高等学校工科数学系列丛书

概率论与数理统计

主　编　贾念念　施久玉

HEUP哈尔滨工程大学出版社
Harbin Engineering University Press

概率论与数理统计

主编　贾念念　施久玉

哈尔滨工程大学出版社

07188

内容简介

本书是以全国高等院校工科数学课程教学指导委员会修订的“概率论与数理统计课程基本要求”为依据，以“厚基础、宽专业、重应用”为指导思想，按照“概率理论扎实，重在统计应用”的原则编写而成的。本书注重概率理论的完整性与数理统计的实用性相结合，强调数理统计在科学研究中的重要性，培养学生的统计应用意识，是一部适应不断变化的教学改革形势，面向研究型大学人才培养需要的教材。

本书共分10章，包括随机事件及概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、方差分析与回归分析、随机过程简介。各章末配有相应习题，书后附有各章习题答案。

本书可作为高等院校工科、经管及非数学类理科等专业的教材或参考用书，也可供工程技术人员或科技人员学习参考。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/贾念念，施久玉主编. —哈尔滨：哈尔滨工程大学出版社，2012.3(2013.2重印)
ISBN 978-7-5661-0075-7

Ⅰ.①概… Ⅱ.①贾… ②施… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材 ②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第021512号

出版发行 哈尔滨工程大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区东大直街124号
邮政编码 150001
发行电话 0451-82519328
传　　真 0451-82519699
经　　销 新华书店
印　　刷 肇东市一兴印刷有限公司
开　　本 787mm×960mm 1/16
印　　张 17.5
字　　数 366千字
版　　次 2012年3月第1版
印　　次 2013年2月第2次印刷
定　　价 35.00元
http://www.hrbeupress.com
E-mail:heupress@hrbeu.edu.cn

前　言

概率论与数理统计是高等院校重要的公共数学基础理论课。其作为现代数学的重要分支，广泛应用于自然科学、社会科学和工程技术的各个领域，如经济、管理、金融、保险、生物、医学等方面。本书以"厚基础、宽专业、重应用"为指导思想，力争做到传授数学知识和培养数学素养的同时，加强学生应用能力的开发。编者在编写过程中参考了诸多国内外同类优秀教材，内容涵盖了教育部工科"概率论与数理统计课程基本要求"，也涵盖了《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》的所有知识点，具有结构合理、举例多样、注重应用、深入浅出等特点。

本书共10章，分三部分。第一部分为概率论部分(第1章至第5章)，讲授随机事件、随机变量及其分布、数字特征和极限定理等内容；第二部分为数理统计部分(第6章至第9章)，讲授数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、方差分析和回归分析等内容；第三部分为随机过程部分(第10章)，介绍随机过程的基础知识。本书各章末配有大量习题，书后附有各章习题答案，可供学生辅助练习，牢固掌握知识。

本书由哈尔滨工程大学理学院公共数学教学中心组织编写，第1章由国萃编写，第2章由李彤编写，第3章由凌焕章编写，第4章由隋然编写，第5章由张戌希编写，第6章由王珏编写，第7章由徐润章编写，第8章由刘献平编写，第9章由孙薇编写，第10章由沈艳编写。全书由贾念念、施久玉任主编，贾念念、隋然统稿。

本书在编写过程中得到了哈尔滨工程大学理学院应用数学系广大教师的关心和支持，也得到了学校各级有关领导的鼓励和指导，哈尔滨工程大学出版社也给予了很大的帮助，另外，本书在编写过程中，参考了国内外一些专家学者的论著，在此一并致以衷心感谢！

由于编者水平所限，加之时间仓促，书中难免有不妥之处，敬请广大读者提出宝贵意见。

编　者

2012年1月

目　录

第1章 随机事件及其概率

在自然界和人类社会中有千姿百态的现象,概括起来无非是两类.一类是确定性现象,比如说必然事件,即在一定条件下必然会发生的事情.例如在标准大气压下,水加热到100 ℃时必定沸腾,三角形内角和为180°,等等.再比如说不可能事件,即在一定条件下必然不会发生的事情.读者可以从物理学、化学等学科中举出许多这样的实例.但是在自然现象和社会现象中,还广泛存在着与确定性现象有着本质区别的另一类现象,即随机现象,对于这类现象来说,试验的结果带有不确定性.例如船舶在海洋中航行时,由于受到海洋波浪的影响而产生各种各样的摇摆(纵摇、横摇)以及高低起伏,此时船的摇摆和起伏的幅度,是带有不确定性的,也是事前很难预测到的.又如掷一枚硬币,可能出现正面,也可能出现反面,其结果呈现不确定性.

