装备学院·学术专著

蒙特卡罗方法在系统可靠性中应用

金 星 洪延姬 编著

国防工业出版社
National Defense Industry Press

本书得到总装备部“1153”人才工程

蒙特卡罗方法在系统可靠性中应用

金星　洪延姬　编著

国防工业出版社

图书在版编目(CIP)数据

蒙特卡罗方法在系统可靠性中应用/金星,洪延姬编著. —北京:国防工业出版社,2013.5
ISBN 978-7-118-08699-7

Ⅰ. ①蒙... Ⅱ. ①金... ②洪... Ⅲ. ①蒙特卡罗法-应用-系统可靠性-研究 Ⅳ. ①N94

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 079259 号

※

国防工業出版社出版发行
(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048)
北京嘉恒彩色印刷责任有限公司
新华书店经售

*

开本 710×960 1/16 **印张** 12 **字数** 206 千字
2013 年 5 月第 1 版第 1 次印刷 **印数** 1—2500 册 **定价** 48.00 元

国防书店:(010)88540777 发行邮购:(010)88540776
发行传真:(010)88540755 发行业务:(010)88540717

序

自从20世纪40年代,蒙特卡罗方法应用于原子弹的研制以来,由于它不但可以解决确定性问题,还可以解决随机性问题,因此在数学、物理学、材料学和力学等领域开始得到广泛的应用,尤其是计算机的应用和普及,使得蒙特卡罗方法已经成为系统分析和设计的有力工具。

由于系统的每个单元寿命是随机变量,当系统结构复杂及包含单元数目较多时,系统可靠性和可用性指标很难用确定性数学模型表示,只能采用蒙特卡罗方法,进行系统可靠性和可用性分析,因此复杂系统可靠性和可用性分析与设计,必然需要蒙特卡罗仿真方法。

本书作者针对复杂系统的可靠性与可用性分析的迫切需求,以如何运用蒙特卡罗方法解决具体问题为重点,讨论了复杂的不可修复系统和可修复系统的蒙特卡罗数字仿真方法。

本书具有以下特点:

(1)内容新颖,总结了近年来的新研究成果;

(2)概念清晰,突出强调系统可靠性和可用性的基本概念;

(3)针对性强,紧密围绕系统可靠性和可用性分析的需求;

(4)通俗易懂,通过大量工程应用实例进行讨论。

本书内容安排合理、概念清晰、侧重实际应用,可供高等院校师生和工程技术人员参考。

中国工程院院士

北京航空航天大学教授

2012年6月

前　言

近年来，在复杂工程系统和军用装备的系统可靠性分析中，亟待解决：①大型复杂的可修复系统可靠性分析方法；②小样本下可靠度和寿命的评估近似方法；③多种分析方法的适用性分析和方法选优。

蒙特卡罗方法（随机模拟方法）在解决上述问题方面有独到的优势。因此，跟踪、消化、吸收和总结国内外相关理论与方法，结合多年来从事国防科研和研究生教学的经验与体会，紧密围绕系统可靠性分析需求，针对国内读者对相关著作迫切需要的现状，编著了《蒙特卡罗方法在系统可靠性中应用》。从蒙特卡罗方法的基本特点出发，以怎样解决系统可靠性分析问题为重点，通过工程应用背景突出的大量精选实例，系统、详细地讲解了要点和难点内容，旨在给读者一部有启发性、实用性的专业书籍。

全书共分七章。第一章介绍随机变量的抽样模拟；第二章介绍蒙特卡罗方法的基本原理；第三章介绍不可修复系统的可靠性仿真；第四章介绍不可修复系统的减小方差技术；第五章介绍一般可修复系统的可用性仿真；第六章介绍编程计算技巧和文件说明；第七章介绍其他应用。

本书编著过程中得到了解放军装备学院各级领导的大力支持，在此表示衷心感谢。作者的研究生李倩、叶继飞、李南雷、方娟、彭博、鲁海、吴赛虎、常浩等也付出了大量劳动，在此表示感谢。

由于时间仓促、水平有限，书中一定存在许多缺点和不足，希望读者批评指正。

编著者

2012 年 8 月

目　　录

第一章
随机变量的抽样模拟

蒙特卡罗方法(Monte Carlo Method)是借助于随机抽样技术,对系统属性进行随机抽样模拟的方法,也称为随机模拟方法。

蒙特卡罗方法的应用前提,就是首先生成服从各种分布的随机变量的抽样值,即生成服从各种分布的随机数。

本章介绍几种常见分布函数的随机数生成方法,以及随机数质量的检验方法。

1.1 (0, 1)区间上均匀分布的随机数和检验

(0, 1)区间上均匀分布的随机数是产生其他分布随机数的基础,为了保证随机变量的模拟质量,要对均匀分布随机数统计性质进行检验。

1.1.1 伪随机数及其产生方法简介

具有 $F(x)$ 分布的随机变量的一列独立样本值称为 $F(x)$ 分布随机数。

因为 (0, 1)区间上均匀分布随机数是产生其他分布随机数的基础,故有时简称为随机数。服从其他分布的随机数,一般指明分布类型,例如,指数分布随机数、正态分布随机数等。

