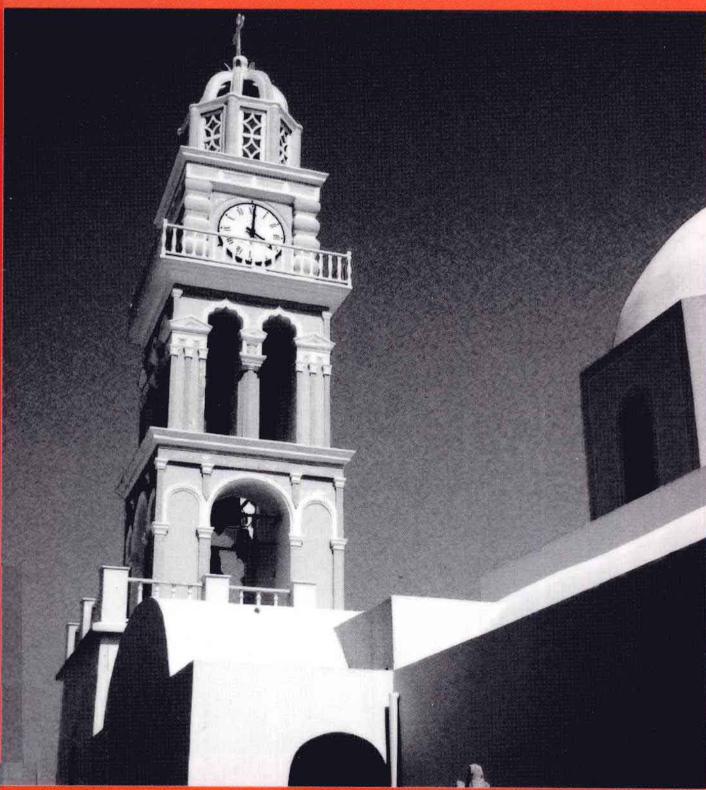
普通高等教育基础课规划教材

A CONCISE COURSE IN HIGHER MATHEMATICS

高等数学简明教程

（下册）

赵显曾 主 编
秦宣华 副主编



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育基础课规划教材

高等数学简明教程

下　册

主　编　赵显曾
副主编　秦宣华

机 械 工 业 出 版 社

本书是别具特色的高等数学新颖教材，是笔者从教多年的总结．本书与众不同，别开生面，内容精练，顺应了科学发展与进步．体系严谨、表述准确，文字流畅，富有启发性和创新气息．

本书共八章，分上、下两册．上册包括极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学、微分方程；下册包括无穷级数、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学．

图书在版编目（CIP）数据

高等数学简明教程．下册/赵显曾主编．—北京：机械工业出版社，2012.11

普通高等教育基础课规划教材

ISBN 978-7-111-40043-1

Ⅰ．①高…　Ⅱ．①赵…　Ⅲ．①高等数学－高等学校－教材　Ⅳ．①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 246154 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）

策划编辑：郑　玫　责任编辑：郑　玫　李　乐　版式设计：霍永明

责任校对：张　媛　封面设计：张　静　责任印制：乔　宇

北京机工印刷厂印刷（三河市南杨庄国丰装订厂装订）

2013 年 1 月第 1 版第 1 次印刷

169mm × 239mm · 16.5 印张 · 321 千字

标准书号：ISBN 978-7-111-40043-1

定价：29.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务	网络服务
社服务中心：（010）88361066	教材网：http://www.cmpedu.com
销售一部：（010）68326294	机工官网：http://www.cmpbook.com
销售二部：（010）88379649	机工官博：http://weibo.com/cmp1952
读者购书热线：（010）88379203	**封面无防伪标均为盗版**

前　言

本书是别具特色的本科高等数学新颖教材，是根据笔者从教多年讲授高等数学的备课笔记总结而成的．高等数学是一门重要的基础课，不仅为后续课程提供必要的数学工具，而且对培养理性思维起着举足轻重的作用。本书与众不同，别开生面，内容精练，顺应了科学发展与进步，体系结构严谨，概念表述准确，文字流畅，富有启发性和创新的气息．本书特别具有以下几个特点：

1．行文深入浅出，注意与中学数学教学的衔接；注重数学概念的几何背景和物理背景，启迪发散型思维．作为极限的应用，讲了曲线的渐近线；作为例题证明了利用对称性计算重积分的方法．