人们常说"偶然的背后一定隐藏着某种必然性".实践证明,在研究了大量的同类随机现象后,总能总结出某种规律.例如掷一枚硬币,如果硬币是匀称的,当抛掷次数少时,正面、反面的出现没有明显的规律性;但随着抛掷次数的增加我们就会发现,正面和反面次数的比值接近1:1.又如在射击中,当射击次数少时,靶上命中点是杂乱无章的,没有什么明显的规律性;可是当射击次数增加时,靶上命中点的分布就呈现出了规律性,射击次数越多,规律性越明显.这说明个别随机现象虽然是无规律的,但大量性质相同的随机现象总存在着某种统计规律性.概率论与数理统计就是一门从数量方面研究随机现象客观规律性的学科.到了20世纪30年代,通过俄国数学家柯尔莫哥洛夫在概率论发展史上的杰出贡献,概率论成为一门严谨的数学分支.近代又出现了理论概率及应用概率论的分支,概率论被广泛地应用到了不同范畴和不同的学科.今天,概率论已经成为一个非常庞大的数学分支.

概率论的特点就是根据问题先提出数学模型,然后研究它们的性质、特征和规律性;数理统计则是以概率论的理论为基础,利用对随机现象观察所取得的数据资料来研究数学模型.由于随机现象是普遍存在的,这就使概率论与数理统计的理论与方法具有极为普遍的意义,也决定了概率论与数理统计在数学领域、应用领域中所处的重要地位与作用,以及广阔的发展前景.

随着我国现代化建设的跨越式发展及科学技术愈来愈高的要求,概率论与数理统计的理论和方法的应用范围愈来愈广泛,几乎遍及所有科学技术领域、工农业生产和国民经济的各个部门,如适航性、可靠性工程、气象、水文、地震预报、自动控制、通信工程、管理工程、金融工程等.另一方面,概率论与数理统计的理论和方法正在向各基础学科、工程学科、经济学科渗透,产生了许多边缘性的应用学科,如信息论、计量经济学等.正如一位著名作家所表述的:概率论和统计学转变了我们关于自然、心智和社会的看法,这些转变是意义深远而且范围广阔的,既

改变着权力的结构，也改变着知识的结构，这些转变使现代科学成形.

1.1 随机试验

我们遇到过各种试验. 在这里，我们把试验作为一个含义广泛的术语，它包括各种各样的科学试验，甚至对某一事物的某一特征的观察也认为是一种试验，并用字母 E 表示. 下面举一些试验的例子：

E_1：抛一枚硬币，观察正面 H、反面 T 出现的情况.

E_2：将一枚硬币抛三次，观察正面出现的次数.

E_3：抛一枚骰子，观察出现的点数.

E_4：记录车站售票处一天内售出的车票数.

E_5：在一批灯泡中任意抽取一只，测试它的寿命 t.

E_6：记录某地一昼夜的最高温度和最低温度.

上面举出了六个试验的例子，它们有着共同的特点. 例如，试验 E_1 有两种可能结果，出现 H 或者出现 T，但在抛掷之前不能确定试验的结果是出现 H 还是出现 T，这个试验可以在相同的条件下重复地进行. 又如试验 E_5，我们知道灯泡的寿命（以小时计算）$t \geqslant 0$，但在测试之前不能确定它的寿命有多长. 这一试验也可以在相同的条件下重复地进行. 概括起来，这些试验具有以下特点：

（1）可以在相同条件下重复进行；

（2）在进行一次试验之前，不能事先确定试验的哪个结果会出现；

（3）试验的全部可能结果是已知的.

在概率论中，我们称具有上述三个特点的试验为随机试验（Random experiment），简称为试验，我们是通过研究随机试验来研究随机现象的.

1.2 样本空间、随机事件

1.2.1 样本空间

对于随机试验，尽管在每次试验之前不能预知试验的结果，但试验一切可能结果组成的集合是已知的，我们把随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的样本空间（Sampling space），记为 S. 样本空间的元素，即 E 的每个结果，称为样本点（Sampling point），记为 e. 今后样本空间就简记为 $S = S(e)$.

下面给出 1.1 节中试验 $E_k(k = 1,2,\cdots,6)$ 的样本空间.