采用蒙特卡罗方法进行随机模拟时,通常采用在数字计算机上产生伪随机数的方法。

所谓伪随机数就是在数字计算机上采用某种完全确定的规则,通过递推运算而产生的一列数。这一列数不是由真实的随机现象所产生的,因而不是真正的随机数,但由于这种数列具有类似于随机数的统计性质,因此,可以把它当作随机数来运算,故这种数列就称为伪随机数。

1.1.2 (0, 1)区间上均匀分布的随机数

产生均匀分布随机数的方法较多,下面介绍两种最常用的方法。

产生周期长度为 $2^{16}=65536$ 的随机数方法,随机数 r_i 抽样公式为

$$x_i=(2053x_{i-1}+13849)(\bmod 2^{16})$$
$$r_i=x_i/2^{16},\quad i=1,2,\cdots \tag{1-1}$$

式中,当 $i\geqslant 2^{16}$时随机数重新开始循环。

在字长为 32 位的微型计算机上,采用的随机数 r_i 抽样公式为

$$x_i=(314159269x_{i-1}+453806245)(\bmod 2^{31})$$
$$r_i=x_i/2^{31},\quad i=1,2,\cdots \tag{1-2}$$

式(1-2)产生随机数的周期为 $2^{31}=2147483648$。

选取的初始 x_0 称为种子,对随机数的生成质量有一定影响。

1.1.3 (0, 1)区间上均匀分布随机数的检验

在计算机上用迭代方法产生的随机序列 $\{r_i\}$ 作为均匀分布随机数使用之前,需要检验其随机性、均匀性和独立性。

1.1.3.1 均匀分布的χ^2 检验

产生 N 个(0, 1)区间随机数 $r_1,r_2,\cdots,r_N$,将(0, 1)区间等分成 m 个子区间,$(0,\ a_1]$,$(a_1,\ a_2]$,$(a_2,\ a_3]$和$(a_{m-1},1)$。

随机数 $r_1,r_2,\cdots,r_N$ 中落入第 i 个子区间的实际个数为 $n_i(i=1,2,\cdots,m)$,落入第 i 个子区间的理论个数为 $P_i=N/m(i=1,2,\cdots,m)$。如果随机数 $\{r_i\}$ 是均匀分布的,则统计量

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{(n_i-P_i)^2}{P_i}\sim\chi^2(m-1) \tag{1-3}$$

按式(1-3)可进行总体分布的假设检验。

若出现

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{(n_i-P_i)^2}{P_i}\leqslant\chi^2_{1-\alpha}(m-1)$$

则接受均匀分布假设,否则拒绝均匀分布假设。$\chi^2_{1-\alpha}(m-1)$ 是自由度为$m-1$的χ^2 分布的 $1-\alpha$ 下侧分位数,查表或计算程序计算均可。

使用χ^2 检验时应注意以下几点:

(1) 抽样样本数目 N 要足够大;

(2) 划分区间时,N/m 不应太小,一般 $N/m\geqslant 5$;

(3) 工程上一般取显著性水平 $\alpha=0.05$ 或 $\alpha=0.01$。

1.1.3.2 参数的显著性检验

(0, 1)区间上均匀分布随机数 r,理论上要满足

$$E(r)=\frac{1}{2},E(r^2)=\frac{1}{3}$$

式中，$E(\cdot)$ 表示取均值的运算。

对于假设

$$H_0:E(r)=1/2$$
$$H_0:E(r^2)=1/3$$

分别有统计量

$$u_1=\frac{\bar{r}-1/2}{\sqrt{\frac{1}{12N}}}=\sqrt{12N}(\bar{r}-1/2) \tag{1-4}$$

$$u_2=\frac{\overline{r^2}-1/3}{\sqrt{\frac{4}{45N}}}=0.5\sqrt{45N}(\overline{r^2}-1/3) \tag{1-5}$$

都渐近服从标准正态分布 $N(0,1)$ 。式中

$$\bar{r}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}r_i\ ,\ \overline{r^2}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}r_i^2$$

在 H_0 成立条件下，若取显著性水平 $\alpha=0.05$，则检验的拒绝域为 $|u_1|>1.959964$ 和 $|u_2|>1.959964$ 。

1.1.3.3 独立性检验

一组随机数 $r_1,r_2,\cdots,r_N$，若前后相距为 j 的随机数是相互独立的，即 $r_1,r_2,\cdots,r_{N-j}$ 与 $r_{1+j},r_{2+j},\cdots,r_N$ 相互独立，则前后相距为 j 的样本相关系数为

$$\hat{\rho}_j=\left[\frac{1}{N-j}\sum_{i=1}^{N-j}r_ir_{i+j}-(\bar{r})^2\right]/S^2,(j=1,2,\cdots) \tag{1-6}$$