2．顺应科学发展与进步，用导数定义微分，用偏导数定义全微分，用第一型线、面积分定义第二型线、面积分，内容精练．

3．重点突出，难点分散，例题剖析透彻，思路清晰，循循善诱，或一题多解，提高认知程度和分析能力，学会学习理论联系实际，以利于应用．

4．习题丰富、题型较多，并附有习题答案与题解，是全书不可缺少的一个组成部分．因此，本书为教和学提供了一本对口适用的教科书或教学参考书，也是数学工作者的参考书。

由于编者水平所限，谬误和不当之处在所难免，恳请读者不吝赐教．

本书由赵显曾主编，秦宣华任副主编，参加编写的还有李刚、王捷、郭晓丽。

编　者

2010 年 10 月 12 日

目　录

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第 5 章 无 穷 级 数

无穷级数是微积分学的一个重要组成部分，它是表达新函数的有力工具，在理论上和实际应用中都非常重要。本章将研究数项级数和函数项级数两部分：对于数项级数，主要研究其收敛性判别法；对于函数项级数，主要研究幂级数的分析性质与将函数展开为幂级数问题以及将周期函数展开为傅里叶(Fourie)级数的问题。

5.1 数项级数的概念与性质

数项级数是这一章的先导和理论基础，学习时要注意它与数列极限的密切关系.

5.1.1 数项级数的概念

定义 1 设$\{a_n\}$是一数列，则称逐项相加的“形式和”

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

为**数项无穷级数**，简称**数项级数**或**级数**. 其中 a_1，a_2，…，a_n，…都称为该级数的**项**；特别称 a_n 为其**通项**，并把级数缩写为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$，即

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots.$$

众所周知，有限个数的和还是一个数. 而级数是无限多个数相加，由于逐个相加是永远加不完的，那么如何理解这个无限相加的过程呢？为此，可以采用通过“有限”来认识“无限”，即用极限方法加以解决.

定义 2 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的前 n 项之和

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \quad (n = 1,2,\cdots)$$

称为它的**第 n 个部分和**，简称为**部分和**；由部分和构成的数列$\{S_n\}$称为**部分和数列**. 若部分和数列$\{S_n\}$收敛，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **收敛**，并称

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

为该级数的**和**，记作 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$；否则，称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **发散**．发散的级数没有和．

由定义 2 可知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与其部分和数列 $\{S_n\}$ 成一一对应．因此，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的收敛性等价于 $\{S_n\}$ 的收敛性．若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛于 S，则部分和 S_n 是 S 的近似值，它们之间的差

$$r_n = S - S_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i$$

称为该级数的**余和**．用 S_n 代替 S 所产生的误差是 $|r_n|$．

例 1　判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ 的收敛性．

解　由于通项

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

所以部分和

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

于是，有

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 1.$$

因此该级数收敛，且 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$．

例 2　讨论**几何级数（或等比级数）**

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots \quad (a \neq 0)$$

的收敛性．

解　该级数的部分和

$$S_n = \begin{cases} \dfrac{a(1-q^n)}{1-q}, & q \neq 1, \\ na, & q = 1. \end{cases}$$

当 $|q| < 1$ 时，由于 $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$，所以 $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q}$，此时几何级数收敛于 $\frac{a}{1-q}$，即 $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q}$；当 $|q| > 1$ 时，由于 $\lim_{n\to\infty} q^n = \infty$，故 $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$，几何级数发散；当 $q = 1$ 时，显然级数也发散．当 $q = -1$ 时，部分和

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

$$S_n=\begin{cases}a, & n \text{ 为奇数},\\ 0, & n \text{ 为偶数},\end{cases}$$

显然部分和数列 $\{S_n\}$ 发散，因而级数也发散．

综上所述，当且仅当 $|q|<1$ 时，几何级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n$ 收敛，其和为 $\dfrac{a}{1-q}$.

例 3　证明：**调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散**．

证　因为函数 $\dfrac{1}{x}$ 在区间 $[n, n+1]$ 上严格单调减且连续，由积分不等式

$$\frac{1}{n}>\int_n^{n+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln x\Big|_n^{n+1}=\ln\frac{n+1}{n}\quad(n=1,2,\cdots)$$

可知调和级数的部分和

$$\begin{aligned}S_n&=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}>\ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}\\&=\ln\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{n+1}{n}\right)=\ln(n+1).\end{aligned}$$

