普通高等教育"十一五"国家级规划教材

高等数学

（经济管理类）

第4版

主　编　刘金林

副主编　蒋国强　钱　林

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育"十一五"国家级规划教材

高等数学

（经济管理类）

第4版

主　编　刘金林
副主编　蒋国强　钱　林
参　编　孟国明　翟高岭　蔡苏淮

机械工业出版社

本书系普通高等教育“十一五”国家级规划教材，内容包括函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理及导数的应用、不定积分、定积分及其应用、微分方程及差分方程初步、多元函数微积分学、无穷级数共9章，各节后配有习题，各章后配有总习题，并在书后给出了部分习题的参考答案与提示．为了提高读者运用数学知识处理实际经济问题的能力，书中还介绍了一定数量的经济应用例题．本书结构严谨，逻辑清晰，叙述详尽，通俗易懂，例题较多，习题丰富，便于教与学．

本书可供高等院校经济管理类各专业选用，也可供其他相关专业选用或供报考经济管理类硕士研究生的读者参考．

图书在版编目（CIP）数据

高等数学：经济管理类/刘金林主编．—4版．—北京：机械工业出版社，2013.8
普通高等教育“十一五”国家级规划教材
ISBN 978-7-111-43397-2

Ⅰ．①高…　Ⅱ．①刘…　Ⅲ．①高等数学—高等学校—教材　Ⅳ．①O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2013）第165992号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号　邮政编码100037）
策划编辑：韩效杰　责任编辑：韩效杰　陈崇昱
责任校对：刘雅娜　封面设计：路恩中
责任印制：杨　曦
保定市中画美凯印刷有限公司印刷
2013年9月第4版第1次印刷
184mm×240mm・28印张・484千字
标准书号：ISBN 978-7-111-43397-2
定价：55.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务	网络服务
社服务中心：(010)88361066	教材网：http://www.cmpedu.com
销售一部：(010)68326294	机工官网：http://www.cmpbook.com
销售二部：(010)88379649	机工官博：http://weibo.com/cmp1952
读者购书热线：(010)88379203	**封面无防伪标均为盗版**

第 4 版前言

《高等数学(经济管理类)》(第 4 版)是在《高等数学(经济类)》(第 3 版)的基础上,根据编者多年丰富的教学实践经验和对教学改革的认识,以及使用本教材的同行和读者们提出的宝贵意见进行修订的.

第 4 版保持了第 3 版的优点与特色,着重强调数学的思想方法,注重培养学生的数学思维能力,提高学生的数学素质与创新能力.为此我们重新进行了章节的划分、内容的重写和结构的调整.修订时也注意吸收国内外一些优秀教材在习题配置方面的优点,对本书第 3 版中的习题做了较大的调整.

本次修订工作由刘金林、蒋国强、钱林、孟国明、翟高岭、蔡苏淮完成.

本次修订过程中,得到了机械工业出版社和扬州大学的大力支持和帮助,并得到了扬州大学教材出版基金资助,在此表示衷心的感谢.

书中难免有不妥之处,敬请广大专家、同行及读者给予批评指正.

目　　录

第 1 章

函　数

世界万物都处于运动和变化之中.哪里有运动和变化,哪里就有变量.变量之间的关系反映了事物运动的规律.函数是变量之间关系的一种体现,是近代数学的一个基本概念,是微积分学的主要研究对象.

作为学习微积分的准备,本章主要讲述函数的一些基本知识.

1.1　实数

数(shù)起源于数(shǔ)和度量.人类对于数的认识过程与数学科学的发展过程是密不可分、相互影响的.因为微积分学是在实数范围内研究函数的,所以我们先简单介绍实数的有关知识.

1.1.1　实数的基本结论

(1)实数分为有理数和无理数两类.

(2)实数可以比较大小.任意两个实数 a,b 必满足下述三个关系之一:

$$a<b,\quad a=b,\quad a>b.$$

(3)任何两个不相等的实数之间必有另一个实数.

(4)建立数轴后,实数与数轴上的点一一对应,故习惯上也称数为"点".

(5)任意两个实数的和、差、积、商(除数不为 0)仍是实数.

