新编奥林匹克基础知识及素质教育丛书

初中三年级数学

主编：杨骞

展开思想的翅膀
活跃在奥林匹克广场上
为了明天的成功
哪怕今天摸爬滚打
让我们手挽手
深挖智慧的力量
奋斗——前进——
这里是练兵的战场

$$a^2+b^2=c^2$$

科学技术文献出版社

新编奥林匹克基础知识及素质教育丛书

在教材的基础上提高　在提高的基础上飞跃

全国著名品牌：十年磨一剑

名校权威新编：真诚新奉献

考试深入指导：透彻而全面

辅助学生学习：提高在当年

初中一年级数学	15.00元
初中二年级数学	19.50元
初中三年级数学	19.80元
初中物理	16.50元
初中生物	12.50元
计算机（上、下册）	24.00元

注：邮费按书款总价另加20%邮挂费

☎ 邮购热线：(010)68515544-2172

ISBN 7-5023-3235-9

9 787502 332358 >

ISBN 7-5023-3235-9/G · 712
定价：19.80元

新编奥林匹克基础知识及素质教育丛书

初中三年级数学

主　编　杨　骞
编　著　贺贤孝　陈君汉
王　瑾　景　敏
阎　东

科学技术文献出版社
Scientific and Technical Documents Publishing House
北　京

图书在版编目(CIP)数据

初中三年级数学/杨骞主编 .-北京:科学技术文献出版社,1999.3
(新编奥林匹克基础知识及素质教育丛书)
ISBN 7-5023-3235-9

Ⅰ.初… Ⅱ.杨… Ⅲ.数学课-初中-教学参考资料 Ⅳ.G633

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 40169 号

出　　版　　者:科学技术文献出版社
图 书 发 行 部:北京市复兴路 15 号(公主坟)中国科学技术信息研究所大楼 B 段/100038
图 书 编 务 部:北京市西苑南一院 8 号楼(颐和园西苑公汽站)/100091
邮 购 部 电 话:(010)68515544-2953
图书编务部电话:(010)62878310,(010)62877791,(010)62877789
图书发行部电话:(010)68515544-2945,(010)68514035,(010)68514009
门 市 部 电 话:(010)68515544-2172
图书发行部传真:(010)68514035
图书编务部传真:(010)62878317
E-mail:stdph@istic.ac.cn
策 划 编 辑:王亚琪　王　琦
责 任 编 辑:葆　莹
责 任 校 对:李正德
责 任 出 版:周永京
封 面 设 计:宋雪梅
发　　行　　者:新华书店北京发行所
印　　刷　　者:北京国马印刷厂
版 (印) 次:1999 年 3 月第 1 版　1999 年 3 月第 1 次印刷
开　　　　本:850×1168　32 开
字　　　　数:393 千
印　　　　张:14.625
印　　　　数:1—10000 册
定　　　　价:19.80 元

(京)新登字 130 号

内 容 简 介

本书根据初三数学教学内容和要求以及《初中数学竞赛大纲》，结合初三学生的学习规律和心理特点而编写的。本书的内容主要有：一元二次方程、判别式、韦达定理；二次函数及其图像、最值；圆及其与三角形、多边形之关系；几何中恒定、不等；数学解题思想方法。本书在写作过程中，为达到"拓宽知识，启迪思维，开发智力，培养能力，优化素质"教学目的，特别重视数学思想方法的渗透和运用；注重问题的提出与分析，强调解题规律的揭示和讲解，并充分地考虑到科学性、系统性、全面性、实用性、可读性、超前性等特点。

本书可作为数学奥林匹克培训班教材，也可作为学有余力的初三学生的辅助资料，还可作为教师教学的参考用书。

前 言

近些年来，世界范围内的学科奥林匹克竞赛方兴未艾。我国自参赛以来，不断取得优异成绩。1997年，我国参加在阿根廷布宜诺斯艾利斯举办的第37届世界数学奥林匹克竞赛，6名选手均获金牌，并取得了团体第一名的好成绩。学生参加各学科的奥林匹克竞赛活动，不但为国家争得了荣誉，也已成为他们丰富学习内容、增长知识、提高各门功课学习成绩的重要方式之一。

