



装备学院·学术专著

蒙特卡罗方法 在系统可靠性中应用

金星 洪延姬 编著



国防工业出版社
National Defense Industry Press

本书得到总装备部“1153”人才工程

蒙特卡罗方法 在系统可靠性中应用

金星 洪延姬 编著



国防工业出版社

图书在版编目(CIP)数据

蒙特卡罗方法在系统可靠性中应用 / 金星, 洪延姬
编著. —北京: 国防工业出版社, 2013. 5
ISBN 978 - 7 - 118 - 08699 - 7

I. ①蒙... II. ①金... ②洪... III. ①蒙特卡罗法 -
应用 - 系统可靠性 - 研究 IV. ①N94

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 079259 号

※

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048)

北京嘉恒彩色印刷责任有限公司

新华书店经售

*

开本 710 × 960 1/16 印张 12 字数 206 千字
2013 年 5 月第 1 版第 1 次印刷 印数 1—2500 册 定价 48.00 元

(本书如有印装错误, 我社负责调换)

国防书店: (010) 88540777
发行传真: (010) 88540755

发行邮购: (010) 88540776
发行业务: (010) 88540717

序

自从 20 世纪 40 年代,蒙特卡罗方法应用于原子弹的研制以来,由于它不但可以解决确定性问题,还可以解决随机性问题,因此在数学、物理学、材料学和力学等领域开始得到广泛的应用,尤其是计算机的应用和普及,使得蒙特卡罗方法已经成为系统分析和设计的有力工具。

由于系统的每个单元寿命是随机变量,当系统结构复杂及包含单元数目较多时,系统可靠性和可用性指标很难用确定性数学模型表示,只能采用蒙特卡罗方法,进行系统可靠性和可用性分析,因此复杂系统可靠性和可用性分析与设计,必然需要蒙特卡罗仿真方法。

本书作者针对复杂系统的可靠性与可用性分析的迫切需求,以如何运用蒙特卡罗方法解决具体问题为重点,讨论了复杂的不可修复系统和可修复系统的蒙特卡罗数字仿真方法。

本书具有以下特点:

- (1) 内容新颖,总结了近年来的新研究成果;
- (2) 概念清晰,突出强调系统可靠性和可用性的基本概念;
- (3) 针对性强,紧密围绕系统可靠性和可用性分析的需求;
- (4) 通俗易懂,通过大量工程应用实例进行讨论。

本书内容安排合理、概念清晰、侧重实际应用,可供高等院校师生和工程技术人员参考。

中国工程院院士
北京航空航天大学教授



2012 年 6 月

前 言

近年来,在复杂工程系统和军用装备的系统可靠性分析中,亟待解决:①大型复杂的可修复系统可靠性分析方法;②小样本下可靠度和寿命的评估近似方法;③多种分析方法的适用性分析和方法选优。

蒙特卡罗方法(随机模拟方法)在解决上述问题方面有独到的优势。因此,跟踪、消化、吸收和总结国内外相关理论与方法,结合多年来从事国防科研和研究生教学的经验与体会,紧密围绕系统可靠性分析需求,针对国内读者对相关著作迫切需要的现状,编著了《蒙特卡罗方法在系统可靠性中应用》。从蒙特卡罗方法的基本特点出发,以怎样解决系统可靠性分析问题为重点,通过工程应用背景突出的大量精选实例,系统、详细地讲解了要点和难点内容,旨在给读者一部有启发性、实用性的专业书籍。

全书共分七章。第一章介绍随机变量的抽样模拟;第二章介绍蒙特卡罗方法的基本原理;第三章介绍不可修复系统的可靠性仿真;第四章介绍不可修复系统的减小方差技术;第五章介绍一般可修复系统的可用性仿真;第六章介绍编程计算技巧和文件说明;第七章介绍其他应用。