1.1.2　实数的绝对值

实数 a 的绝对值记为 $|a|$,定义为 $|a|=\begin{cases}a, & a\geqslant 0,\\ -a, & a<0,\end{cases}$ 其几何意义是

数轴上的点 a 到原点的距离. 而 $|a-b|$ 表示点 a 与点 b 之间的距离.

实数的绝对值具有下列性质:

(1) $|a|\geqslant 0$, $|a|=0$ 当且仅当 $a=0$.

(2) $|a|=|-a|$, $|a|=\sqrt{a^2}$.

(3) $-|a|\leqslant a\leqslant |a|$, $|a|\leqslant B(B>0)$ 等价于 $-B\leqslant a\leqslant B$.

(4) $|a+b|\leqslant |a|+|b|$(三角不等式).

(5) $|a-b|\geqslant \Big||a|-|b|\Big|\geqslant |a|-|b|$.

(6) $|ab|=|a||b|$, $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}\quad(b\neq 0)$.

1.2 常用数集

元素都是数的集合称为**数集**,常见的数集有以下几种:

(1)全体实数的集合,记为 $\mathbf{R}$.

(2)全体整数的集合,记为 $\mathbf{Z}$.

(3)全体自然数的集合 $\{0,1,2,3,\cdots\}$,记为 $\mathbf{N}$.

(4)全体正整数的集合 $\{1,2,3,\cdots\}$,记为 $\mathbf{N}_+$ 或 $\mathbf{Z}_+$.

(5)全体有理数的集合,记为 $\mathbf{Q}$.

区间也是常用的一类数集.

设 $a,b\in\mathbf{R}$,且 $a<b$,则:

数集 $\{x|a<x<b\}$ 称为**开区间**,记作 (a,b),即 $(a,b)=\{x|a<x<b\}$;

数集 $\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为**闭区间**,记作 $[a,b]$,即 $[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$;

数集 $\{x|a\leqslant x<b\}$ 及 $\{x|a<x\leqslant b\}$ 称为**半开区间**,分别记作 $[a,b)$ 与 $(a,b]$,即 $[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$, $(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$.

以上这些区间都称为**有限区间**, a,b 称为这些**区间的端点**,数 $b-a$ 称为这些**区间的长度**. 此外,还有所谓**无限区间**. 引进记号 $+\infty$(读作正无穷大)及 $-\infty$(读作负无穷大),则可类似地定义无限区间. 无限区间有两类共四种,它们的记号及定义如下:

$$(a,+\infty)=\{x|x>a\},\ (-\infty,b)=\{x|x<b\};$$
$$[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\},\ (-\infty,b]=\{x|x\leqslant b\}.$$

实数集 $\mathbf{R}$ 也可记作 $(-\infty,+\infty)$,即 $(-\infty,+\infty)=\mathbf{R}$,它也是无限区间.

在本教材中,当不需要辨明所讨论区间的类型时,我们常将其简称为"区间",且常用大写字母 I 表示.

当考虑某点附近的点所构成的集合时,我们需要引入邻域的概念.

开区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ ($\delta>0$)称为**点 x_0 的邻域**,记为 $U(x_0,\delta)$ 或 $U(x_0)$,x_0 称为**邻域的中心**,δ 称为**邻域的半径**. 显然,邻域 $U(x_0,\delta)$ 也可表示为 $\{x \mid |x-x_0|<\delta\}$.

点 x_0 的邻域去掉中心 x_0 后,得到的集合 $(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$ 称为**点 x_0 的去心邻域**,记为 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 或 $\mathring{U}(x_0)$. 显然,$\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x \mid 0<|x-x_0|<\delta\}$.

当不需要指明邻域的半径时,我们常说**"点 x_0 的某一邻域"**(或**"点 x_0 的某一去心邻域"**),并记为 $U(x_0)$(或 $\mathring{U}(x_0)$). 有时为了方便,也把开区间 $(x_0-\delta,x_0)$ 称为**点 x_0 的左邻域**,而把开区间 $(x_0,x_0+\delta)$ 称为**点 x_0 的右邻域**.

1.3 函数

1.3.1 常量与变量

定义 1-1 在观察某事物的过程中,若某个量的取值始终不变,则称该量为**常量**;而可取不同的值的量称为**变量**.

