普通高等教育"十二五"规划教材

高等数学

经管类

上册

林　谦 主编

科学出版社

普通高等教育"十二五"规划教材

高等数学

（经管类）上册

主　编　林　谦

副主编　张　玮　李　薇

　　　　梁双凤　姚晓霞

参　编　梁　林　向　华

　　　　何振华　黄　永

　　　　杨朝丽

科学出版社

北　京

内 容 简 介

为适应高等学校数学类课程改革的需要，编者经过多年教学实践经验并吸收“十五”、“十一五”规划教材成果的基础上编写了本书.

本书分为上、下两册，本书为上册，内容包括函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分书后都附有习题参考答案或提示.

本书可作为高等院校（含师范类）经管类各专业通用的教材，也可作为高等院校教师的教学参考书，还可供经济管理人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学：经管类. 上册/林谦主编. —北京：科学出版社，2012
普通高等教育“十二五”规划教材
ISBN 978-7-03-035271-2

Ⅰ.①高… Ⅱ.①林… Ⅲ.①高等数学-高等数学-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 184403 号

责任编辑：胡云志 任俊红 唐保军 / 责任校对：郑金红
责任印制：阎 磊 / 封面设计：华路天然工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
新科印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2012 年 8 月第 一 版 开本：720×1000 B5
2012 年 8 月第一次印刷 印张：13 3/4
字数：267 000

定价：26.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

序　言

当今中国高等教育已从传统的精英教育发展到现代大众教育阶段.高等学校一方面要尽可能满足民众接受高等教育的需求,另一方面要努力培养适应社会和经济发展的合格人才,这就导致大学的人才培养规模与专业类型发生了革命性的变化,教学内容改革势在必行.高等数学课程是大学的重要基础课,是大学生科学修养和专业学习的必修课.编写出具有时代特征的高等数学教材是数学教育工作者的一项光荣使命.

科学出版社"十二五"教材出版规划的指导原则与云南省大部分高校的高等数学课程改革思路不谋而合,因此我们组织了云南省具有代表性的十所高校的数学系骨干教师组成项目专家组,共同策划编写了新的系列教材,并列入科学出版社普通高等教育"十二五"规划教材出版项目.本系列教材以大众化教育为前提,以各专业的发展对数学内容的需要为准则,分别按理工类、经管类和化生地类编写,第一批出版的有高等数学(理工类)、高等数学(经管类)、高等数学(化生地类)、概率论与数理统计(理工类)、线性代数(理工类),以及可供各类专业选用的数学实验教材.教材的特点是,在不失数学课程逻辑严谨的前提下,加强了针对性和实用性.

参加教材编写的教师都是在教学一线有长期教学经验积累的骨干教师.教材的第一稿已通过一届学生的试用,在征求使用本教材师生意见和建议的基础上作了进一步的修改,并通过项目专家组的审查,最后由科学出版社统一出版.在此对试用本教材的师生、项目专家组以及科学出版社表示衷心感谢.

高等教育改革无止境,教学内容改革无禁区,教材编写无终点.让我们共同努力,继续编出符合科学发展、顺应时代潮流的高质量教材,为高等数学教育做出应有的贡献.

郭　震

2012年8月1日于昆明

前　言

高等数学在经管类中应用十分广泛.随着计算机技术及其他高科技的普及和发展,微积分在经管类中应用的重要性日渐突出,这就决定了微积分的理论和方法具有广泛的应用价值.从1999年我国高等学校扩大招生规模至今,我国高等教育已实现从精英教育向大众化教育的转变,但与之相应的教材建设不尽如人意,还或多或少地停留在传统教育模式上,过分追求逻辑的严密性和理论体系的完整性,重理论而轻实践.那么,什么样的教材才适应当今学生的特点?针对这个问题,编者根据高等学校经管类专业高等数学(微积分)的教学大纲和教学基本要求,并结合编者多年的教学实践经验和在吸收"十五"、"十一五"规划教材成果的基础上编写了本书.在本书的编写过程中,力求体现如下特点:

(1) 强调概念,淡化理论.教材以现实、生动的实例引进数学概念,以简明通俗的语言深入浅出地阐述基本概念和基本理论,在保证数学概念的准确性及基本理论完整性的原则下,减少抽象的理论证明,并借助几何直观图形和实际意义解释概念和定理,使抽象的概念形象化,使复杂的问题简单化,从而降低难度,精简内容,以适应教学改革的时代需要.

