中學數學百科全書

九章算術是中國古老、最有系統的算書，
我們以之爲名，冀望爲我國數學教育獻力

中學數學百科全書

出版者：九章文化事業有限公司
臺北市羅斯福路三段297之2號
3940207·3940208

發行人：孫文先

印刷者：九章文化事業有限公司
出版日期：中華民國 69 年 10 月初版
定價：400 元
郵政劃撥：112091孫文先帳戶
（本書如有缺頁、破損、請寄回更換）

中學數學百科全書

中學數學百科全書

總編輯：孫文先

助理編輯：郭慕華（師大數學系）
陳慧華（師大數學系）

美術編輯：林貴榮（聯合報編輯部美術編輯）
王　瑛（至善工商美工科專任教師）

校　　訂：洪萬生（任教於師大數學系）
林國棟（任教於師大數學系）
楊康景松（任教於台北景美女中）

本書摘自VAN NOSTRAND REINHOLD COMANY出版之
THE VNR CONCISE ENCYCLOPEDIA OF MATHEMATICS
德文原版1975年出版（原名：Mathematics at Glance數學一瞥）
英文初版1977年出版
原編者：W.Gellert·H. Küsther·M.Hellwich·H. Kästher
原作者：

G. Berthold	H. Kästner	Dr.E. Schröder
Prof.O. Beyer	G.Lisske	Dr.L. Stammler
Prof.L.Bittner	Dr.G.Lorenz	A. Steger
Prof.H.Boseck	Dr.G.Maess	Prof.R. Sulanke
Dr.H.G. Bothe	Dr.W.D.Müller	Prof.H.Thiele
Dr.G.Czichowski	Dr.F.Neigenfind	Dr.H.Thiele
J.Dähnn	Prof.F.Nožička	Prof.W.Tutschke
Dr.C.Frischmuth	Dr.S.Oberländer	Dr.H.Vahle
Dr.D.Göhde	Prof.M.Peschel	Dr.L.Wagner
W.Göhler	Dr.G.Pietzsch	Prof.W.Walsch
Prof.L.Görke	Dr.B.Renschuch	Dr.V.Wunsch
Dr.M.Hellwich	Prof.H.Sachs	Dr.G.Wussing
Dr.H.Herre	Prof.H.Salié	Prof.H.Wussing
Prof.M.Herrmann	H.Schlosser	

英文版譯者：

Dr.O. Pretzel	Dr.A.Stefan
Dr.E.J.F.Primrose	Dr.A.M.Tropper
Prof.G.E.H.Reuter	Dr.A.Walker

中文版譯者：

洪萬生	孫文先	李慶俊
楊康景松	李慧英	陳創義
廖賀田	林國棟	陳榮治
許清士	林炎全	蔣永延
甯自强	陳碧眞	

☆德文原版銷售量（至1977年底止）：七十萬册。
☆英文原版銷售量（至1977年底止）：一百萬册。
☆中文版銷售量（至1980年5月）：6000册。

序

在國外數學科的通俗學習手册、辭典、百科全書比比皆是，而在國內只有商務印書館的算學辭典，科技出版社的數學大辭典，這兩本書都是二三十年前老掉牙的東西，許多內容已不適用於今日（不過，它們倒是研究數學史的好工具書）。幼獅書局早在七、八年前籌劃翻譯日本岩波數學辭典的數學大辭典雖然網羅了全國所有名教授參與工作，但自今仍出版無期，這本書適合專研數學著作工具書用，而並不適於一般研習學數者。

除了這三本書，國內再也沒有一本中文的當代數學用典。我們出版的簡明數學百科全書打破了數十年來的沈寂，它是一本高水準而完備的數學用典，深獲讀者佳評，它在短短一年內就銷售了二版。我們為了使這本書更普及，也為了提高我國中學生的數學能力，挽回日益萎靡的中學數學教育，我們也不惜斥鉅資為中學生設計了這本中學數學百科全書。雖然我們只是一小小出版社，不似幼獅書局能網羅全國的名教授，但憑著我們對數學教育的深切關懷，我們貿然地出版了它，如今它就擺在各位眼前，請您賜予我們批評指敎，您的一言一語我們都將極力改進。我們更期盼您賜予我們督促和共鳴，使我們有勇氣為數學教育再奮鬪下去

在編印本書之時，遭遇了許多財務、技術、學術上的困難，感謝紙行、製版廠、印刷廠及滿腔熱忱的師長親友之鼎力支持，沒有他們，本書仍為不可能。特別感謝郭慕華同學在協助本書編輯時貢獻驚人的毅力與耐心，還有陳慧華同學利用課餘協助本書分色製版工作，其認真學習的態度很令人激賞。