为了帮助广大中小学生完整、准确、全面地掌握各门功课的学习内容，在日常的学习和参加奥林匹克竞赛活动中取得好的成绩，同时为了配合目前中小学素质教育，我们邀请了京内外著名奥校具有多年教学与辅导经验的权威老师，编写了这套《新编奥林匹克基础知识及素质教育丛书》。

参加本丛书编写工作的老师，全部来自于教学第一线，具有扎实的基础理论功底和丰富的教学实践经验。他们结合自己多年教学、科研和奥校辅导的经验，在总结各类奥林匹克竞赛教学讲义、习题解答及辅导材料的基础上，博采众家之长，形成了本丛书独具特色的风格和特点：

(1)学科门类齐全。全套丛书共18分册，涵盖数学、物理、化学、生物、计算机5个学科，跨越小学、初中、高中三个阶段，是目前此类图书中覆盖学科最广、教学内容最全、实用性最强的奥林匹克竞赛系列丛书之一。

(2)普及与提高并重。各册书紧密配合本年级的教学进度，选择基础性强、应用性广、具有代表性的教学内容作为专题，进行重点讲解，旨在提高大多数学生的学习水平。同时又根据各学科竞赛的实际需要，选择针对性强的专题，以点带面，重点讲解。

(3)科学准确，结构合理。各分册按照学科特点进行科学编排，内容繁简适当。对于教学中的重大疑难问题，分析透彻，注重科学性和准确性。重点、难点部分举一反三，力求使学生在理解的基础上，学会灵活运用。

(4)新颖独特，趣味性强。各分册力求做到选题典型、新颖有趣，例题讲解富有启发性，注意培养学生独立思考的能力。注重从学习方法、分析思路和解题技巧上，全方位、多角度地培养学生对各种知识的综合运用能力。

为便于学生掌握各门功课的学习要领，各分册除对基础知识进行系统讲解外，还配备有一定数量的练习，并附有提示及答案，供同学们根据自己的实际情况有选择地使用。

我们真诚地希望本套丛书能对同学们参加奥林匹克竞赛和各类学科竞赛有所裨益，能有助于我国中小学生全面提高各门功课的学习成绩。书中如有错漏或不当之处，欢迎读者批评指正。

新编奥林匹克基础知识及素质教育丛书

主要作者简介

吴文虎	中国计算机学会普及委员会主任 国际信息学奥林匹克中国队总教练 清华大学计算机系教授
吕　品	全国计算机教材审查委员会委员 北京信息学奥林匹克学校副校长 中学高级教师
刘　尧	北京教育学院化学教研室主任、教授
陆　禾	北京 14 中化学特级教师 北京市有突出贡献的专家
黄儒兰	北京教育局化学教研室主任 中学特级教师
冯士滕	北京宣武区教育学会秘书长 中学特级教师
李方烈	北京宣武区中学数学教研室主任 中学特级教师
赵欣如	北京师范大学生物系教授 中国生物奥林匹克竞赛委员会委员
曹保义	北京师范大学二附中副校长 生物教研组组长 中学高级教师

高建军　湖南长沙一中生物教研组组长
　　　　中学高级教师

石长地　首都师范大学研究生处教师
　　　　数学奥林匹克专业研究生毕业
　　　　教育学硕士

贺贤孝　辽宁师范大学数学系教授
　　　　辽宁数学教育学会副会长

杨　骞　辽宁师范大学数学系副教授
　　　　大连市奥林匹克学校校长

由　崚　北京市宣武区中学教研室主任

秦家达　北京市 66 中物理教研组组长
　　　　中学高级教师

高玉镰　北京师范大学附中物理高级教师

马凌风　北京市 15 中物理教研组组长
　　　　中学高级教师

王健子　北京市 15 中物理高级教师

目　录

第 1 讲　整数问题选讲

有关整数问题的知识已在前两册中介绍,这一讲着重于整数知识与方法的综合运用.

