{R}\right) = \rho k^2 y^2\left(1-\frac{y}{R}\right)\left(\frac{dv_x}{dy}\right)^2 \tag{c}$$

如果公式两侧除以$\left(1-\frac{y}{R}\right)$，则可得出

$$\tau = \tau_0 = \rho k^2 y^2\left(\frac{dv_x}{dy}\right)^2 \tag{d}$$

从上面可以看出，将等式两侧乘以一个数学式，然后再除以同一数学式，就可以魔术般地把τ变成了常量，公式(d) 也回到了原来的形式。人们莫不以此感到欣慰，认为找到了将雷诺应力设定为常量的充要根据，捍卫了普朗特的混合长度理论。岂知这只是

一场虚功，在科学上又有什么价值呢！？错误出在哪里？请看下面的分析：

1. 修改后，(c)式的第一式为

$$\tau = \tau_0\left(1-\frac{y}{R}\right) \tag{e}$$

(e)式表示：τ 函数是以[$y=0$、$\tau=\tau_0$，$y=R$、$\tau=0$]为端点的一根**直线**，当τ表示湍流总切应力时，该公式是正确的；当τ代表雷诺应力时，在湍流核心区是正确的，但在湍流边界层中，则是不能成立的。

2. 修改后，(c) 式的第二式为

$$\tau = \rho k^2 y^2\left(1-\frac{y}{R}\right)\left(\frac{dv_x}{dy}\right)^2 \tag{f}$$

(f)式表示：τ 函数是以[$y=0$、$\tau=0$，$y=R$、$\tau=0$]为端点的一根**曲线**，它有极大值，位于$2R/3$的地方附近。当τ代表湍流的总切应力时，该公式是错误的；当τ表示雷诺应力时，该公式除了两个端点符合实际情况外，其余部分都偏离实测点很远。这是因为雷诺应力的极大值位于湍流边界层的边缘附近(参见图 2.)，故(f)式也是不正确的。

比较(e)与(f)式，可以得出下面的**不等式**：

$$\tau_0\left(1-\frac{y}{R}\right) \neq \rho k^2 y^2\left(1-\frac{y}{R}\right)\left(\frac{dv_x}{dy}\right)^2 \tag{g}$$

(g) 式化简即可得出：

$$\tau_0 \neq \rho k^2 y^2\left(\frac{dv_x}{dy}\right)^2 \tag{h}$$

综上所述，经过一番煞费苦心的修改，又回到了普氏混合长度理论所固有的错误：第一、未能修正其雷诺应力结构，故雷诺应力结构的斜率与实际的相反；第二、为了能够积分运算，只得将湍流核心区的雷诺应力设定为管壁面上的分子粘性应力，即在物理概念上将湍流脉动混同于分子运动，在数学方法上把变量混同于常量。

另一种推导方法相类似[8]，但只改变了湍流切应力的表示方法，却没有改变混合长度的表达式。开始的公式为

$$\left\langle u'_x u'_y\right\rangle - \nu\frac{dU}{dy} = -\frac{1}{\rho}\left(1-\frac{y}{R}\right)\tau_W = -\left(1-\frac{y}{R}\right)u_\tau^2 \tag{9.79a}$$

上式表示湍流的总切应力公式，符合实际情况。其左侧为雷诺应力和分子粘性应力之和，其右侧表示由壁面分子粘性应力τ_w/ρ代表的总切应力（此处的雷诺应力为零），线性地减少到轴线上的零值(应力)。故无论是线性次层(层流底层)、缓冲区(过渡区)、中心区（湍流核心区)、还是书中增加的对数层，都是它的组成区段，区段中的切应力取决于各区段的坐标位置y/R和壁面分子粘性应力τ_w/ρ。凡符合该法则的运算都是正确的，否则便是错误的运算。为了便于分析，将原书中的推导过程简要陈述如下：

书中明确告知，在忽略分子粘性应力之后，得出下式：

$$-\left\langle u_x' u_y' \right\rangle = u_\tau^2 \tag{9.84}$$

应用混合长度模式，得出下面的方程：

$$-\left\langle u_x' u_r' \right\rangle = \nu_T \frac{dU}{dy}, \qquad \nu_T = k^2 y^2 \left| \frac{dU}{dy} \right| \tag{m}$$

将它代入式（9.84）中的雷诺应力项，得平均速度方程如下：

$$k^2 y^2 \left(\frac{dU}{dy} \right)^2 = u_\tau^2 \tag{9.85}$$

无量纲化并积分得出下式：

$$U_+ = \frac{1}{k} \ln y^+ + B \tag{9.86}$$

上式适用圆管中 $y^+ > 30$，$\bar{y} < 0.3$ 的流动区域。

对上述公式的推导分析如下：

1．关于(9.84)式的推导。书中明确告知，当(9.79a)式忽略分子粘性应力之后，得出(9.84)式，但却没有提及 y/R 也被忽略掉了的一事。作者认为这是关系到(9.79a) 式的正确与否的原则问题，即使 $y=0$，也没有理由将其忽略，它表示该流体微团距管壁面的距离为零、雷诺应力为零和分子粘性应力[绝非（9.84）式的雷诺应力]为

$$\nu \frac{dU}{dy} = \frac{\tau_w}{\rho} = u_\tau^2 \tag{n}$$

的准确表达。同样 $y>0$，即使 $\bar{y} \ll 1$ 也没有理由将其忽略。**因为没有它，流体微团就没有确定的空间位置，赖以维系(9.79a)式正确性的不可或缺的条件就不存在了。**

如上所述，在所谓的对数层区中，根据该书的说明，该层区域的 $\bar{y}$ 值大致介于 0.03 至 0.3 之间，这在(9.79a) 式中能忽略吗？！如果能忽略，则在图 2 中（9.84）式可用平行于横坐标轴 y/R 的黑粗线段来表示。不难看出，它不但不能与（9.79a）式和 J. 拉夫的实测线相重叠，而且连一个汇点都没有，故(9.84) 式是不能成立的。这充分说明在任何条件下 y/R 都不能忽略。

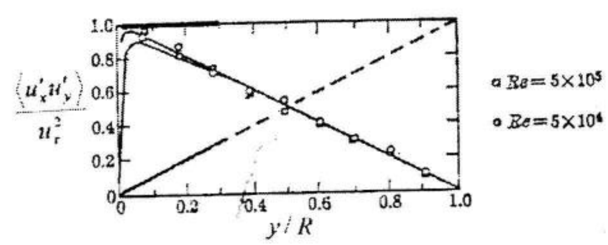

图 2　湍流切应力的结构比较图

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com