(2) 结合专业,强化实用.在教学内容上充分体现"贴近实际,面向专业"的思想,并以"实用为目的",以"必须、够用为度",同时加强计算.因此,本教材优化整合了经济数学基础课程的基本内容,精选了一定数量的经济应用实例,将数学知识模块与经济案例相结合,使学生能将所学基本知识和基本理论应用到解决实际问题中去,从而使学生充分感受到数学的应用价值.

(3) 把方法的应用程序化、步骤化.

(4) 强调数学思想方法.本书注重培养学生用数学思想方法去分析和解决实际问题的能力,力求将数学的思想和方法融到经济生活中,体现学习经济数学的终极目标是解决实际生活中的经济问题,更好地为国家的经济建设服务,同时为后继相关课程的学习打下良好的数学基础.

(5) 适应少学时要求,教材内容按每周3学时,18周共54学时来编写.教师可以根据实际情况决定教学内容的取舍.

本教材分为上、下两册,上册内容包括函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分;下册内容包括定积分、微分方程初步、多元函数微分学、二重积分、级数;每章、每节后都附有一定量的习题,题型较全,以帮助学生巩固和提高所学知识,同时上、下册书后都附有习题参考答案或提示,以供参考.另

外,为适应不同层次、不同学科的需要,书中有的地方加了“ * ”号,它相对独立,可根据需要及学时多少进行适当删减.

与本书配套的多媒体课件、习题解答和学习辅导书也将陆续出版.

本书由10位具有丰富教学实践经验的教师,在云南省多所高等学校近十年使用的《经济数学》讲稿基础上,结合高等学校数学类课程改革的需要编写而成.编写组为保证本书的质量,将书稿以讲义的形式印制发放到多所院校进行试用,并根据试用过程中广大师生提出的建议、意见,反复对本书进行修改和补充,形成终稿.其中第1章由姚晓霞云南楚雄师范学院编写;第2章由梁双凤云南楚雄师范学院编写;第3章、9章由林谦云南师范大学编写;第4章由张玮云南玉溪师范学院编写;第5章由李薇云南红河学院编写;第6章由黄永云南昭通学院编写;第7章由杨朝丽昆明学院编写;第8章由梁林云南楚雄师范学院编写;第10章由何振华云南红河学院编写;部分习题解答由向华云南楚雄师范学院编写.全书由林谦、张纬和梁林老师负责插图和绘图.全书由林谦教授负责框架结构安排、统稿和定稿,由郭震教授主审.

本书在编写过程中,得到了参编院校的大力支持和帮助,特别是云南省数学学会理事长、云南师范大学数学学院院长郭震教授的全力支持,并负责审阅了全书,同时提出了许多宝贵的意见和建议.另外,科学出版社龚剑波、任俊红两位编辑为本书的出版做了大量繁杂而细致的工作,编者在此一并表示衷心感谢.

书中难免有不完善之处,敬请广大读者和同行批评指正,以便我们在第二版出版时进行纠正.

编　者

2012年7月于昆明

目　　录

序言
前言
第 1 章　函数 …… 1
1.1　函数 …… 1
1.2　函数的特性 …… 10
1.3　反函数与复合函数 …… 14
1.4　基本初等函数与初等函数 …… 17
1.5　几种常见经济函数 …… 21
习题一 …… 25
第 2 章　极限与连续 …… 28
2.1　数列极限 …… 28
2.2　函数极限及其性质 …… 33
2.3　无穷小量和无穷大量 …… 40
2.4　极限的运算法则 …… 44
2.5　极限存在准则　两个重要极限　连续复利 …… 49
2.6　无穷小量的阶和等价代换 …… 55
2.7　函数的连续性 …… 58
习题二 …… 70
第 3 章　导数与微分 …… 74
3.1　导数概念 …… 74
3.2　导数的运算法则及基本导数公式 …… 82
3.3　高阶导数 …… 94
3.4　函数的微分 …… 97
3.5　导数在经济学中的简单应用 …… 105
习题三 …… 115
第 4 章　微分中值定理与导数的应用 …… 119
4.1　微分中值定理 …… 119
4.2　洛必达法则 …… 125
4.3　函数的单调性及其判别法 …… 133
4.4　函数的极值、最值及其应用 …… 137
4.5*　曲线的凹凸性、拐点与渐近线 …… 145
4.6*　函数图形的描绘 …… 151