本书编著过程中得到了解放军装备学院各级领导的大力支持,在此表示衷心感谢。作者的研究生李倩、叶继飞、李南雷、方娟、彭博、鲁海、吴赛虎、常浩等也付出了大量劳动,在此表示感谢。

由于时间仓促、水平有限,书中一定存在许多缺点和不足,希望读者批评指正。

编著者

2012年8月

目 录

第一章 随机变量的抽样模拟	1
1.1 (0, 1) 区间上均匀分布的随机数和检验	1
1.1.1 伪随机数及其产生方法简介	1
1.1.2 (0, 1) 区间上均匀分布的随机数	1
1.1.3 (0, 1) 区间上均匀分布随机数的检验	2
1.2 常见随机变量的抽样模拟	4
1.2.1 连续型随机变量	4
1.2.2 其他抽样方法	6
1.2.3 离散型随机变量	6
1.3 应用举例	8
第二章 蒙特卡罗方法的基本原理	15
2.1 随机模拟方法简介	15
2.1.1 事件发生概率的模拟	15
2.1.2 随机变量均值的模拟	17
2.2 定积分的计算	19
2.2.1 随机投点方法	19
2.2.2 重要度抽样方法	20
2.2.3 平均值方法	21
2.2.4 关联抽样方法	22
2.2.5 分层抽样方法	23
2.2.6 控制变量方法	27

2.3	中心极值定理	28
2.4	仿真误差分析	29
2.4.1	事件发生概率的模拟误差	29
2.4.2	随机变量均值的模拟误差	30
2.5	仿真次数确定	30
2.5.1	事件发生概率的仿真次数	31
2.5.2	随机变量均值的仿真次数	31
2.5.3	减小方差方法	31
2.6	应用举例	32
第三章	不可修复系统的可靠性仿真	41
3.1	基本可靠性指标的计算	41
3.1.1	可靠度和不可靠度	41
3.1.2	故障概率密度	42
3.1.3	故障率	42
3.1.4	平均寿命	42
3.1.5	给定可靠度的寿命	43
3.1.6	平均剩余寿命	43
3.1.7	重要度	44
3.2	最小路集和最小割集与系统寿命	44
3.2.1	系统所有可能的状态	44
3.2.2	常用可靠性分析方法	45
3.2.3	最小路集和最小割集	45
3.2.4	系统正常或故障的判据	46
3.2.5	采用最小路集计算系统寿命	47
3.2.6	采用最小割集方法计算系统寿命	47
3.3	构造仿真估计值	48
3.3.1	概率指标和寿命指标	48
3.3.2	可靠度和不可靠度的估计值	49

3.3.3	故障概率密度的估计值	51
3.3.4	故障率的估计值	52
3.3.5	重要度的估计值	53
3.3.6	平均寿命的估计值	53
3.3.7	给定可靠度的寿命	54
3.3.8	平均剩余寿命的估计值	55
3.4	随机抽样仿真方法	55
3.4.1	单元和系统的寿命抽样	56
3.4.2	概率指标和寿命指标计算	56
3.4.3	系统概率指标计算的结构函数方法	57
3.5	应用举例	59
第四章	不可修复系统的减小方差技术	71
4.1	减小方差的基本原理	71
4.2	不可修复系统的可靠性仿真难点	72
4.2.1	单元的可靠性仿真	72
4.2.2	系统的可靠性仿真	72
4.3	匕首抽样技术	73
4.3.1	单元的抽样技术	73
4.3.2	系统的抽样技术	74
4.3.3	仿真抽样效率分析	75
4.3.4	仿真误差分析	75
4.4	限制抽样技术	79
4.4.1	限制抽样原理	79
4.4.2	限制抽样技术的方差	80
4.4.3	限制抽样计算方法	81
4.4.4	结构函数构造方法	86
4.5	关联抽样技术	88
4.5.1	关联抽样原理	88