孫文先　謹誌

1980．9．30．

目錄

5. 函數

6. 百分比、利息與年金

7. 平面幾何

8. 立體幾何

9. 三角學

10. 平面三角學

11. 平面解析幾何

12. 集合論

13. 線性代數

14. 數列、級數與極限

15. 立體解析幾何

16. 機率

使用說明

本書是一本完備的數學用典，凡中學數學課程中所遭遇的問題、定理與概念本書中均有詳細的解說。

1. 本書的印刷採紅、黃、藍、黑四色套色印刷。套印紅底之文字爲定理，套印黃底者爲公式，套印藍底者爲例題。圖中套色的用意有：用於分組（如圖 7.4-3）、分辨（如圖 7.3-2）、指示主題（如圖 7.3-6）、表現立體圖形（如圖 8.2-8）、丈量比例（如圖 4.3-5）。
2. 本書內容中之字體有三種：一般內容用 4 號宋體字；用正楷表專有名詞（如 17 頁之**自然數、基數、序數**）；用 5 號宋體字表附記、輔助說明或定理（如 17 頁之 成分、數目及 25 頁之 除法中，不可以 0 來除）。
3. 本書之內容範圍限於高中三年級學生所能理解的程度，雖然本書內容豐富，但不似課本一再重覆一些特性或定理，也缺少許多練習題目。有時，爲了關念的連貫，本書也加入了一些現有中學課程沒有的資料，但這些資料不會太深。本書的內容安排由淺入深，爲了避免不必要的重覆，我們把相關的資料放在較深的章節中，例如，我們在討論立體幾何時討論正方體的表面積，而不在討論平面幾何面積時就討論之。
4. 本書之名詞力求使用現通用之譯名，數學家之譯名後均附原文及生歿年代，以免混淆。普通名詞若與其它書籍之譯名含糊不清時，由索引中可查出其原文比較之。
5. 查閱本書有二途徑：其一由相關的章節中查閱；其二由書後所附索引查閱。例如，欲知球的體積，第一途徑是先找立體幾何的章節，然後再由該章的首項目錄中找到討論球的部份，即可找到球的體積。第二途徑是從索引中找到 11 劃的球，找出其後所列之頁數，即可得到球之體積；另外找 22 劃的體，也可得知有討論球的體積的頁數。

導 言

科技在各方面的偉大成就，深深地影響每一個人的生活，它引導人們廣泛地認識數學的重要性：每個人都知道，至少確信，沒有數學，科技全然不會有今天的成就。因此，人們乃更堅定地關切數學，需要這門科學的消息。

在許多方面，特別就問題和結論的陳述來說，數學是一門非常特別的科學。對醫藥學、動物學、植物學、地理學、地質學或語言學、歷史學、天文學而言，一個學者只要充分具備當代知識就能夠對門外漢闡釋大半的問題和結論，甚至於包括他的研究方法及此專門學科中的基本原理，藉着這些解釋，他能成功地傳播專門學科內容的印象，這對於近代化學、近代物理學已經非常困難了，而對於數學，這幾乎是不可能的。不僅繁多的數學結論有此現象，而數學問題更是如此地難以探討，並且是如此地深刻．以致於即使是數學家也只能對整個數學作表面化的解釋。

爲了避免把數學片斷地割裂成許多特別的部門，我們從不同的範疇中儘可能地選出通常在表面上不完全相近的共同特性，並藉此產生新的，甚至是抽象的理論。就是依這種方式，介於廣大初看之下散漫分歧的各個方向之間的資料，乃能連鎖起來。這種程序可視爲再抽象：而像基本學科代數和幾何，基根源都是從日常經驗抽象化出來的，若再進一步的（比方）從代數和幾何抽象化則可得到一個統一的定理。在某些情況下，幾何學可變爲代數學的問題，而代數學也可轉爲幾何學問題。

綜上所知，要一個門外漢對當代整個數學即使是一瞥都十分不可能。此處所指的門外漢，不僅僅是對學校正式課程所知有限的人，甚至有文憑的數學家或理學士，更甚至是數學教師，都是許多專門範疇的門外漢。三、四年級的研讀不可能獲得數學上所有部門的專門知識。因此，這本書並不企圖提供數學上所有專門領域的重要知識——凡使用本書的中學青年，都應深切了解此限制。