习题四 …… 155
第 5 章 不定积分 …… 159
5.1 原函数和不定积分概念 …… 159
5.2 不定积分的性质与基本积分公式 …… 163
5.3 不定积分的换元积分法 …… 166
5.4 不定积分的分部积分法与基本积分表 …… 178
5.5 不定积分在经济中的应用 …… 183
习题五 …… 187
习题参考答案或提示 …… 190

第1章　函　　数

函数是数学中最重要的基本概念之一，是现实世界中量与量之间的依存关系在数学中的反映，也是微积分学研究的主要对象．本章将在中学已有知识的基础上，进一步阐明函数的定义和性质，总结在中学已学过的一些函数，并介绍一些经济学中常用的函数．

1.1　函　　数

1.1.1　集合

1. 基本概念

1）集合的含义

某些指定对象构成的总体，构成集合的对象称为集合的**元素**．

2）集合元素的三特性

(1) **确定性**——对确定集合而言，任一指定对象或者是或者不是确定集合中的元素．

(2) **互异性**——在确定集合中，任何两个元素都是不同的对象，相同对象归入一个集合时仅算一个元素．

(3) **无序性**——在确定集合中，元素的排列不分先后顺序，因此判断两个集合是否相同仅需比较它们所含元素是否相同，不需考查元素的排列顺序是否一样.

3）集合的表示

通常用大写字母 $A,B,C,X,Y,\cdots$ 表示集合，小写字母 $a,b,c,x,y,\cdots$ 表示元素．

(1) **列举法**——把集合中的元素一一列举出来，然后用大括号括起来．例如，$A=\{a,b,c\}$.

(2) **描述法**——若集合是由具有某种性质 P 的全体元素所组成，则可将集合表为

$$\{a \mid a \text{ 具有性质 } P\}$$

的形式．例如，$A=\{a \mid a \text{ 为非直角三角形}\}$，$B=\{x \mid x-3>2\}$.

4) 常用数集及其记号

自然数集 $\mathbf{N}$,正整数集 $\mathbf{N}^+$,整数集 $\mathbf{Z}$,有理数集 $\mathbf{Q}$,正有理数集 $\mathbf{Q}^+$,负有理数集 $\mathbf{Q}^-$,实数集 $\mathbf{R}$,正实数集 $\mathbf{R}^+$,负实数集 $\mathbf{R}^-$.

5) 集合的分类

有限集——所含元素个数有限的集合.

无限集——所含元素个数无限的集合.

6) 集合、元素间的基本关系

(1) 集合与元素间的基本关系

当 a 是集合 A 中的元素时,称元素 a **属于集合** A,并记作 $a\in A$,否则称元素 a **不属于集合** A,记作 $a\notin A$. 例如,$0\in\mathbf{N}$ 但 $0\notin\mathbf{N}^+$.

(2) 集合与集合间的基本关系

相等——若集合 A 与 B 具有相同的元素,则称 A 与 B **相等**,并记作 $A=B$.

子集——若集合 A 中的元素都是集合 B 中的元素,则称 A 是 B 的**子集**,也称 A **包含于** B 或 B **包含** A,并记作 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$,而 $A\not\subset B$ 则表示 A 不是 B 的子集.

真子集——若 $A\subseteq B$ 且 B 中至少有一个元素不属于 A,则称集合 A 是集合 B 的**真子集**,并记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.

空集——不含任何元素的集合,通常用 $\varnothing$ 表示,并**规定**:空集是任何集合的子集.

显然,对任何集合 A 与 B 来说,下列关系成立(自己思考或验证):

$A\subseteq A$,$\varnothing\subseteq A$;

$A=B\Leftrightarrow A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$;

若 $A\subseteq B$,$B\subseteq C$,则 $A\subseteq C$(**传递性**).

为方便讨论起见,今后不再区分包含符号$\subseteq$与真包含符号$\subset$.