【例 1】 已知 $2^{1257787}-1$ 是质数,试问 $2^{1257787}+1$ 是质数还是合数? 说明理由.

分析与解　为简单起见,设 $A=2^{1257787}$,则此题相当于

$A-1$ 是质数,问 $A+1$ 是质数还是合数?

我们知道,在连续 3 个自然数 $A-1$、A、$A+1$ 中,必有一个是 3 的倍数. $A-1$ 是大于 3 的质数,故 $A-1$ 不是 3 的倍数. 但 A 显然不是 3 的倍数,因而 $A+1$ 是 3 的倍数,又 $A+1>3$,故 $A+1$ 是合数.

说明　(1)形如 2^n-1 的质数称为梅森质数,梅森质数 $2^{1257787}-1$ 是一个 378632 位数. 于 1996 年 9 月 4 日由美国克雷研究所利用大型电子计算机得到的,这是人类迄今所知道的最大质数.

(2)证明一个整数 N 是合数的重要方法之一是首先证明 N 能被某个质数整除,再证整数 N 大于这个质数.

思考　一般地,如果 2^n-1 与 2^n+1 中有一个是质数,其中自然数 $n>2$,则另一个一定是合数,请读者证明一下.

【例 2】 若 a 为自然数,试问 a^4-3a^2+9 是质数还是合数? 给出你的证明.

分析与解　判断一个多项式形式的数是质数还是合数,经常使用因式分解法.

$$a^4-3a^2+9=(a^4+6a^2+9)-9a^2$$

$$=(a^2+3)^2-(3a)^2$$
$$=(a^2-3a+3)(a^2+3a+3)$$

如果两个因式都大于 1,则为合数;如果有一个因式为 1,就需考察另一因式来确定.

显然,有

$$a^2-3a+3<a^2+3a+3$$

如果　$a^2-3a+3>1$,即

$$a^2-3a+2>0$$
$$(a-1)(a-2)>0$$

由此可知,当 $a>2$ 时上式成立,a^4-3a^2+9 是合数.

当 $a=1$ 时,$a^4-3a^2+9=7$ 为质数.

当 $a=2$ 时,$a^4-3a^2+9=13$ 为质数.

☞ **说明**　解此类题目最易出现的错误是,一旦多项式能分解因式,就认为该数是合数.

☞ **思考**　设 a 是自然数,试确定 a^4+4 是否为合数?

☞ **【例 3】**　试证,每个大于 6 的自然数 n 都可以表示成两个大于 1 且互质的自然数之和.

☞ **分析与解**　先观察特例:

$7=2+5=3+4$,　$8=3+5$,

$9=2+7=4+5$,　$10=3+7$,

$11=2+9=3+8=4+7=5+6$,　$12=5+7$,

$13=2+11=3+10=4+9=5+8=6+7$,　$14=3+11=5+9$.

不难发现,n 为奇数与偶数的分解形式有些不同.显然,当 n 为奇数时,应选两个数一奇一偶,而 n 为偶数时,应选两个奇数.

当 n 为奇数时,$n=2+(n-2)$,显然,2 与 $n-2$ 都大于 1,且 $n-2$ 为奇数与 2 互质.

当 n 为偶数时,$n=3+(n-3)$,显然,只有 n 不能被 3 整除时,才符合题意.

由此启发出下面的一般性证明:

设 n 是大于 6 的任一自然数,取小于 n 且不能整除 n 的最小质数 p(如前面的 2、3),不难证明,$p<n-1$.则 $n=p+(n-p)$,显然,p 与 $n-p$ 互质,且 $p>1,n-p>1$.

☞ **【例 4】** 设 d_1 与 d_2 是正整数 N 的最小的两个约数,且 $d_1<d_2$,试问是否存在这样的正整数 N,能够找到一个自然数 n,使满足

$$d_1^n+d_2^n=N$$

☞ **分析与解** 当 N 为奇数时,则 N 的所有约数都是奇数,因此,d_1^n 与 d_2^n 都是奇数,其和必为偶数不可能等于奇数 N,故 N 不为奇数.