$S_1 = \{H,T\}$；

$S_2 = \{0,1,2,3\}$；

$S_3 = \{1,2,3,4,5,6\}$；

$S_4 = \{1,2,\cdots,n\}$，这里的 n 是售票处一天内准备出售的车票数；

$S_5 = \{t \mid t \geqslant 0\}$；

$S_6 = \{(x,y) \mid T_0 \leqslant x \leqslant y \leqslant T_1\}$，这里 x 表示最低温度，y 表示最高温度，并设这一地区的温度不会小于 T_0，也不会大于 T_1.

评注　样本空间中的样本点可以是有限个，也可以是无穷多个；样本空间中的样本点可以是数也可以不是数. 样本空间的样本点取决于试验的目的，也就是说，试验目的的不同，决定了样本空间中的样本点的不同. 但是，无论怎样构造样本空间，作为样本空间中的样本点，必须具备两条基本属性：

(1) 互斥性　无论哪两个样本点都不会在同一次试验中出现；

(2) 完备性　每次试验一定会出现某一个样本点.

1.2.2　随机事件

在进行试验时，人们常常关心满足某种条件的那些样本点所组成的集合. 例如，若规定灯泡寿命小于1 500小时为不合格品，则在1.1节的 E_5 中，我们更关心的是灯泡的寿命是否不小于1 500小时. 满足这个条件的样本点组成样本空间 S_5 的一个子集 A，即

$$A = \{e \mid e \geqslant 1\,500\}$$

在这里，我们称 A 为试验 E_5 的一个随机事件.

我们称试验 E 的样本空间 S 的子集为 E 的随机事件(Random event)，简称为事件. 事件是概率论中最基本的概念. 今后用大写字母 $A,B,\cdots$ 表示事件. 在每次试验中，事件 A 发生当且仅当 A 中的一个样本点 e 发生. 例如某灯泡寿命为1 600小时，则事件 A 发生.

特别地，由一个样本点组成的单点集称为基本事件(Basic event). 例如试验 E_3 中有6个基本事件 $\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\}$.

样本空间 S 包含所有的样本点，所以在每次试验中它总是发生的，称为必然事件(Certain event). 空集 $\varnothing$ 中不包含任何样本点，它作为样本空间的子集，在每次试验中都不发生，称 $\varnothing$ 为不可能事件(Impossible event).

我们知道，必然事件 S 与不可能事件 $\varnothing$ 都不是随机事件，因为作为试验的结果，它们都是确定的，并不具有随机性. 但是为了今后讨论问题方便，我们也将它们当作随机事件来处理.

1.2.3　事件间的关系与事件的运算

由于随机事件是样本空间的一个子集，而且样本空间中可以定义不止一个事件，那么分析事件之间的关系不但有助于我们深刻地认识事件的本质，而且还可以简化一些复杂事件的概率计算. 既然事件是一个集合，那么我们可以借助集合论中集合之间的关系以及集合的运算来

研究事件间的关系与运算.

设试验 E 的样本空间为 S;A,B, $A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是 S 的子集.

(1) 若 $A\subset B$,则称事件 B 包含事件 A. 这里指的是事件 A 发生,必然导致事件 B 的发生.

若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,即 $A=B$,则称事件 A 与 B 相等.

(2) 事件 $A\cup B=\{e\mid e\in A$ 或 $e\in B\}$ 称为事件 A 与 B 的和事件. 当且仅当事件 A,B 中至少有一个发生时,事件 $A\cup B$ 发生. $A\cup B$ 也记作 $A+B$.

对任一事件 A,有

$$A\cup S=S,A\cup\varnothing=A$$

类似地,当 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个事件发生时,称和事件 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 发生. 称 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 为可列无穷多个事件 $A_1,A_2,\cdots$ 的和事件,表示"可列无穷多个事件 A_i 中至少有一个事件发生".

(3) 事件 $A\cap B=\{e\mid e\in A$ 且 $e\in B\}$ 称为事件 A 与 B 的积事件. 当且仅当事件 A 与 B 都发生时,事件 $A\cap B$ 发生. $A\cap B$ 也记作 AB.

对任一事件 A,有

$$A\cap S=A,A\cap\varnothing=\varnothing$$

类似地,当 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 都发生时,称积事件 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 发生. 称 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 为可列无穷多个事件 $A_1,A_2,\cdots$ 的积事件,表示"可列无穷多个事件 A_i 同时发生".