4.5.2	仿真误差分析	89
4.6	基于最小割集不交化的仿真技术	93
4.6.1	系统可靠度和不可靠度计算误差	93
4.6.2	基于最小割集不交化的仿真技术的原理	94
4.6.3	蒙特卡罗方法与解析计算方法的比较	96
第五章	一般可修复系统的可用性仿真	99
5.1	维修性指标	99
5.1.1	维修度函数	99
5.1.2	维修概率密度函数	99
5.1.3	维修率函数	100
5.1.4	修复时间抽样	100
5.2	产品在“正常→故障→正常→故障”过程中指标	100
5.2.1	无条件故障强度	100
5.2.2	平均故障次数	100
5.2.3	无条件修复强度	101
5.2.4	平均修复次数	101
5.2.5	可用度和不可用度	101
5.2.6	平均首次故障前时间	106
5.2.7	平均可用时间和平均不可用时间	106
5.3	构造仿真估计值	107
5.3.1	平均故障次数	107
5.3.2	无条件故障强度	107
5.3.3	平均修复次数	108
5.3.4	无条件修复强度	109
5.3.5	可用度和不可用度	109
5.3.6	平均首次故障前时间	111
5.3.7	平均可用时间和平均不可用时间	111
5.3.8	稳态指标	112

5.4	单元寿命抽样和维修策略	112
5.4.1	完全修复和单元寿命抽样	112
5.4.2	基本修复和单元寿命抽样	113
5.4.3	正常待用和单元寿命抽样	116
5.4.4	维修策略	117
5.5	可修复系统中单元状态	117
5.5.1	单元状态的分类	117
5.5.2	单元由工作状态向其他状态的转移	118
5.5.3	单元由修理状态向其他状态的转移	119
5.5.4	单元由待修状态向其他状态的转移	120
5.5.5	单元由正常待用状态向其他状态的转移	120
5.5.6	单元由修理待用状态向其他状态的转移	121
5.6	可修复系统的仿真时间	121
5.6.1	系统的初始状态	122
5.6.2	第一次抽样	122
5.6.3	仿真时间与单元状态转移的关系	122
5.7	仿真流程	124
5.7.1	系统工作或故障的判据	124
5.7.2	平均故障次数和平均修复次数	125
5.7.3	可用度和不可用度	126
5.7.4	平均首次故障前时间	127
5.7.5	平均可用时间、平均不可用时间和稳态指标	127
5.7.6	无条件故障强度和无条件修复强度	129
5.8	应用举例	130
第六章	编程计算技巧和文件说明	140
6.1	单元寿命和修复时间的抽样技巧	140
6.1.1	单元寿命和修复时间的数据文件	140
6.1.2	单元寿命和修复时间的抽样	140

6.1.3	单元寿命和修复时间的排序	141
6.2	系统正常与故障状态的判断	141
6.2.1	最小路集的数据文件	141
6.2.2	系统正常与故障的判断	142
6.3	系统的故障次数	142
6.3.1	单元和系统的故障次数	142
6.3.2	单元故障造成系统故障的次数	143
6.4	平均首次故障前时间和数据文件	143
6.4.1	平均首次故障前时间	143
6.4.2	文件说明	143
6.5	可用时间和数据文件	144
6.5.1	可用时间	144
6.5.2	文件说明	144
6.6	可用度和数据文件	145
6.6.1	可用度	145
6.6.2	文件说明	145
6.7	系统平均故障次数和数据文件	145
6.7.1	系统平均故障次数	145
6.7.2	文件说明	146
6.8	应用举例	146
第七章	其他应用	156
7.1	用指数分布假设进行可靠性评估	156
7.1.1	蒙特卡罗仿真模型	157
7.1.2	采用指数分布近似处理的保守程度	159
7.1.3	仿真运行结果	160
7.2	小样本条件下可靠寿命的近似估计	162
7.2.1	现场故障数据和可靠寿命	162
7.2.2	统计量的选择	163