当 N 为偶数时,则 $d_1=1,d_2=2$,于是

$$d_1^n+d_2^n=1+2^n$$

为奇数,与 N 是偶数相矛盾.

综上所述,所求的正整数 N 不存在.

☞ **说明** 此题使用了奇偶性分析法,它是解决整数问题的重要方法.

☞ **【例 5】** 设 p 是大于 2 的质数,求证$\frac{2}{p}$有且仅有一种方式表示成

$$\frac{2}{p}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \quad ①$$

其中,x 与 y 是正整数且 $x<y$.

☞ **分析与证** 方程①可化为

$$(2x-p)(2y-p)=p^2$$

由于 $x<y$,故 $2x-p<2y-p$,又 p 为质数,因而 p^2 只有一种分解方式.

$$2x-p=1,2y-p=p^2.$$

解之得 $x=\frac{p+1}{2},y=\frac{p(p+1)}{2}$.

说明 (1)此题证明了形如$\frac{2}{p}$的分数可以化为两个不同的单位分数之和.把一个分数化为若干个单位分数之和,是一个历史悠久的数学难题.例如,直到现在为止,数学家还没有解决是否能将真分数$\frac{4}{n}$(n 为大于 4 的自然数)化为三个单位分数之和.

(2)将形如 $axy+b(x+y)=c$ 的式子化为

$$(ax+b)(ay+b)=ac+b^2$$

是解决整数问题常用的方法.

思考 你能证明,"对任何大于 1 的自然数 n,$\frac{1}{n}$都可以化为两个不同单位分数之和"吗?

【例 6】 已知 $27^5+84^5+110^5+133^5=v^5$,求 v.

分析与解 由于任一数的 5 次方的个位数字与原数的个位数字相同,因此,v 的个位数字是 4.不难证明:

(1)方程左边的四个数之和能被 2 和 3 整除,因而,能被 6 整除.即 v^5 能被 6 整除,进而,v 也能被 6 整除.

(2)方程左边除以 5 余 4,即 v^5 除以 5 余 4,但 v^5-v 能被 10 整除,因而,v 除以 5 余 4.

满足上述两个条件的最小正整数为 24,故

$$v=30m+24,\ m \text{ 为正整数}.$$

由已知方程可知

$$133^5<v^5<5\cdot 133^5$$

从而
$$133<v<\sqrt[5]{5}\cdot 133<1.5\times 133=199.5.$$

故 $v=144$ 或 174.

但,$174^5=133^5\cdot\left(\frac{174}{133}\right)^5>133^5\times 1.3^5>133^5\times 3$

且 $133^5\times 3>133^5+110^5+(84+27)^5>133^5+110^5+84^5+27^5$.

故 $v=174$ 不是方程的根,经检验,$v=144$ 适合方程,为所求的 v 值.

☞ **说明** (1)大数学家欧拉早在300年前就提出一个猜想:方程 $x^5+y^5+z^5+u^5=v^5$ 没有正整数解.直到1966年才有人找出一组正整数解

$$27^5+84^5+110^5+133^5=144^5$$

从而,证明欧拉这一猜想是错误的.

(2) a^5-a 能被10整除可证明如下:

$$\begin{aligned}a^5-a&=a(a-1)(a+1)(a^2+1)\\&=a(a-1)(a+1)[(a^2-4)+5]\\&=(a-2)(a-1)a(a+1)(a+2)+5a(a-1)(a+1)\end{aligned}$$

其中 $a-2$、$a-1$、a、$a+1$、$a+2$ 是连续5个数,必有5的倍数,且这5个数中必有偶数,因而能被10整除.不难证明 $5a(a-1)(a+1)$ 也能被10整除.

故 a^5-a 能被10整除.由此也可推出 a^5 与 a 的个位数字相同.