(4) 事件 $A-B=\{e\mid e\in A$ 且 $e\notin B\}$ 称为事件 A 与 B 的差事件. 当且仅当事件 A 发生而事件 B 不发生时,事件 $A-B$ 发生.

对任一事件 A,有

$$A-A=\varnothing,A-\varnothing=A,\ A-S=\varnothing$$

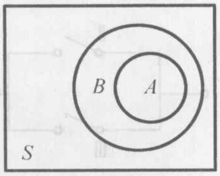
(5) 若 $AB=\varnothing$,则称事件 A 与 B 是互不相容的或互斥的(Mutually exclusive event). 表示事件 A 与 B 不能同时发生. 实际上,基本事件就是两两互不相容的.

n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容,是指其中任意两个事件都是互不相容的,即 $A_i\cap A_j=\varnothing(i\neq j;i,j=1,2,\cdots,n)$.

(6) 若 $A\cup B=S$ 且 $A\cap B=\varnothing$,则称事件 A 与 B 为互补事件,也称 A 与 B 为对立事件(Complementary event),表示不论试验结果如何,事件 A 与 B 中有且仅有一个事件发生,A 的对立事件记为 $\bar{A}$,即 $\bar{A}=B$. 显然 $\bar{A}=S-A$.

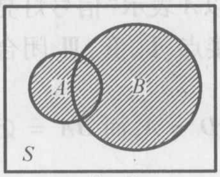
评注 对立事件必是互不相容(互斥)的,但互不相容的两个事件不一定是对立事件.

用文氏图(Venn diagram)1-1 至图 1-6 可直观地表示以上各个事件之间的关系与运算. 其中矩形表示样本空间 S,圆形域 A 与圆形域 B 分别表示事件 A 与事件 B,阴影部分则分别表示事件 A 与事件 B 经过和、积、差等运算后,所得到的新事件.



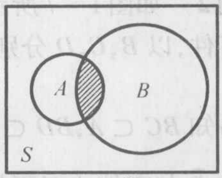
$A \subset B$

图 1 – 1



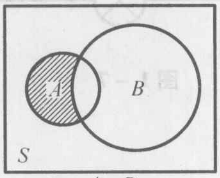
$A \cup B$

图 1 – 2



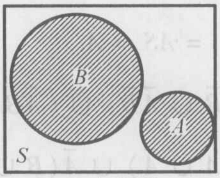
$A \cap B$

图 1 – 3



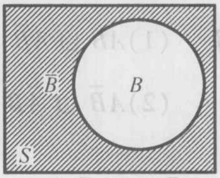
$A - B$

图 1 – 4



$A \cap B = \varnothing$

图 1 – 5



$B \cup \bar{B} = S, B \cap \bar{B} = \varnothing$

图 1 – 6

在进行事件运算时，经常要用到以下的运算律.

交换律　$A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$

结合律　$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

分配律　$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

值得一提的是,分配律可以推广到有穷或可列无穷的情形(读者自行推导).

德 · 摩根(De. Morgan) 律　$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

对于差事件的运算,有　$A - B = A\bar{B} = A - AB$

例 1　掷一颗骰子,设事件 A_1 为掷出的点数是奇数点,A_2 为掷出的是偶数点,A_3 为掷出的是小于 4 的偶数点,显然有

$$A_1 = \{1,3,5\}, A_2 = \{2,4,6\}, A_3 = \{2\}$$

则

$$A_1 \cup A_2 = \{1,2,3,4,5,6\}, A_1A_2 = \varnothing$$

可见 A_1 与 A_2 互为对立事件.

$$A_2 \cup A_3 = \{2,4,6\}$$

$$\overline{A_1 \cup A_3} = \overline{A_1} \cap \overline{A_3} = \{4,6\}$$

$$A_1 - A_3 = A_1, A_2 - A_3 = \{4,6\}$$

例 2 如图 1－7 所示的电路中，以 A 表示"信号灯亮"这一事件，以 B,C,D 分别表示"电路接点 Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ 闭合"事件.

易知 $BC \subset A, BD \subset A$ 且 $BC \cup BD = A$，而 $\bar{B}A = \varnothing$，即事件 $\bar{B}$ 与事件 A 互不相容.

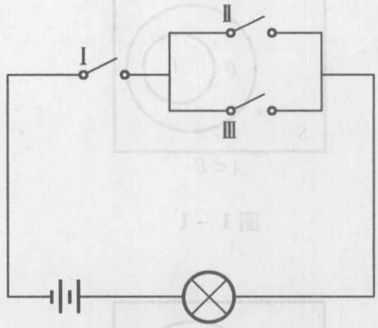


图 1－7

例 3 化简下列事件.