7.2.3	经验系数的蒙特卡罗仿真模型	163
7.2.4	蒙特卡罗仿真分析	164
7.2.5	结论	165
7.3	随机加权法在正态分布参数估计中应用	165
7.3.1	随机加权法的基本思想	165
7.3.2	正态分布的蒙特卡罗随机抽样	166
7.3.3	小样本情况下参数置信限估计的适用性检验	166
7.3.4	结论	169
7.4	指数分布有替换定时截尾时故障率上限估计	170
7.4.1	有替换定时截尾试验的故障率上限	170
7.4.2	蒙特卡罗仿真模型	170
7.4.3	蒙特卡罗仿真分析	172
7.4.4	结论	174
参考文献		175

第一章

随机变量的抽样模拟

蒙特卡罗方法(Monte Carlo Method)是借助于随机抽样技术,对系统属性进行随机抽样模拟的方法,也称为随机模拟方法。

蒙特卡罗方法的应用前提,就是首先生成服从各种分布的随机变量的抽样值,即生成服从各种分布的随机数。

本章介绍几种常见分布函数的随机数生成方法,以及随机数质量的检验方法。

1.1 (0, 1)区间上均匀分布的随机数和检验

(0, 1)区间上均匀分布的随机数是产生其他分布随机数的基础,为了保证随机变量的模拟质量,要对均匀分布随机数统计性质进行检验。

1.1.1 伪随机数及其产生方法简介

具有 $F(x)$ 分布的随机变量的一系列独立样本值称为 $F(x)$ 分布随机数。

因为 (0, 1) 区间上均匀分布随机数是产生其他分布随机数的基础,故有时简称为随机数。服从其他分布的随机数,一般指明分布类型,例如,指数分布随机数、正态分布随机数等。

采用蒙特卡罗方法进行随机模拟时,通常采用在数字计算机上产生伪随机数的方法。

所谓伪随机数就是在数字计算机上采用某种完全确定的规则,通过递推运算而产生的一系列数。这一列数不是由真实的随机现象所产生的,因而不是真正的随机数,但由于这种数列具有类似于随机数的统计性质,因此,可以把它当作随机数来运算,故这种数列就称为伪随机数。

1.1.2 (0, 1)区间上均匀分布的随机数

产生均匀分布随机数的方法较多,下面介绍两种最常用的方法。

产生周期长度为 $2^{16} = 65536$ 的随机数方法, 随机数 r_i 抽样公式为

$$\begin{aligned} x_i &= (2053x_{i-1} + 13849) \pmod{2^{16}} \\ r_i &= x_i/2^{16}, \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1-1)$$

式中, 当 $i \geq 2^{16}$ 时随机数重新开始循环。

在字长为 32 位的微型计算机上, 采用的随机数 r_i 抽样公式为

$$\begin{aligned} x_i &= (314159269x_{i-1} + 453806245) \pmod{2^{31}} \\ r_i &= x_i/2^{31}, \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1-2)$$

式(1-2)产生随机数的周期为 $2^{31} = 2147483648$ 。

选取的初始 x_0 称为种子, 对随机数的生成质量有一定影响。

1.1.3 (0, 1) 区间上均匀分布随机数的检验

在计算机上用迭代方法产生的随机序列 $\{r_i\}$ 作为均匀分布随机数使用之前, 需要检验其随机性、均匀性和独立性。

1.1.3.1 均匀分布的 χ^2 检验

产生 N 个 $(0, 1)$ 区间随机数 $r_1, r_2, \dots, r_N$, 将 $(0, 1)$ 区间等分成 m 个子区间, $(0, a_1], (a_1, a_2], (a_2, a_3]$ 和 $(a_{m-1}, 1)$ 。