由定义可知,一个量是否为变量与观察事物的过程有关. 例如,重力加速度在同一地点是常量,在不同地点观测,则它是变量. 又如,市场上某种商品的价格在短期内是常量,而在较长的时间内它会变化,是变量. 因此,常量与变量的区别不是绝对的,它们在一定的条件下可以相互转化. 从取值范围来看,常量可以看成是仅在单元素集合取值的量,因此常量可看成是变量的特例.

1.3.2 函数的概念

在研究问题时涉及的变量往往不止一个. 变量之间常常会有某种确定的对应关系.

【例 1-1】 设某种商品的价格为 2 元/件,销售量为 q 件,销售收入为 R 元,则 $R=2q$. 销售量变化时,销售收入也随之发生变化,且销售量确定后,销售收入也随之确定.

【例 1-2】 某气象站用温度自动记录仪记录气温变化情况. 设某天 24h 内的气温变化曲线如图 1-1 所示.

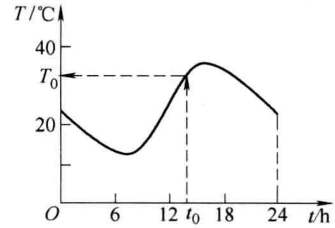

图 1-1

由图可知，该天任一时刻 t_0 对应的气温为 T_0(℃).

【例 1-3】 据统计，1960—1966 年世界人口增长情况如表 1-1 所示.

表 1-1

年份	1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966
人口/百万	2972	3061	3151	3213	3234	3285	3356

由表可以看出人口数量随年份变化的对应规律.

以上几个例子的实际意义虽不同，但都通过特定对应法则(公式、图像、表格)反映了两个变量之间的对应关系. 这种对应关系就是我们要研究的函数关系.

定义 1-2 设 x,y 是两个变量，D 是一个非空数集，对于每个 $x\in D$，变量 y 按照某个对应法则总有唯一确定的数值与之对应，则称 y 是 x 的**函数**，记作 $y=f(x)$，有时简记为 $f(x)$ 或 f，称 x 是**自变量**，y 是**因变量**，称 D 是函数的**定义域**，记作 D_f，即 $D_f=D$.

当变量 x 取值 $x_0\in D$ 时，称 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义，与之对应的变量 y 的值 y_0 被称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值，并记为 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$. 当 x 取遍 D 中的各个值时，对应的函数值的全体组成的集合

$$Z_f=\{y\,|\,y=f(x),\ x\in D\}$$

称为函数的**值域**. 平面直角坐标系中的点集 $\{(x,y)\,|\,y=f(x),\ x\in D\}$ 称为**函数的图像**.

函数 $y=f(x)$ 的图像通常是一条曲线，因此常常又称函数 $y=f(x)$ 的图像为曲线 $y=f(x)$. 有的函数的图像只是散布在坐标平面上的一些点，如例 1-3 的图像. 有的函数的图像无法描绘出来，如 Dirichlet 函数

$$y=\begin{cases}1, x\in \mathbf{Q},\\ 0, x\in \mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}.\end{cases}$$

关于函数的定义域，对于有实际背景的函数，其定义域应根据实际背景中变量的实际意义确定. 例如，圆的面积 s 是半径 r 的函数，即 $s=\pi r^2$，由于圆的半径一定是正数，因此这个函数的定义域为区间 $(0,+\infty)$. 对于与具体的实际问题无关，而抽象地用解析式(公式)表示的函数，通常约定其定义域是使得解析式有意义的自变量的一切实数取值所构成的集合. 这种定义域是由函数的解析式自然确定的，给定了解析式也就同时给定了定义域，故称为函数的**自然定义域**.

【例 1-4】 求函数 $y=\dfrac{\sqrt{x+2}}{x-3}+\lg(5-x)$ 的定义域.

解 使函数有意义,须$\begin{cases}x+2\geqslant 0,\\ x-3\neq 0,\\ 5-x>0,\end{cases}$即 $D=\{x\mid -2\leqslant x<5, x\neq 3\}$.

由函数的定义可知,只要函数的定义域与对应法则确定了,函数也就确定了,而自变量与因变量用什么字母表示并不重要.因此,定义域与对应法则称为**确定函数的基本要素**.两个函数相同当且仅当它们的定义域与对应法则分别相同.

【例 1-5】 判断下列各组中的两函数是否为同一个函数.

(1)函数 $y=\dfrac{x}{x(1+x)}$与函数 $y=\dfrac{1}{1+x}$.