(1)$AB \cup A\bar{B}$；(2)$A\bar{B} \cup \bar{A}B \cup \bar{A}\bar{B}$.

解 (1)$AB \cup A\bar{B} = A(B \cup \bar{B}) = AS = A$.

(2)
$$
\begin{aligned}
A\bar{B} \cup \bar{A}B \cup \bar{A}\bar{B} &= (A\bar{B} \cup \bar{A}\bar{B}) \cup (\bar{A}B \cup \bar{A}\bar{B}) \\
&= \bar{B}(A \cup \bar{A}) \cup \bar{A}(B \cup \bar{B}) \\
&= \bar{B}S \cup \bar{A}S = \bar{B} \cup \bar{A} = \overline{AB}.
\end{aligned}
$$

1.3 频率与概率

对于一个事件(除必然事件和不可能事件)来说，它在一次试验中可能发生，也可能不发生. 我们常常希望知道某些事件在一次试验中发生的可能性究竟有多大. 我们更希望能够找到一个数，用它来衡量一件事情发生可能性的大小. 为此首先引入频率的概念，它描述了事情发生的频繁程度. 进而引出表示事件在一次试验中发生可能性大小的量——概率.

1.3.1 频率

定义 1 在相同条件下进行了 n 次试验. 在这 n 次试验中，随机事件 A 发生的次数为 n_A，称为事件 A 发生的频数. 比值 $\frac{n_A}{n}$ 称为事件 A 发生的频率(Frequency)，记为 $f_n(A)$.

由定义易见频率有以下性质：

(1)$0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$；

(2)$f_n(S) = 1$；

(3) 对有限个两两互不相容事件 $A_1, A_2, \cdots, A_k$，有

$$f_n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \cdots + f_n(A_k)$$

事件 A 发生的频率是它发生的次数与试验次数之比，其大小表示 A 发生的频繁程度. 频率愈大，事件 A 发生愈频繁，这意味着 A 在一次试验中发生的可能性愈大. 因而，直观的想法是用频率来表示 A 在一次试验中发生的可能性的大小. 但是，这样做是否合适？先看下面的例子.

例 1 考虑“抛硬币”这个试验，有学者将一枚硬币抛掷 5 次、50 次、500 次，各做 10 遍，记录的数据如表 1 - 1 所示（其正面为 H，n_H 表示 H 发生的频数，$f_n(H)$ 表示 H 发生的频率）.

表 1 - 1

实验序号	$n=5$		$n=50$		$n=500$	
	n_H	$f_n(H)$	n_H	$f_n(H)$	n_H	$f_n(H)$
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	25	0.50	249	0.498
3	1	0.2	21	0.42	256	0.512
4	5	1.0	25	0.50	253	0.506
5	1	0.2	24	0.48	251	0.502
6	2	0.4	21	0.42	246	0.492
7	4	0.8	18	0.36	244	0.488
8	2	0.4	24	0.48	258	0.516
9	3	0.6	27	0.54	262	0.524
10	3	0.6	31	0.62	247	0.494

历史上曾有几位科学家做过这种试验，记录了如表 1 - 2 所示的数据.

表 1 - 2

实验者	n	n_H	$f_n(H)$
De. Morgan	2 048	1 061	0.518 1
Buffou	4 040	2 048	0.506 9
K. Pearson	12 000	6 019	0.501 6
K. Pearson	24 000	12 012	0.500 5

从上述数据可以看出：

(1) 抛硬币次数 n 较小时，频率 $f_n(H)$ 有随机波动性，即对于同样的 n，所得的 $f_n(H)$ 不尽相同，且波动幅度较大；

(2) 随着 n 增大，频率 $f_n(H)$ 呈现出稳定性，即当 n 逐渐增大时 $f_n(H)$ 总是在 0.5 附近摆动，逐渐稳定于 0.5.

例 2 考查英语中字母出现的频率. G. Dewey 统计了约 438 023 个单词，得到表 1 - 3 所示的数据.

表 1－3

字母	频率	字母	频率	字母	频率
E	0.126 8	L	0.039 4	P	0.018 6
T	0.097 8	D	0.038 9	B	0.015 6
A	0.078 8	U	0.028 0	V	0.010 2
O	0.077 6	C	0.026 8	K	0.006 0
I	0.070 7	F	0.025 6	X	0.001 6
N	0.070 6	M	0.024 4	J	0.001 0
S	0.063 4	W	0.021 4	Q	0.000 9
R	0.059 4	Y	0.020 2	Z	0.000 6
H	0.057 3	G	0.018 7		

字母使用频率的研究，对打字键盘设计、信息编码及密码破译等都是很有用的.