2. 集合的运算

1) 并运算

由 A 和 B 中的所有元素组成的集合称为 A 和 B 的**并集**,并记作 $A\cup B$,即

$$A\cup B=\{x\,|\,x\in A\text{或}x\in B\}.$$

2) 交运算

由 A 和 B 中的所有公共元素组成的集合称为 A 和 B 的**交集**,并记作 $A\cap B$,即

$$A\cap B=\{x\,|\,x\in A\text{且}x\in B\}.$$

3) 差运算

由属于 A 而不属于 B 的所有元素组成的集合称为 A 和 B 的**差集**,并记作

$A-B$,即

$$A-B=\{x\mid x\in A\text{且}x\notin B\}.$$

4) 补运算

若 $A\subseteq I$(I 称为**全集**),则称差集 $I-A$ 为集合 A 关于全集 I 的**补集**,并记作 A^C,即

$$A^C=I-A=\{x\mid x\in I\text{ 且}x\notin A\}.$$

3. 集合的运算性质

(1) **交换律**:$A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$.

(2) **结合律**:$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C), (A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

(3) **分配律**:$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C), (A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

(4) **对偶律**:$(A\cup B)^C=A^C\cap B^C, (A\cap B)^C=A^C\cup B^C$.

1.1.2　实数集与数轴

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\left.\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数}\\ \text{零}\\ \text{负整数}\end{cases}\\ \text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\ \text{负分数}\end{cases}\end{cases}\right\}\text{无限循环小数}\\ \text{无理数——无限不循环小数}\end{cases}$$

实数集——由全体实数构成的集合 $\{x\mid -\infty<x<+\infty\}$,并记作 $\mathbf{R}$,即

$$\mathbf{R}=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}.$$

数轴——具有原点、方向和单位长度三要素的直线.

数轴的主要意义在于把实数用数轴上的点表示出来,且数轴上的全体点与全体实数构成一一对应的关系(图 1-1).

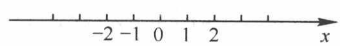

图 1-1

1.1.3　区间

区间——介于某两个实数之间或不超过(不小于)某一实数的全体实数或全体实数,即

$$
\text{区间}\begin{cases}\text{有限区间}\begin{cases}\text{开区间}(a,b)=\{x\,|\,a<x<b\}\\ \text{闭区间}[a,b]=\{x\,|\,a\leqslant x\leqslant b\}\\ \text{半开半闭区间}\begin{cases}\text{左开右闭区间}(a,b]=\{x\,|\,a<x\leqslant b\}\\ \text{左闭右开区间}[a,b)=\{x\,|\,a\leqslant x<b\}\end{cases}\end{cases}\\ \text{无限区间}\begin{cases}(-\infty,+\infty)=\{x\,|\,-\infty<x<+\infty\}=\mathbf{R}\\ (a,+\infty)=\{x\,|\,x>a\}\\ [a,+\infty)=\{x\,|\,x\geqslant a\}\\ (-\infty,b)=\{x\,|\,x<b\}\\ (-\infty,b]=\{x\,|\,x\leqslant b\}\end{cases}\end{cases}
$$

1.1.4 绝对值

对任意实数 x,用符号 $|x|$ 表示 x 的绝对值,并规定 $|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0,\end{cases}$ 且易见 $|x|=|x-0|$ 表示数轴上的点 x 与原点之间的距离,绝对值及其运算具有下列性质:

$|-x|=|x|,\quad -|x|\leqslant x\leqslant |x|$;

$\big||x|-|y|\big|\leqslant |x\pm y|\leqslant |x|+|y|,\qquad |xy|=|x||y|,\qquad \left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}\,(y\neq 0)$;

$|x|<a \iff -a<x<a\,(a>0),\ |x|>b \iff x<-b$ 或 $x>b\,(b\geqslant 0)$;

$|x|\leqslant a \iff -a\leqslant x\leqslant a\,(a\geqslant 0),\ |x|\geqslant b \iff x\leqslant -b$ 或 $x\geqslant b\,(b\geqslant 0)$.

1.1.5 邻域

定义 1.1 若 $a\in\mathbf{R},\delta>0$,则称实数集(开区间)

$$\{x\,|\,|x-a|<\delta\}=\{x\,|\,a-\delta<x<a+\delta\}=(a-\delta,a+\delta)$$

为以点 a 为中心,δ 为半径的**邻域**,简称点 a 的 δ **邻域**(图 1-2(a)),并记作 $\cup(a,\delta)$,即

$$\cup(a,\delta)=\{x\,|\,|x-a|<\delta\}=\{x\,|\,a-\delta<x<a+\delta\}=(a-\delta,a+\delta),$$

而将从 $\cup(a,\delta)$ 中去掉中心点 a 后的集合 $\mathring{U}(a,\delta)$ 称为点 a 的 δ **去心邻域**(图 1-2(b)),即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\,|\,0<|x-a|<\delta\}=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta).$$

例 1.1 解不等式 $|x+3|\geqslant 1$(用区间表示),并在数轴上表示出来.