随机数 $r_1, r_2, \dots, r_N$ 中落入第 i 个子区间的实际个数为 $n_i (i = 1, 2, \dots, m)$, 落入第 i 个子区间的理论个数为 $P_i = N/m (i = 1, 2, \dots, m)$ 。如果随机数 $\{r_i\}$ 是均匀分布的, 则统计量

$$\sum_{i=1}^m \frac{(n_i - P_i)^2}{P_i} \sim \chi^2(m-1) \quad (1-3)$$

按式(1-3)可进行总体分布的假设检验。

若出现

$$\sum_{i=1}^m \frac{(n_i - P_i)^2}{P_i} \leq \chi_{1-\alpha}^2(m-1)$$

则接受均匀分布假设, 否则拒绝均匀分布假设。 $\chi_{1-\alpha}^2(m-1)$ 是自由度为 $m-1$ 的 χ^2 分布的 $1-\alpha$ 下侧分位数, 查表或计算程序计算均可。

使用 χ^2 检验时应注意以下几点:

- (1) 抽样样本数目 N 要足够大;
- (2) 划分区间时, N/m 不应太小, 一般 $N/m \geq 5$;
- (3) 工程上一般取显著性水平 $\alpha = 0.05$ 或 $\alpha = 0.01$ 。

1.1.3.2 参数的显著性检验

$(0, 1)$ 区间上均匀分布随机数 r , 理论上要满足

$$E(r) = \frac{1}{2}, E(r^2) = \frac{1}{3}$$

式中, $E(\cdot)$ 表示取均值的运算。

对于假设

$$H_0: E(r) = 1/2$$

$$H_0: E(r^2) = 1/3$$

分别有统计量

$$u_1 = \frac{\bar{r} - 1/2}{\sqrt{\frac{1}{12N}}} = \sqrt{12N}(\bar{r} - 1/2) \quad (1-4)$$

$$u_2 = \frac{\bar{r}^2 - 1/3}{\sqrt{\frac{4}{45N}}} = 0.5\sqrt{45N}(\bar{r}^2 - 1/3) \quad (1-5)$$

都渐近服从标准正态分布 $N(0, 1)$ 。式中

$$\bar{r} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N r_i, \bar{r}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N r_i^2$$

在 H_0 成立条件下, 若取显著性水平 $\alpha = 0.05$, 则检验的拒绝域为 $|u_1| > 1.959964$ 和 $|u_2| > 1.959964$ 。

1.1.3.3 独立性检验

一组随机数 $r_1, r_2, \dots, r_N$, 若前后相距为 j 的随机数是相互独立的, 即 $r_1, r_2, \dots, r_{N-j}$ 与 $r_{1+j}, r_{2+j}, \dots, r_N$ 相互独立, 则前后相距为 j 的样本相关系数为

$$\hat{\rho}_j = \left[\frac{1}{N-j} \sum_{i=1}^{N-j} r_i r_{i+j} - (\bar{r})^2 \right] / S^2, (j = 1, 2, \dots) \quad (1-6)$$

对于充分大的 N , (如 $N-j > 50$), 相关系数 ρ 取零, 假设 $H_0: \rho = 0$, 则统计量

$$u = \hat{\rho}_j \sqrt{N-j} \quad (1-7)$$

渐近服从 $N(0, 1)$ 分布。式(1-6)中

$$\bar{r} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N r_i, S^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (r_i - 1/2)^2 \quad (1-8)$$

在 H_0 成立的条件下, 取显著性水平 α , 可以进行假设检验。若取显著性水平 $\alpha = 0.05$, 则检验的拒绝域为 $|u| > 1.959964$ 。

1.1.3.4 随机变量的样本均值和样本方差的递推计算

对于随机变量的一组样本 $x_1, x_2, \dots, x_N$, 为了节省计算机内存, 以及高精度

地计算样本均值 $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$ 、样本平方均值 $\overline{x^2} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2$ 和样本方差 $S^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$ ，一般采用递推计算方法。

(1) 计算 $\bar{x}$ ：令 $\bar{x}_0 = 0$ 开始，递推计算公式为

$$\bar{x}_n = \bar{x}_{n-1} + \frac{1}{n}(x_n - \bar{x}_{n-1}) \quad n = 1, 2, \dots, N$$

