

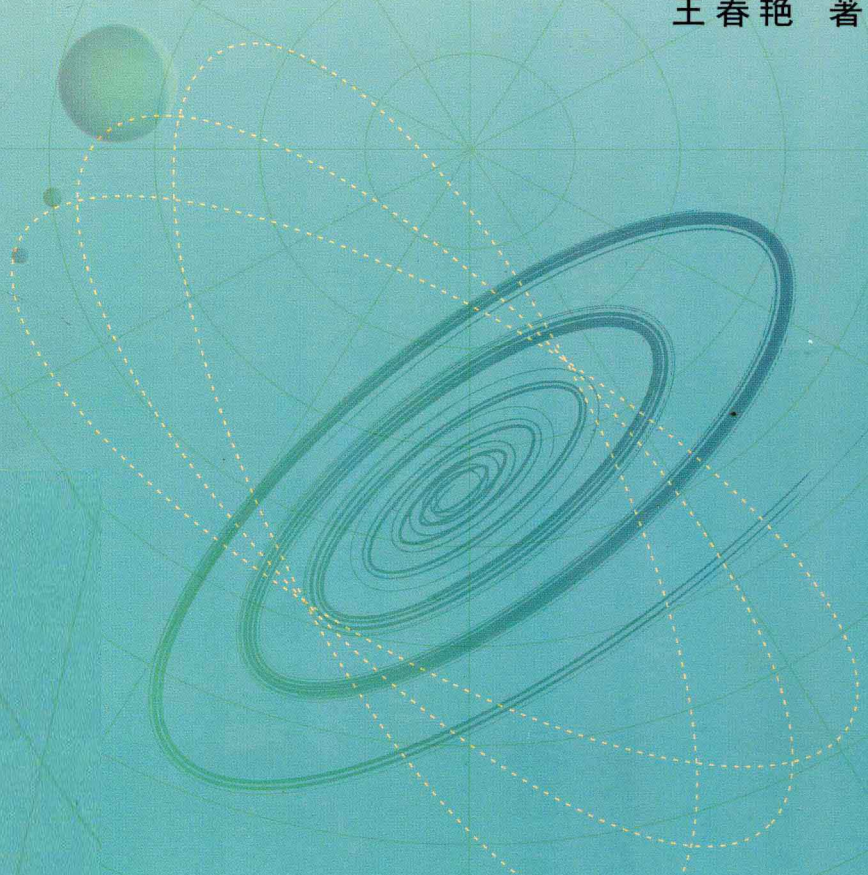
QUASINORMAL MODES IN A BLACK HOLE SPACETIME



黑洞

时空中的似正规模

王春艳 著



東北大學出版社
Northeastern University Press

黑洞时空中的似正规模

王春艳 著

东北大学出版社

· 沈 阳 ·

© 王春艳 2013

图书在版编目 (CIP) 数据

黑洞时空中的似正规模 / 王春艳著. — 沈阳: 东北大学出版社, 2013. 4
ISBN 978-7-5517-0310-9

I. ①黑… II. ①王… III. ①黑洞—研究 IV. ①P145.8

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 076528 号

出 版 者: 东北大学出版社

地址: 沈阳市和平区文化路 3 号巷 11 号 110004

电话: 024—83687331 (市场部) 83680267 (社务室)

传真: 024—83680180 (市场部) 83680265 (社务室)

E-mail: neuph@neupress.com

Web: <http://www.neupress.com>

印 刷 者: 沈阳市第二市政建设工程公司印刷厂

发 行 者: 东北大学出版社

幅面尺寸: 170mm × 240mm

印 张: 5.5

字 数: 102 千字

出版时间: 2013 年 4 月第 1 版

印刷时间: 2013 年 4 月第 1 次印刷

策划编辑: 王兆元

责任编辑: 刘 莹

责任校对: 刘乃义

封面设计: 刘江旻

责任出版: 唐敏智

ISBN 978-7-5517-0310-9

定 价: 21.00 元

前言

黑洞，作为广义相对论预言和描述的一类具有神秘特性的天体，一直是物理学和天文学研究的一个热门话题。现有的研究表明，黑洞的很多性质暗示出物理学的基本规律与时空属性之间可能存在着深刻的内在联系。