从上面两个例子可以看出，当n较小时，频率$f_n(A)$在0与1之间随机波动，其幅度较大，因而，当n较小时用频率来表达事件发生的可能性的大小是不太合适的. 而当n逐渐增大时，频率$f_n(A)$逐渐稳定于某个常数. 对于每一个事件A都有这样一个客观存在的常数与之对应，这种“频率稳定性”，即通常所说的统计规律性，它揭示了隐藏在随机现象中的规律性. 我们让试验重复大量次数，用这个频率稳定值来表示事件发生的可能性大小是合适的，称这个“稳定值”为事件发生的概率(Probability).

定义 2 设事件A在n次重复试验中发生的次数为k，当n很大时，频率$\frac{k}{n}$在某一数值p的附近摆动，若随着试验次数n的增大，发生较大摆动的可能性越来越小，则称数p为事件A发生的概率，记为$P(A) = p$.

习惯上人们将上述定义称为事件A发生的概率的统计定义. 到第5章我们将证明，当$n \to \infty$时 频率$f_n(A)$在一定意义下逼近于概率$P(A)$这一事实.

有以下几点值得注意：

(1) 上述定义并没有提供确切计算概率的方法. 因为在实际中，我们不可能对每一个事件都做大量的试验，然后求得频率，用它来表示事件发生可能性的大小；

(2) 我们不知道n取多大才行，如果n取很大，不一定能保证每次试验的条件都完全相同；

(3) 我们也没有理由认为，试验次数为$n+1$时计算的频率比试验次数为n时计算的频率更准确、更逼近所求的概率.

为了理论研究的需要，我们从频率的稳定性和频率的性质得到启示，给出如下表示事件发生可能性大小的概率的定义.

1.3.2 概率及其性质

1933 年,前苏联数学家柯尔莫哥洛夫(Kolmogoroff)总结已有的大量成果,提出概率论公理化结构,明确定义了基本概念,使得概率论成为严谨的数学分支,推动了概率论的发展.

定义 3 设 E 是随机试验, S 是其样本空间. 对于 E 的每一个事件 A,有唯一的实数与之对应,记为 $P(A)$,称 $P(A)$ 为事件 A 发生的概率. 如果函数 $P(\cdot)$ 满足以下条件:

(1) 非负性 对每个事件 A, $P(A) \geqslant 0$.

(2) 规范性 对于必然事件 S, $P(S) = 1$.

(3) 可列可加性 若 $A_1, A_2, \cdots$ 是两两互不相容的事件,即当 $A_iA_j = \varnothing(i \neq j; i,j = 1,2,\cdots)$ 有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots$$

称这个定义为概率公理化定义.

由概率的定义可以得到概率的一些重要性质.

(1) $P(\varnothing) = 0$.

证明 因为 $\varnothing = \varnothing \cup \varnothing \cup \cdots$,由概率的可加性有.

$$P(\varnothing) = P(\varnothing) + P(\varnothing) + \cdots$$

由 $P(\varnothing) \geqslant 0$,证得 $P(\varnothing) = 0$.

(2) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容,则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) \quad (\text{有限可加性})$$

证明 令 $A_i = \varnothing(i = n+1, n+2, \cdots)$,由可加性及性质(1)可知

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

(3) 若事件 A, B 满足 $A \subset B$,则有

$$P(B - A) = P(B) - P(A), P(B) \geqslant P(A)$$

证明 由 $A \subset B$ 知 $B = A \cup (B - A)$,且 $A(B - A) = \varnothing$,由概率的可加性知

$$P(B) = P(A) + P(B - A)$$

即 $P(B - A) = P(B) - P(A)$.

又由概率的非负性知, $P(B - A) \geqslant 0$,所以 $P(B) \geqslant P(A)$.

(4) 对任意事件 A, $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$,其中 $\bar{A}$ 为 A 的对立事件.

证明 因为 $A \cup \bar{A} = S$ 且 $A\bar{A} = \varnothing$,由性质 2 可知 $P(A) + P(\bar{A}) = 1$,得 $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

(5) 对任意事件 A, B 有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$
$$P(A \cup B) \leqslant P(A) + P(B)$$