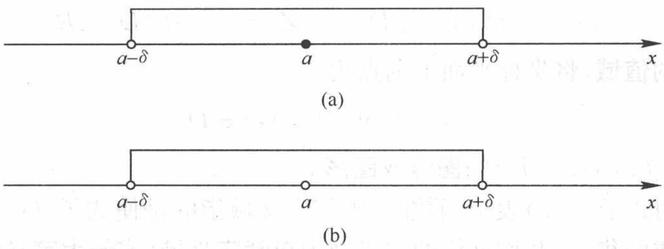

图 1-2

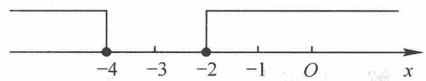

图 1-3

解　$|x+3|\geqslant 1 \Rightarrow x+3\leqslant -1$ 或 $x+3\geqslant 1 \Rightarrow x\leqslant -4$ 或 $x\geqslant -2$. 用区间可表为

$$(-\infty,-4]\cup[-2,+\infty),$$

用数轴表示则如图 1-3 所示.　　**解毕**

例 1.2　满足不等式$|x+2|<5$ 的全体实数,称为以(　)为中心、(　)为半径的邻域,用区间可表为(　),并在数轴上表示出来.

解　因$|x+2|<5$ 即$|x-(-2)|<5$,故前两个括号内应填-2 和 5,而由$|x+2|<5 \Rightarrow -7<x<3$,因而后一个括号内填$(-7,3)$,且在数轴上的图形如图 1-4所示.　　**解毕**

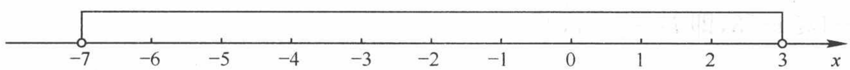

图 1-4

1.1.6　函数概念

1. 函数定义

函数,是微积分研究的主要对象,也是数学中最基本的概念之一,它反映的是两个实数集之间的一种对应关系,下面给出定义.

定义 1.2　若$\varnothing\neq D\subset R$,且 f 是由 D 到 R 的一个对应法则,使得对每个 $x\in D$,通过 f 都存在唯一的 $y\in R$ 与之对应,则称 f 为定义在 D 上的**函数**,也称 **y 是 x 的函数**,并记为

$$f: D\rightarrow R \text{ 或 } y=f(x)\ (x\in D),$$

同时称 x 为**自变量**,y 为**因变量**,D 为函数 f 的**定义域**(还可将 D 记为 D_f,以明确 D_f 为函数 f 的定义域),而将全体函数值构成的集合

$$\{y \mid y=f(x), x\in D\} \xlongequal{\text{记为}} Z_f \xlongequal{\text{或记为}} f(D)\subset R$$

称为函数 f 的**值域**,将坐标平面上的点集

$$\{(x,y) \mid y=f(x), x\in D\}$$

称为函数 $y=f(x)\,(x\in D)$ 的**图像或图形**.

如果仅用式子 $f(x)$ 表示函数时,则其定义域指的是使式子 $f(x)$ 有意义的全体实数 x 构成的集合,并称这样的定义域为**自然定义域**(或**最大定义域**).

例 1.3 求函数 $y=(x-2)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ 的定义域 D.

解 要使式子 $(x-2)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ 有意义,则必有 $\begin{cases}\dfrac{x+1}{x-1}\geqslant 0, \\ x-1\neq 0,\end{cases}$ 即有

$$\begin{cases}(x+1)(x-1)\geqslant 0 \\ x\neq 1\end{cases}$$

由此可解得 $x>1$ 或 $x\leqslant -1$,即 $D=(-\infty,-1]\cup(1,+\infty)$. **解毕**

例 1.4 求函数 $y=\arcsin\dfrac{x-1}{2}$ 的定义域 D.