(2)函数 $y=|x|$, $x\in\{-1,0,1\}$与函数 $s=t^2$, $t\in\{-1,0,1\}$.

(3)函数 $y=|x|$, $x\in\{-1,0,1\}$与函数 $y=x^3$, $x\in\{-1,0,1\}$.

解 (1)这两个函数的定义域不同.前者的定义域为$\{x\mid x\neq 0, x\neq -1\}$,后者的定义域为$\{x\mid x\neq -1\}$,故它们不是同一个函数.

(2)这两个函数的定义域和对应法则分别相同,所以是同一个函数.

(3)这两个函数的定义域相同,但对应法则不同,所以不是同一个函数.

1.3.3 函数表示法

在中学里我们已经学过,表示函数的常用方法有解析法(公式法)、图像法和表格法.本课程所讨论的函数一般用解析法表示,有时还同时画出其图像,以便对函数进行分析研究.

根据函数解析式形式的不同,函数又可分为**显函数**与**隐函数**.如果因变量可以由自变量的解析式直接表示出来,那么就称函数为**显函数**.例如,$y=x^2-3x$.我们遇到的函数一般都是显函数.如果自变量 x 与因变量 y 的对应关系由一个二元方程 $F(x,y)=0$ 来表示,那么这样的函数称为**隐函数**.例如,由方程 $\sqrt[3]{x-y}+\sin 2x-1=0$ 确定的函数就是隐函数.

用解析式表示函数时,一般一个函数仅用一个式子表示,但有些函数在其定义域的不同部分,对应法则需要用不同的式子表示,这种函数称为**分段函数**.例如,

$$y=\begin{cases}x^2, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-x, & x>1\end{cases}$$

就是定义在$[-1,+\infty)$上的一个分段函数.当$x\in[-1,1]$时,函数的对应法则由 $y=x^2$ 确定;当 $x\in(1,+\infty)$时,函数的对应法则由 $y=2-x$ 确

定. 该函数的图像如图 1-2 所示.

又例如,符号函数(图像见图 1-3)

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ 1, & x>0 \end{cases}$$

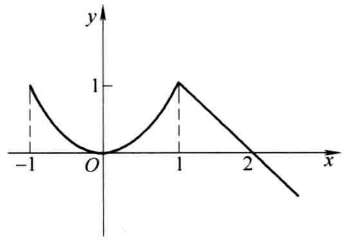

图 1-2

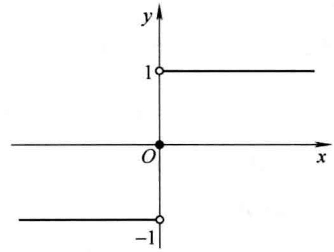

图 1-3

与取整函数

$$y = [x]$$

都是分段函数. 这里记号 $[x]$ 表示不超过数 x 的最大整数. 例如, $[2.1]=2$, $[4.9]=4$, $[\pi]=3$, $[-2.03]=-3$ 等.

必须指出的是,在定义域的不同范围内用几个不同的式子表示一个(不是几个!)函数,不仅不会与函数的定义产生矛盾,而且还具有现实意义. 在许多实际问题中经常会遇到分段函数的情形.

【例 1-6】 某运输公司是这样规定每吨货物的运价的:在 $a$km 以内时,运价为 k 元/km;超过 $a$km 时,超过部分的运价为 $0.8k$ 元/km. 试建立运价 m 与里程 s 之间的函数关系.

解 根据题意,可得运价 m 与里程 s 之间的函数关系为

$$m = \begin{cases} ks, & 0<s\leqslant a, \\ ka+0.8k(s-a), & s>a. \end{cases}$$

1.4 函数的几种特性

1.4.1 单调性

定义 1-3 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,区间 $I \subset D$.

(1)若 $\forall x_1, x_2 \in I$,当 $x_1 < x_2$ 时,有 $f(x_1) < f(x_2)$,则称**函数 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加**,并称区间 I 为**函数 $f(x)$ 的单调增区间**;

(2)若 $\forall x_1,x_2\in I$,当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称**函数 $f(x)$ 在区间 I 上单调减少**,并称区间 I 为**函数 $f(x)$ 的单调减区间**.