在數學史上,數學最先是以十分拙樸的方式發展的。它從數 1 、 2 、 3 ……和一些顯而易見的幾何圖形，如點、線段、直線、平面、角、三角形、圓等出發，逐漸地提升到較繁複的構式，其中數和形的實體並不是分開發展，而是通過“度量”聯繫在一起的。正是在這種從直觀、簡易、明顯進化到更複雜的發展過程中，數學建立起來了。例如，當希臘人迫切地感覺他們不僅要永遠地向前邁進，而且也思考到：「一個人在數學上追求的是什麼？」時，數學便被他們提升到一個全新的發展層面，也因爲他們，數學才能成爲一門今日意義下的科學。一方面，人們體認“證明”在於把數學命題藉着簡易的邏輯結論來演繹成爲其它已知的事實。另一方面，人們確知一個演繹程序中，只能達到由直覺或經驗認爲可靠之簡單特性，而不能無限制的發展。

由此，他們將首先察覺到的基本事實滙集成系統，例如，過兩點確有一直線，並且他們也創設了邏輯基礎。配合這兩個主要特性乃能系統化地建立了由簡入繁的幾何學。

除了少數不重要的補充外，這個歐氏幾何有很長的一段時間，一直都是科學的典範。大約有二千年之久，沒有人嘗試以同樣的方法討論代數學和後來的分析學。希臘人對自然數的基本性質已頗有認識，但他們對因數和質數的問題更有興趣。他們也知道如何處理普通分數（卽分母不爲 10 的乘冪的分數），但尙不能激發足以引進負數的理念。從等腰直角三角形，他們領悟到分數不足以描述所有數量的比：他們注意到此一三角形的邊和底之比不能以分數表示。然而，由此他們並沒有給出結論：分數的領域應擴展，使得這個比，甚至所有的幾何比，都可以用擴展出來的新數來描述。反而，他們却“幾何化了代數”。雖然他們確曾導出一個與我們實數對等的理論；但幾何化把數的理論搞得如此複雜，迫使希臘數學的發展停頓了下來。

幾世紀後，天文學家和航海家的實際需要迫切地需求三角計算，而這種僅能借助於某些三角函數表。由於觀測值的精確度有限，所以只要給出逼近的量以供計算卽已足夠。由此，逐漸地發明了有限小數，它在實際的計算中，被認爲比普通分數更爲方便。還有，大致說來，信心也逐漸加强，因爲使用的小數位數愈多，其值往往越精確，甚至用足夠多的小數位數便能達到指定的精確度。小數的逼近掌握了實數的眞正本質，實數的理論因而發展。

一個具有基本重要性的有趣實例指出：前述的觀念早在阿基米德的研究中，以一種稍爲不同的形式出現，當時他試圖計算平面上任意封閉曲線所圍的面積，就曾提出類似的概念。首先，在他著名的“窮盡法”中，他成功的計算出拋物線與垂直中心軸的弦所圍的面積，並推得此所圍面積比弦的兩端點及頂點所圍三角形面積多了三分之一。但阿基米德並沒有成功的找出求圓面積的對應公式。爲了解決這個問題，他必須計算 π 的值。據我們所知，因他僅僅使用分數來算，所以不能成功；他只好聊勝於無地證明 π 位於 $3\frac{1}{7}$ 和 $3\frac{10}{71}$ 這兩個分數之間。爲了計算圓面積，他反覆地應用畢氏定理，由計算圓的內接及外接正凸 96 邊形的面積而得到其近似值。中國九章算經中劉徽運用圓內接正多邊形「割之彌細，所失彌少，割之又割，以至於不可割，則與圓周合體而無所失　」，求得比阿基米德更精確的 π 值。阿基米德與劉徽顯然知道取足夠多的邊和頂點，就能夠把 π 計算到指定的精確範圍內。一個數可由分數作指定精確度的逼近，正是實數的特性之一。對實數本質的熟悉感，適當地在各種不同的場合穩固地建立起來。沒有人想 到實數理論「基礎」竟然需要更進一步的精深研究。

然而，「基礎」的若干問題在幾何學和代數學中也有各自的份量。前面已經指出歐氏幾何學是以非常拙樸的幾何命題開始，而導出較深的幾何定理。這些簡單的命題稱爲公理，它是當時直觀幾何知識的精粹，因此沒有人認爲需要加以證明。唯一的例外是平行公理（或設準）。這是說：給定一直線和線外一點，平面上恰有一直線通過此點且和給定直線不相交。可不可能由其他公理導出它，而將之從公理系統中除去呢？—— 2000 年來 ，數學家對這問