解 要使式子 $\arcsin\dfrac{x-1}{2}$ 有意义,则必有 $\left|\dfrac{x-1}{2}\right|\leqslant 1$,即有 $|x-1|\leqslant 2$,由此解得 $-1\leqslant x\leqslant 3$,即 $D=[-1,3]$. **解毕**

2. 函数的要素及相同函数的判定

由函数的定义知,确定一个函数主要由其两个要素 $\begin{cases}(1)\ \text{定义域}, \\ (2)\ \text{对应法则}\end{cases}$ 所决定. 因此,对给定的两个函数 f 和 g,要判断它们是否表示同一个函数,只要看它们对应的两对要素是否分别相同即可,即

$$f\ \text{和}\ g\ \text{表示同一个函数} \Leftrightarrow \begin{cases}(1)\ \text{定义域}\ D_f=D_g, \\ (2)\ f\ \text{与}\ g\ \text{表示的对应法则相同},\end{cases}$$

所以,一个函数用什么字母作为其自变量和因变量的符号都可以,都不影响函数的实质,如

$$y=f(x)\ (x\in D),\ s=f(t)\ (t\in D)\ \text{与}\ v=f(u)\ (u\in D)$$

都表示同一个函数.

例 1.5 判断下列各对函数是否相同,并说明理由:

(1) $f(x)=\ln x^2, g(x)=2\ln x$; (2) $f(x)=x, g(x)=|x|$;

(3) $f(x)=|x|, g(x)=\sqrt{x^2}$.

解　(1) 因 $D_f=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，$D_g=(0,+\infty)$，故 $D_f\neq D_g$，即函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域不相同，从而 $f(x)$ 与 $g(x)$ 分别表示两个不同的函数．

(2) 虽然 $D_f=(-\infty,+\infty)=D_g$，但由于 $f(-1)=-1\neq 1=g(-1)$，即函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的对应法则不同，故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 分别表示两个不同的函数．

(3) 因 $D_f=(-\infty,+\infty)=D_g$，且 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，有 $f(x)=|x|=\sqrt{x^2}=g(x)$，故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 表示相同的函数．　**解毕**

3. 函数的三种表示法

1) 公式法(或解析法)

用一个公式(或解析式子)表示函数的方法，如例 1.3～例 1.5 中的函数采用的就是公式法．

优点:便于作理论上的推导；　**缺点**:不直观．

2) 图像法

用平面上的一条曲线表示函数的方法．

优点:直观；　**缺点**:不便于作理论上的推导．

3) 表格法

用表格表示函数的方法．

优点:计算简便；　**缺点**:数据不全．

通常在讨论函数时，常将公式法和图像法综合起来使用，这样就既直观又便于作理论上的推导，而表格法现在使用的不多．

4. 分段函数

有些函数，在其定义域内自变量 x 取不同值时，不能用一个统一的数学式子来表示，而要用两个或两个以上的数学式子才能表示，这类函数通常称为**分段函数**．但要注意，分段函数在其定义域内只代表一个函数，而不代表几个或无穷多个函数．

例 1.6　以下函数均为**分段函数**：

(1) **符号函数**(图 1-5)：$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$

(2) **绝对值函数**(图 1-6)：

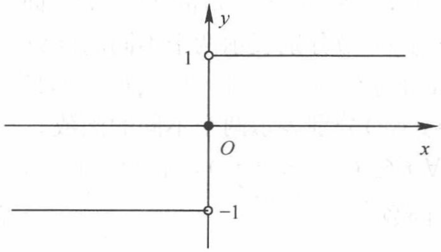

图 1-5

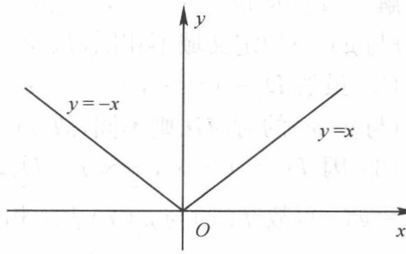

图 1-6

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}=\begin{cases}x, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -x, & x<0\end{cases}=x\cdot\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}=x\cdot \operatorname{sgn}x.$$

(3) **狄利克雷**(Dirichlet)**函数**(图 1-7):$y=D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q},\\ 0, & x\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}.\end{cases}$