函数的单调增区间和单调减区间统称为函数的单调区间. 若函数 $f(x)$ 在其定义域内单调增加(或单调减少),则称 $f(x)$ 为**单调增函数**(或**单调减函数**). 单调增函数和单调减函数统称为**单调函数**.

从几何上看,单调增函数的图形是沿 x 轴正向逐渐上升的;单调减函数的图形是沿 x 轴正向逐渐下降的.

【例 1-7】 (1)函数 $y=x^2$ 在区间 $(-\infty,0)$ 内单调减少,在区间 $(0,+\infty)$ 内单调增加. 但此函数不是单调函数.

(2)函数 $y=x^3$ 在其定义域上是单调增加的,是单调函数.

(3)函数 $y=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q},\\ -1, & x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}\end{cases}$ 在任何区间上都不单调.

1.4.2 有界性

定义 1-4 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,数集 $I\subseteq D$.

(1)如果存在正数 C,使 $\forall x\in I$,都有 $|f(x)|\leqslant C$,则称函数 $f(x)$ 在 I 上**有界**. 否则称函数 $f(x)$ 在 I 上无界,即若对于任意给定的正常数 M,存在 $x_0\in I$,使 $|f(x_0)|>M$.

(2)如果存在常数 C,使 $\forall x\in I$,都有 $f(x)\leqslant C$,则称函数 $f(x)$ 在 I 上**有上界**.

(3)如果存在常数 C,使 $\forall x\in I$,都有 $f(x)\geqslant C$,则称该函数在 I 上**有下界**.

若函数在其定义域上有界,则称此函数为**有界函数**. 显然,有界函数既有上界又有下界. 反之,既有上界又有下界的函数必有界. 有界函数在图像上的特征是它的图像夹在两条水平线之间.

【例 1-8】 (1)函数 $y=\sin x,y=\cos x,y=\dfrac{2x}{1+x^2}$ 都是有界函数.

(2)函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(1,2)$ 内有界,在区间 $(0,1)$ 内无界,但在区间 $(0,1)$ 内有下界.

由例 1-7、例 1-8 可知,函数的单调性、有界性都与所讨论的区间有关.

1.4.3 奇偶性

定义 1-5 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,且对于 $\forall x\in D$,总有

$-x\in D$.

(1)若 $\forall x\in D$,有 $f(-x)=f(x)$,则称此函数为**偶函数**;

(2)若 $\forall x\in D$,有 $f(-x)=-f(x)$,则称此函数为**奇函数**.

由定义 1-5 可知,奇(偶)函数的定义域一定关于原点对称.奇函数的图像关于原点中心对称,偶函数的图像关于 y 轴轴对称.

【例 1-9】 判定下列函数的奇偶性.

(1) $f(x)=x^3\cos x$.

(2) $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

(3) $f(x)=x^3+x^2$.

解 易见,所给函数的定义域都是 $\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)$,它关于原点对称.

(1)因为

$$f(-x)=(-x)^3\cos(-x)=-x^3\cos x=-f(x),$$

所以,$f(x)$为奇函数.

(2)因为

$$\begin{aligned}f(-x)+f(x)&=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})+\ln(x+\sqrt{1+x^2})\\&=\ln\left((-x+\sqrt{1+x^2})(x+\sqrt{1+x^2})\right)\\&=\ln 1=0,\end{aligned}$$

从而 $f(-x)=-f(x)$,此函数为奇函数.

(3)因为 $f(-x)=-x^3+x^2$ 不恒等于 $f(x)$或$-f(x)$,故此函数既非奇函数,亦非偶函数.

1.4.4 周期性

定义 1-6 设函数 $f(x)$的定义域为 D.如果存在常数 $T>0$,使对 $\forall x\in D$,都有 $x\pm T\in D$,且

$$f(x+T)=f(x),$$

则称 $f(x)$为**周期函数**,称常数 T 为此函数的**周期**.

通常,周期函数的周期是指**最小正周期**.例如,$y=\sin x$,$y=\cos x$ 都是周期函数,周期为 2π.但并非每个周期函数都有最小正周期.例如,函数 $y=C$(C为某个常数)是周期函数,任何正实数均为其周期,但它没有最小正周期.

【例 1-10】 证明 $f(x)=x\sin x$ 不是周期函数.

证 反证法

设 $f(x)$以 T 为周期,则 $\forall x\in\mathbf{R}$,都有