☞ **【例7】** 设 n 是大于3的整数,且 $2^n=10a+b$,其中 a、b 都是正整数,$b<10$,求证6能整除 ab.

☞ **分析与证** 显然,b 是 2^n 的个位数字,因而 $b=2$、4、6、8,且 n 每增加4,个位数字重复出现.不难证明,$n=4k$(k 为正整数)时,$b=6$,显然,有 ab 能被6整除.

当 $n=4k+i$(k 为正整数),$i=1$、2、3时,由 $16\equiv1\pmod 3$ 得 $16^k\equiv1\pmod 3$.从而,$16^k=3M+1$,M 为整数

$$2^{4k+i}=16^k\cdot2^i=(3M+1)\cdot2^i=3M\cdot2^i+2^i$$

因此,

$$10a=2^n-b=2^{4k+i}-2^i=3M\cdot2^i$$

能被3整除,故 a 能被3整除,但此时 $b=2^i$ 为偶数,故 ab 能被6整除.

☞ **说明** 此题证明的关键是注意到个位数字 b 随着 n 每增加4而重复出现,这就引起了对 n 是否为4的倍数的讨论.

☞ **【例8】** 设正整数 a、b、c,满足 $a^2+b^2=c^2$,求证 abc 能被60

整除.

分析与证 $60=2^2\times3\times5$,只需证 a、b、c 中有能被 3、4、5 整除者. 为了证明 a、b、c 中有能被 3 整除者,设 a、b、c 除以 3 的余数分别为 r_1、r_2、r_3,如果三个余数均不为 0,则必有

$$r_i^2\equiv1\ (\mathrm{mod}\ 3),\ i=1,2,3.$$

故 $a^2+b^2-c^2\equiv r_1^2+r_2^2-r_3^2\equiv1\ (\mathrm{mod}\ 3)$

显然,与 $a^2+b^2-c^2=0$ 相矛盾,即 r_1、r_2、r_3 不可能都不为 0,因而,a、b、c 中有能被 3 整除者.

再证 a、b、c 中有能被 4 整除者,设 a、b、c 的最大公约数为 1,由 $a^2+b^2=c^2$ 不难证出,a、b、c 中有且仅有一个偶数. 如果 a、b 都是奇数,设 $a=2n-1$,$b=2m-1$,n、m 都是整数. 则

$$\begin{aligned} a^2+b^2 &=[4n(n-1)+1]+[4m(m-1)+1] \\ &=4[n(n-1)+m(m-1)]+2 \end{aligned}$$

不能被 4 整除,但 c 是偶数,c^2 能被 4 整除,矛盾. 因而,a、b 不都是奇数,设 b 是偶数,$a=2s-1$,$c=2t-1$,s、t 是整数,则

$$b^2=c^2-a^2=4t(t-1)-4s(s-1)\equiv0\ (\mathrm{mod}\ 8)$$

进而,b^2 能被 16 整除,b 能被 4 整除.

最后证 a、b、c 中有能被 5 整除者.

设 a、b、c 除以 5 的余数分别为 r_4、r_5、r_6,且均不为 0.

$$a^2+b^2-c^2\equiv r_4^2+r_5^2-r_6^2(\mathrm{mod}\ 5)$$

但 $r_i^2\equiv1$ 或 $4\ (\mathrm{mod}\ 5)$,$i=4,5,6$.

因此,$r_4^2+r_5^2-r_6^2$ 不能被 5 整除. 与 $a^2+b^2-c^2=0$ 矛盾,故 r_4、r_5、r_6 中必有 0,即 a、b、c 中有 5 的倍数.

说明 适合 $a^2+b^2=c^2$ 的正整数组(a,b,c)称为勾股数,此题证明了:勾股数中有能被 3、4、5 整除者. 当 a、b、c 的最大公约数是 1 时,求勾股数的公式是

$$a=m^2-n^2,\ b=2mn,\ c=m^2+n^2,$$

其中 m、n 互质且奇偶性相反,$m>n$.