由极限的不等式性质，得

$$\lim_{n\to\infty}S_n\geqslant\lim_{n\to\infty}\ln(n+1)=+\infty,$$

故调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散．

5.1.2　级数的性质

利用数列极限的性质，不难证明级数的以下简单性质，而这些性质在研究级数运算和判别级数敛散性时，将起重要作用．

性质 1（级数收敛的必要条件）　若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

证　设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=S$，则等价于部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛于 S. 又因为 $a_n=S_n-S_{n-1}$，所以

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}a_n&=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})\\&=\lim_{n\to\infty}S_n-\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=S-S=0.\end{aligned}$$

注意　通项趋向于零只是级数收敛的必要条件，而不是充分条件．例如，调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 的通项趋向于零，但它却是发散的．

由性质 1 可知，若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq0$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散．常用此来说明级数是发散的．

例如级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ 发散，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\neq 0$.

例 4　判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2n+1}$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+1)^n}$.

解　(1) 由于通项的极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}\neq 0,$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2n+1}$ 发散.

(2) 由于通项的极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+1)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{\mathrm{e}}\neq 0,$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+1)^n}$ 发散.

性质 2(线性性质)　若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 都收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n+\beta b_n)$ 也收敛，且有

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n+\beta b_n)=\alpha\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\beta\sum_{n=1}^{\infty}b_n,$$

其中 α，β 是任意常数.

证　设

$$A_n=\sum_{i=1}^{n}a_i,B_n=\sum_{i=1}^{n}b_i,S_n=\sum_{i=1}^{n}(\alpha a_i+\beta b_i),$$

则 $S_n=\alpha A_n+\beta B_n$. 由题设知 $\{A_n\}$ 与 $\{B_n\}$ 都收敛，故 $\{S_n\}$ 也收敛，且有

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\alpha\lim_{n\to\infty}A_n+\beta\lim_{n\to\infty}B_n,$$

即

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n+\beta b_n)=\alpha\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\beta\sum_{n=1}^{\infty}b_n.$$

由性质 2 可知，若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)$ 发散.(知道吗？为什么？)

性质 3　在级数前面添加或删除有限项，不影响级数的敛散性.

证　设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 删除前 k 项后得到的级数为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$，也就是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 是在

级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 前面添加 k 项而得到的．根据题意，只要证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 同敛散即可．设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和为 S_n，由于 $b_n = a_{k+n}$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 的部分和

$$T_n = S_{k+n} - (a_1 + a_2 + \cdots + a_k).$$

因为 $a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ 是与 n 无关的常数，数列 $\{S_n\}$ 与 $\{S_{k+n}\}$ 同敛散，故数列 $\{S_n\}$ 与 $\{T_n\}$ 同敛散，即级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 同敛散．

性质 4 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则不改变它的各项先后次序任意添加括号后所成的新级数仍收敛，且其和不变．

证 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$，部分和数列为 $\{S_n\}$．对级数的项任意添加括号后所得的新级数为

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_{k_1}) + (a_{k_1+1} + a_{k_1+2} + \cdots + a_{k_2}) + \cdots$$
$$+ (a_{k_{n-1}+1} + a_{k_{n-1}+2} + \cdots + a_{k_n}) + \cdots,$$

显然其部分和数列为 $\{S_{k_n}\}$．$\{S_{k_n}\}$ 是 $\{S_n\}$ 的一个子数列（即 $k_n \geqslant n$，$k_{n-1} < k_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} k_n = +\infty$），从而有

$$\lim_{n\to\infty} S_{k_n} = \lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

注意，性质 4 的逆命题不成立．即若级数的项加括号后收敛，不能断言原级数一定收敛．例如，级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ 发散，但是把它的项两两相结合，便得一收敛级数

$$(1-1) + (1-1) + \cdots = 0.$$

由性质 4 可知，若加括号后所成的级数发散，则原级数必定发散．

例 5 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\dfrac{2}{n(n+1)} - \left(-\dfrac{3}{4}\right)^n\right]$ 是否收敛？若收敛，求它的和．

解 由例 1 可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)} = 1$ 收敛；由例 2 可知，几何级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(-\dfrac{3}{4}\right)^n$ 的公比 $q = -\dfrac{3}{4}$，也收敛，其和为 $-\dfrac{3}{7}$. 根据级数的线性性质，所讨论的级数收敛，且有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{n(n+1)} - \left(-\frac{3}{4}\right)^n\right] = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{3}{4}\right)^n$$
$$= 2 - \left(-\frac{3}{7}\right) = \frac{17}{7}.$$

例 6　判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{100+n}+\frac{3}{2^n}\right)$ 的敛散性.