(2) 计算 $\overline{x^2}$ ：令 $(\overline{x^2})_0 = 0$ 开始，递推计算公式为

$$(\overline{x^2})_n = (\overline{x^2})_{n-1} + \frac{1}{n}[x_n^2 - (\overline{x^2})_{n-1}] \quad n = 1, 2, \dots, N$$

因此，样本方差 S^2 计算公式为

$$S_n^2 = \frac{n}{n-1}[(\overline{x^2})_n - (\bar{x}_n)^2] \quad n = 2, \dots, N$$

1.2 常见随机变量的抽样模拟

1.2.1 连续型随机变量

定理： 如果随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ 连续，则 $r = F(x)$ 是 $(0, 1)$ 区间上均匀分布的随机变量。

因此，通过 $(0, 1)$ 区间上均匀分布的随机数 r 的抽取，得到服从分布函数 $F(x)$ 的随机变量 X 的抽样值 $x = F^{-1}(r)$ 。

逆变换法是一种较为普遍的方法，只要分布函数的反函数存在就可以采用逆变换法产生随机数，它是产生各种分布随机数的好方法。

1.2.1.1 产生 (a, b) 区间上均匀分布的随机数

设 X 为 (a, b) 区间上均匀分布的随机变量，其分布函数为

$$F(x) = \frac{x-a}{b-a}$$

如果 r 为 $(0, 1)$ 区间上均匀分布的随机变量，则

$$\begin{cases} r = \frac{x-a}{b-a} \\ x = a + (b-a)r \end{cases} \quad (1-9)$$

式(1-9)就是 (a, b) 区间上均匀分布随机变量 X 的抽样公式， r 为 $(0, 1)$ 区间上均匀分布的随机数。

1.2.1.2 指数分布的随机数

若随机变量 X 的概率密度函数为

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, (x \geq 0, \lambda > 0)$$

其分布函数为

$$F(x) = \int_0^x f(x) dx = 1 - e^{-\lambda x}$$

由于

$$r = 1 - e^{-\lambda x}, 1 - r = e^{-\lambda x}$$

$$\ln(1 - r) = -\lambda x$$

$$x = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - r)$$

又在区间 $(0, 1)$ 上 r 与 $1 - r$ 同分布, 故得指数分布随机变量的抽样公式为

$$x = -\frac{1}{\lambda} \ln r \quad (1-10)$$

1.2.1.3 威布尔分布的随机数

两参数威布尔分布的密度函数为

$$f(t) = \frac{m}{\eta} \left(\frac{t}{\eta} \right)^{m-1} \cdot e^{-\left(\frac{t}{\eta} \right)^m}$$

分布函数为

$$F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{t}{\eta} \right)^m} \quad t \geq 0$$

因此, 解方程 $r = 1 - \exp[-(t/\eta)^m]$, 并且在区间 $(0, 1)$ 上 r 与 $1 - r$ 同分布, 可得威布尔分布的抽样公式为

$$t = \eta (-\ln r)^{1/m} \quad (1-11)$$

1.2.1.4 标准正态分布的随机数

设标准正态分布函数为 $\Phi(\cdot)$, 任意给定随机数 r , 有

$$\Phi(x) = r$$

$$x = \Phi^{-1}(r), x = u_r \quad (1-12)$$

所以问题的关键是求标准正态分布的反函数 $\Phi^{-1}(x)$, 即关键是求标准正态分布的给定概率为 r 的下侧分位数 u_r 。

标准正态分布函数和分位数计算, 采用连分式逼近和基于二阶展开迭代法计算, 计算速度快, 精度高。具体计算程序见文献[11]。

1.2.1.5 正态分布和对数正态分布的随机数

一般正态分布 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的随机数为 x_i , 如果用 r_i 表示标准正态分布的