題束手無策，直到德國的高斯、俄國的洛勃却斯基及匈牙利的波利亞才成功地指出平行公理獨立於其他公理。這結論伴隨着其他方面的發展，其重要性才變得非常顯著。代數上，二次方程式解的公式可導出 $\sqrt{-1}$ 的表示式，它第一眼看起來似乎是無意義的。但我們只要像計算尋常的根式如 $\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$ 甚至 $\sqrt{\pi}$ 一樣來計算它，其結論是有意義的。這種計算方式强化了 $\sqrt{-1}$ 形式的可信性，並使人接受 $i=\sqrt{-1}$ 的記號法。大約 300 年前，高斯和其他人把實數域再擴大，其中存在一個新數，它的平方等於 -1，從此這問題就有了一個完全明確的解釋方法了！

高斯澈底了解實數的性質，以致於他能毫不遲疑且不需詳證地使用它們。只有當歌西和同時代其他數學家在分類極限的觀念而出現難題時，實數才變成嚴肅沈思的對象。大家都體認到分數可以通過許多不同途徑的演繹，而建立一個實數的理論。分數又可以衍化爲自然數，且在自然數領域中所有的性質都可藉少數完美顯明的基本事實——皮亞諾公理統合起來。

藉著這種衍化爲自然數的演繹，得到了實數、複數理論和整個實數、複數分析，甚至是幾何學的基石。在解析幾何中，它顯出如何利用坐標（都是實數）去掌握幾何學的基素——點。

下文中我們將提及一種開始於 150 年前的發展。衆人皆知，數的乘法和加法的某些法則有强烈的形式相似性。同樣地，其他數學運算也遵守一些相當簡單的形式法則。數學家由萃取基本性質進行到下一個邏輯步驟，並由純邏輯的程序導出新穎而更深刻的性質，但這種進展是很緩慢的。這領域逐漸發展成爲今日的群論，還有，我們也可以看到，如同在歐氏幾何學中一樣，繼起的數學發展都有公設系的出現。

今日數學的大部份，尤其是代數，以及範圍漸增的幾何學，都是以公設化的方式建立的。其大略的程序如下：給一群數學物元，通常稱作集合，用集合中的元素和某些公設系來描述這些物元的基本性質。然後從事下面的工作：首先，從公設推求出深遠的結論，換句話說，把這樣的結構的理論儘可能地推演；接著，去求得落實此公設的所有專門性方法的一種鑑定。或許，本質地只有一種可能的落實，或多種，甚或無限多種，也可能沒有這樣的落實存在，比方，所給的公設互相矛盾。假如有好幾個模型，也就是，好幾個落實公設的方法，那麼，我們就尋求其「徵定特色」——在有限多次步驟中有效地區分各種可能性。對某些結構這已經完全被解決，而有些則還差一大截。這附帶地指出公設化和數學邏輯是如何緊密地交織在一起。

當世紀更替，喚起了一個新的結構理論——集合論，它更强烈地需要有效的數學邏輯。集合論是最簡單的結構論，因爲它可以是任意的組合，它的元素不一定附屬於任何公設，可以是點、數、運動、函數、圖形，也可以是人、星星、椅子或任何給定的東西。因爲沒有給出結構性的假設，故兩個具有相同個數的元素之集合稱爲相等或對等。對有限集合來說，這個意義大家當然淸楚得很；而對無限集合，甚至也能定義像元素的個數——冪數或基數，這一類的東西，則實在是諾大的貢獻。誠然，這可能不會具備我們所熟知的有限集合之元素個

數涉及的那些特性，例如，自然數與分數的個數一樣，而分數與實數的個數却不同，線上的個數與平面上的點一樣多。所有這些性質儘管缺乏明顯的直觀性，但從整體的數學嚴密性觀點來說，它是不可否認的。而矛盾出現在未將集合的構式加以限制；例如：“所有集合的集合”的觀念是自身矛盾的。然而，這並不是數學的危機── 雖然這現象常被過分地渲染；相反的，這倒促使數學家在定義數學概念時，兢兢業業地思考所牽涉到的內涵。事實上，有系統的數理邏輯已經發展出來，今日我們都很明確地知道如何避免這種矛盾。

我們可能認爲在非常一般化理論結構和數理邏輯公設化形式中，這種極端的抽象化，離實際應用會愈來愈遠。事實並不如此，萊布尼茲放棄了頗有創見的數學研究，而投入邏輯的一些基本問題中，並且曾經創造了一個可以使用的計算器，這當然不是一種巧合。