解　由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{100+n}$ 是调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 删除前面 100 项而成的级数，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{100+n}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 同发散. 又级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2^n}$ 是公比为 $\frac{1}{2}$ 的几何级数，因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{100+n}+\frac{3}{2^n}\right)$ 发散.

习题 5.1

1. 证明下列等式:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})=1-\sqrt{2}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n(2n+1)}{(n+1)(2n-1)}=\ln 2$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=1$.

2. 求下列级数的和:

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)(3n+4)}$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3+(-1)^n}{2^n}$.

3. 判别下列级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{e^n}$;

(2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt[n]{2}}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{3^n}\right)$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\sin\frac{\pi}{n}$.

4. 判断下列命题是否正确?若正确,请给予证明;若不正确,请举出反例:

(1) 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 都发散,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ 发散.

(2) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散,且 $a_n \neq 0$,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ 收敛.

(3) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,且 $a_n \neq 0$,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ 发散.

(4) 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$ 收敛,且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

5. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_{n+1}-a_n)$ 收敛,数列 $\{na_n\}$ 也收敛,证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

6. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = 3$,级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} = 5$,求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的和.

7. 设 r_n 为收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的余和,证明 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$.

5.2 数项级数的判敛法

判别级数的敛散性是级数理论中的首要问题，也是我们学习的重点之一。但是，根据定义来判别级数的敛散性，就是判别部分和数列的敛散性，往往是很困难的．因此有必要利用级数的通项本身，给出判别级数收敛性的方法．

5.2.1 正项级数的判敛法

如果 $a_n \geqslant 0(n=1, 2, \cdots)$，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为**正项级数**．正项级数是最基本的级数，先讨论正项级数的敛散性，它与一般级数的敛散问题有密切关系．

定理1(有界性判别法) 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛的充要条件是它的部分和数列 $\{S_n\}$ 有上界．

证 因为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是正项级数，所以其部分和数列 $\{S_n\}$ 是单调增加的．又 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛等价于 $\{S_n\}$ 收敛，而 $\{S_n\}$ 收敛的充要条件是 $\{S_n\}$ 有上界，从而定理便得所证．

由有界性判别法可知，正项级数发散，必定发散于正无穷大，因此可将发散的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 记为

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty.$$

例 1 讨论 p 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 的敛散性，其中 p 是常数．

解 显然 p 级数是正项级数，设它的部分和为 S_n，则当 $p\leqslant 1$ 时，由于调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，且 $\frac{1}{n^p}\geqslant\frac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$，可知

$$S_n\geqslant 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\to+\infty \quad (n\to\infty)$$

无界，所以此时 p 级数发散；当 $p>1$ 时，由于

$$\frac{1}{x^p}\geqslant\frac{1}{n^p},x\in[n-1,n] \quad (n=2,3,\cdots),$$

可知

$$\begin{aligned}S_n&\leqslant 1+\int_1^2\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x+\int_2^3\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x+\cdots+\int_{n-1}^n\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x\\&=1+\int_1^n\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x=1+\frac{1}{1-p}x^{1-p}\Big|_1^n\\&=1+\frac{1}{1-p}\left(1-\frac{1}{n^{p-1}}\right)<1+\frac{1}{p-1}\end{aligned}$$

有界，故此时 p 级数收敛．

综上所述，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 当 $p>1$ 时收敛，当 $p\leqslant 1$ 时发散．

有界性判别法的重要性不在于应用它来判别具体级数的敛散性，而是要借助于它来建立下列简便的判别法．

定理 2（比较判别法） 设 $0\leqslant a_n\leqslant b_n(n=1,2,\cdots)$，则当 $\sum\limits_{n=1}b_n$ 收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛；当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 也发散．

证 设 $A_n=\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_i$，$B_n=\sum\limits_{i=1}^{\infty}b_i$，则由题设可知

$$A_n\leqslant B_n.$$

当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛时，由定理 1 知 $\{B_n\}$ 有上界，从而 $\{A_n\}$ 有上界，再由定理 1 得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛．当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散时，由定理 1 知 $\{A_n\}$ 无上界，从而 $\{B_n\}$ 无上界，再由定理 1 得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散．

注 由于改变级数前面的有限项，不改变级数的敛散性，所以定理 2 的条件“$0\leqslant a_n\leqslant b_n(n=1,2,\cdots)$”可以改为对充分大的 n 以后有 $0\leqslant a_n\leqslant b_n(n\geqslant N)$．

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com