对于充分大的 N,（如 $N-j>50$），相关系数 ρ 取零，假设 $H_0:\rho=0$，则统计量

$$u=\hat{\rho}_j\sqrt{N-j} \tag{1-7}$$

渐近服从 $N(0,1)$ 分布。式(1－6)中

$$\bar{r}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}r_i,S^2=\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(r_i-1/2)^2 \tag{1-8}$$

在 H_0 成立的条件下，取显著性水平 α，可以进行假设检验。若取显著性水平 $\alpha=0.05$，则检验的拒绝域为 $|u|>1.959964$ 。

1.1.3.4 随机变量的样本均值和样本方差的递推计算

对于随机变量的一组样本 $x_1,x_2,\cdots,x_N$，为了节省计算机内存，以及高精度

地计算样本均值 $\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$、样本平方均值 $\overline{x^2} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2$ 和样本方差 $S^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2$，一般采用递推计算方法。

(1) 计算 $\bar{x}$：令 $\bar{x}_0 = 0$ 开始，递推计算公式为

$$\bar{x}_n = \bar{x}_{n-1} + \frac{1}{n}(x_n - \bar{x}_{n-1}) \quad n = 1,2,\cdots,N$$

(2) 计算 $\overline{x^2}$：令 $(\overline{x^2})_0 = 0$ 开始，递推计算公式为

$$(\overline{x^2})_n = (\overline{x^2})_{n-1} + \frac{1}{n}[x_n^2 - (\overline{x^2})_{n-1}] \quad n = 1,2,\cdots,N$$

因此，样本方差 S^2 计算公式为

$$S_n^2 = \frac{n}{n-1}[(\overline{x^2})_n - (\bar{x}_n)^2] \quad n = 2,\cdots,N$$

1.2　常见随机变量的抽样模拟

1.2.1　连续型随机变量

定理： 如果随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ 连续，则 $r = F(x)$ 是(0, 1)区间上均匀分布的随机变量。

因此，通过(0, 1)区间上均匀分布的随机数 r 的抽取，得到服从分布函数 $F(x)$ 的随机变量 X 的抽样值 $x = F^{-1}(r)$。

逆变换法是一种较为普遍的方法，只要分布函数的反函数存在就可以采用逆变换法产生随机数，它是产生各种分布随机数的好方法。

1.2.1.1　产生 (a,b) 区间上均匀分布的随机数

设 X 为 (a, b) 区间上均匀分布的随机变量，其分布函数为

$$F(x) = \frac{x-a}{b-a}$$

如果 r 为(0, 1)区间区间上均匀分布的随机变量，则

$$\begin{cases} r = \dfrac{x-a}{b-a} \\ x = a + (b-a)r \end{cases} \tag{1-9}$$

式(1-9)就是 (a, b) 区间上均匀分布随机变量 X 的抽样公式，r 为(0, 1)区间上均匀分布的随机数。

1.2.1.2 指数分布的随机数

若随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, (x \geqslant 0, \lambda > 0)$$

其分布函数为

$$F(x) = \int_0^x f(x)\,dx = 1 - e^{-\lambda x}$$

由于

$$r = 1 - e^{-\lambda x}, 1 - r = e^{-\lambda x}$$

$$\ln(1 - r) = -\lambda x$$

$$x = -\frac{1}{\lambda}\ln(1 - r)$$

又在区间(0, 1)上 r 与 $1 - r$ 同分布，故得指数分布随机变量的抽样公式为

$$x = -\frac{1}{\lambda}\ln r \tag{1-10}$$

1.2.1.3 威布尔分布的随机数

两参数威布尔分布的密度函数为

$$f(t) = \frac{m}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{m-1} \cdot e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^m}$$

分布函数为

$$F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^m} \quad t \geqslant 0$$

因此，解方程 $r = 1 - \exp[-(t/\eta)^m]$，并且在区间(0, 1)上 r 与 $1 - r$ 同分布，可得威布尔分布的抽样公式为

$$t = \eta(-\ln r)^{1/m} \tag{1-11}$$

1.2.1.4 标准正态分布的随机数

设标准正态分布函数为 $\Phi(\cdot)$，任意给定随机数 r，有

$$\Phi(x) = r$$

$$x = \Phi^{-1}(r), x = u_r \tag{1-12}$$

所以问题的关键是求标准正态分布的反函数 $\Phi^{-1}(x)$，即关键是求标准正态分布的给定概率为 r 的下侧分位数 u_r。

标准正态分布函数和分位数计算，采用连分式逼进和基于二阶展开迭代法计算，计算速度快，精度高。具体计算程序见文献[11]。

1.2.1.5 正态分布和对数正态分布的随机数

一般正态分布 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的随机数为 x_i，如果用 r_i 表示标准正态分布的