(4) **取整函数**(图形为**阶梯曲线**,见图 1-8):

$$y=[x]=n(n\leqslant x<n+1,n\in\mathbf{Z}),$$

图 1-7

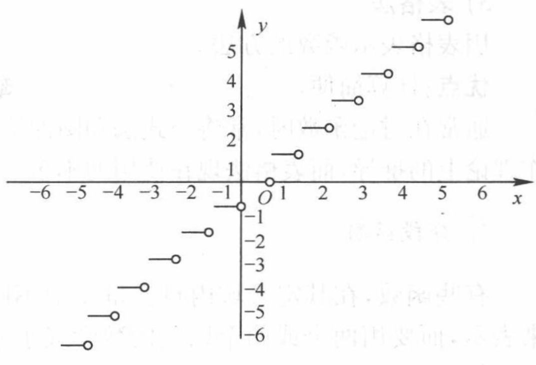

图 1-8

其中$[x]$表示不超过 x 的最大整数,且显然有$[x]\leqslant x<[x]+1(\forall x\in\mathbf{R})$. 例如,

$$[2.3]=2,\quad [4]=4,\quad [-0.3]=-1,\quad [-2.3]=-3.$$

例 1.7　已知 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & |x|<1,\\ x^2-1, & 1<|x|\leqslant 2.\end{cases}$ (1) 求 $f(x)$的定义域;(2) 求分界点;(3) 求函数值 $f(0)$,$f(2)$和 $f(-1)$;(4) 作出函数的图形.

解　(1) 因仅当$|x|<1$及$1<|x|\leqslant 2$,即

$$-1<x<1 \text{ 及}(-2\leqslant x<-1 \text{ 或 } 1<x\leqslant 2)$$

时函数才有定义,故 $D_f=[-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,2]$.

(2) 由 $f(x)$的表达式易见分界点为$x=-1$ 和 $x=1$.

(3) 因当$|x|<1$时，$f(x)=\sqrt{1-x^2}$，故$f(0)=\sqrt{1-0^2}=1$；

当$1<|x|\leqslant 2$时，$f(x)=x^2-1$，故$f(2)=2^2-1=3$；

当$x=-1$时，函数$f(x)$无定义，故$f(-1)$不存在．

(4) 图形见图1-9．　　**解毕**

例1.8　已知某函数在闭区间$[-1,1]$上的图形如图1-10所示，试用解析式表示该函数．

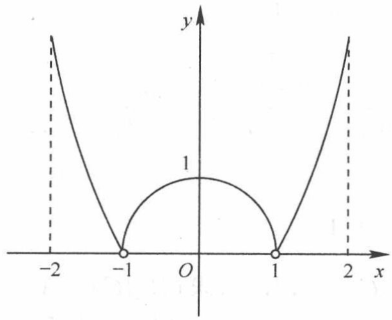

图1-9

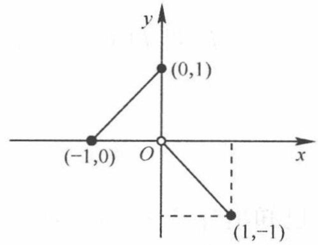

图1-10

解　如图1-10所示，函数在y轴左方的图形是连接点$(-1,0)$和点$(0,1)$的直线段，而在y轴右方的图形是连接原点$O(0,0)$和点$(1,-1)$且去掉原点的直线段，故由直线的两点式方程及函数的定义域可得

$$f(x)=\begin{cases}x+1, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ -x, & 0<x\leqslant 1.\end{cases}$$　　**解毕**

5．正确运用函数记号求函数值及函数的表达式

按函数定义，$\forall x\in D$，将法则f所对应的因变量y记作$f(x)$，称为函数f在点x处的函数值．当x取定值x_0时，所对应的因变量的值记作$y_0=f(x_0)$或$y_0=y|_{x=x_0}$．

当$f(x)$仅是由一个表达式表示的函数时，则将表达式中的x代之以x_0便得到$f(x_0)$，但当$f(x)$为分段函数时，则要根据x_0所在的子集合（或小区间），用$f(x)$相对应的表达式来计算函数值$f(x_0)$．

例1.9　已知$f(x)=x^2$，求$f(x_0+a)-f(a)$．

解　因$f(x)=x^2$，故$f(x_0+a)-f(a)=(x_0+a)^2-a^2=x_0^2+2ax_0$．　　**解毕**

例1.10　若$f(x-1)=x^2$，求$f(x+1)$．

解法一　令$x-1=t+1$即$x=t+2$，则结合$f(x-1)=x^2$，有

$$f(t+1)=(t+2)^2 \quad 即 \quad f(x+1)=(x+2)^2.$$

解法二　因$f(x-1)=x^2$，故$f(x+1)=f[(x+2)-1]=(x+2)^2$．　　**解毕**