大量製造計算器的出籠，不論用手或動力操作，都沒有引起重要的原理討論。但電算機的發明，却使得這些事物劇烈地改變，因爲計算的速度快速地增加。事實上，機器的運轉只是利用到簡單的黑白原理，因爲在它們的每一組合成分中，全看電流通過或不通過。然而，它却能應付用其他方法不可能實現的計算，它們以一種超越想像的速度，以最簡單的方式計算龐大數目，且在可被接受的時間內完成一個複雜而冗長的程式。當然，計算的時間依賴寫程式的技巧而定。在完成電算機發明前的初步工作後，程式的某些規則很快地被發現，在數理邏輯中也扮演了一個角色。證明了純爲理論需要所做的純數學研究，有其實際之效用。

走文至此，我們似乎是可以探討數學問題的理論性和實際可解性之間的差別了。通常數學並不是討論給定數值後的個別問題，而是依據某些數據而定的一般性問題，其數值可以由有限多次或無限多次的方法中選取。一個簡單的例子：確定三角形的面積是依照它的三邊長而定。雖然邊長有無限多種可能，但仍有一個適用於所有三角形的面積公式。

數學的發展，我們已大略的簡述如上，它是從數、運算、圖形和度量的最簡單基本概念，導向今日富有高度抽象化結構之完全的公設化形式，以及發展可能性永不窮盡的現代自動計算器。

本書的內容，等於是從古代經過中世紀一直到微積分建立前的數學發展中的大部份內容。其中只有算術學、數論和幾何學，它們是依次發展而不是同時發展出來的。我們由自然數與其初等運算法則開始論述，並儘可能的詳明，就像把它呈現給一無所知的人一樣。緊接著，我們給出公設化架構，從自然數出發，導至複數而止。

雖然使用符號的是如此簡單的概念，但却不爲希臘人所知，符號的缺乏迫使數學使用極端笨重的式子：以字母做爲數字。今日，它在學校中已被視爲當然。符號是非常適用於基本數學概念的，但它是那麼地容易處理以致於頗有不深思地使用，甚至機械化操縱字母的危險。下述引起不當後果的效應，特別是在中小學內，應該加以極力反對：數學的概念是最重要的，而計算過程的細節則是次要的── 斷然不走其他的途徑。在 1850 年 9 月 1 日高斯寫給舒馬却爾（ Schumacher ）的信上就曾討論到這主題：「這是近代數學的特徵。…… 藉諸符號與名辭語言，我們擁有一個可把最複雜的論證化簡爲某些機械裝置的槓桿……。雖然在大

部份情況下，權威導致某些被默認的假設，但我們仍經常機械地操作這槓桿。我主張在計算的每一次應用中，在諸概念的每一次使用中，我們都應該永遠對原條件保持自覺，並且不可把由機械操作產生的結果視爲在顯然可被容許限度外的數學特質。」

許多研究是由已知量來求未知量。一般認爲使用字母，可以帮助我們把研究工作敍述得簡單而淸楚。許多第一眼看似完全不同的問題，經過方程式或方程組的處理後，往往是同一形式。這也指出介於問題的數學構式和抽象化之間的相似性，這個抽象化是指忽略已知量和所需量的意義，只留下數學的核心。

函數化想法是近代數學的一大特性。這意指我們關注一量與其他量相關性的函數關係，例如：三角形面積或角與邊長的關係。我們將會在分析函數概念中弄熟這種想法的其他例子。

初等幾何處理平面或空間中的點、線段、角、直線、三角形、四邊形、圓、五邊形等等。早期發展的數之概念，由於度量物體的需要，使它再度扮演一個不可或缺的角色。當然這不應該引導我們疏忽純幾何的思考才是，特別是在問題的解答中。我們也嘗試着由純幾何方法—— 作圖來解決問題。

探討空間中的幾何問題是立體幾何學的主題，它與日常生活最貼切，初學者最好藉助實物來思維，不要空在平面上作業。

在解析幾何中，幾何學和計算有最密切的融合：利用坐標的概念把幾何問題轉化成數值問題。由此，幾何學變成深具影響性的分析學方法。

線性代數在純數學與應用數學上都是很重要的題材，解線性方程式、轉換大階矩陣的問題、向量的運用、求特徵根的問題都是物理學上、生物學上及社會科學上經常遇到的。

數列、級數與極限是函數連續性觀念和微積分學的基礎，它的重要性不僅對整個數學架構，而且對物理學及其他科技的應用，都是根本的。

機率論在應用數學上佔了一重要部份，但其重要部份絕對不在時下課本難題重重的排列組合上，排列組合只不過是機率論上的一小問題而已。

由於本文開端所陳述之理由，我們不可能對個別問題作更詳盡的解說，對於非中學生所能理解的題材也只好割愛，雖然如此，對一般中學生而言，本書的資料已足夠了，若有特別的需要與興趣，最好請參考個別的專門著作。