爱因斯坦广义相对论认为，物质的存在会造成时空的弯曲，而在时空弯曲得非常厉害的地方时空几何性质会发生变化，进而形成黑洞。然而，由于黑洞自身特殊的结构和性质，天文观测者迄今为止都没有获得一个直接的证据证明黑洞的真实存在。自霍金辐射被发现以后，人们认识到黑洞具有温度和热辐射，黑洞是一个真正的热力学系统。黑洞微扰理论表明，如果给黑洞一个微扰，当微扰衰退后，黑洞仍能回到一个平衡状态。研究表明，微扰场演化的似正规模阶段只与黑洞的背景时空性质有关，与初始的扰动形式无关。因此，不同的黑洞应该具有不同的似正规模频率。

本书较为系统地阐述了黑洞的基础理论、黑洞似正规模频率的研究方法和意义，以及几类黑洞时空的似正规模频率。全书共分为4章，第1章介绍了黑洞的基础理论，具体包括黑洞的提出、形成机制、天文观测、分类以及黑洞的热力学性质。第2章介绍了黑

洞的微扰理论，侧重说明似正规模阶段的研究意义和研究方法。第3章介绍了有 Quintessence 暗能量包围黑洞的低频似正规模，包括标量场、引力场、电磁场和 Dirac 场扰动，并且详细分析了似正规模频率与黑洞背景时空基本参量之间的变化关系。第4章介绍了变形 Hořava - Lifshitz 引力理论中黑洞时空的似正规模频率。

随着理论研究和天文观测的发展，本书中的研究方法和结论也有待更新和修正。由于作者水平有限，文中难免有错误和不当之处，欢迎各位读者批评指正。

作 者

2013 年 4 月

目 录

第 1 章 黑洞基础理论	1
1.1 黑洞的提出	1
1.2 黑洞的形成机制	3
1.3 黑洞的天文观测	5
1.4 黑洞的分类	7
1.4.1 按照黑洞的基本参量分类	7
1.4.2 按照黑洞质量大小分类	11
1.5 黑洞的热性质	13
1.5.1 面积定理	13
1.5.2 贝肯斯坦-斯马尔公式	14
1.5.3 极端黑洞与宇宙监督假设	14
1.5.4 稳态黑洞的表面引力	15
1.6 霍金辐射	16
本章参考文献	19
第 2 章 黑洞的微扰理论	20
2.1 微扰理论	20
2.2 似正规模的定义	22
2.3 研究似正规模的意义	24
2.3.1 黑洞的参数估计	24
2.3.2 AdS/CFT 对应和灰体因子	26
2.3.3 黑洞视界面量子化与 Hod 猜想	27
2.4 研究方法	29
2.4.1 WKB 近似法	29

2.4.2	Pöshl - Teller 势近似法	33
2.4.3	连续分数法	34
2.4.4	有限差分法	35
2.4.5	单值法	37
本章参考文献		39
第3章 Quintessence 暗能量包围黑洞的低频似正规模		41
3.1	宇宙学模型	41
3.1.1	标准宇宙学模型	41
3.1.2	暗能量	44
3.2	Quintessence 暗能量模型与黑洞	46
3.2.1	Quintessence 暗能量模型	46
3.2.2	Quintessence 暗能量包围的黑洞时空	47
3.3	Quintessence 暗能量包围的 Schwarzschild 黑洞时空的似正规模	49
3.3.1	有质量标量场扰动	49
3.3.2	Dirac 场扰动	52
3.3.3	引力场扰动	57
3.3.4	电磁场扰动	60
3.4	Quintessence 暗能量包围的整体单极子黑洞时空的似正规模	63
3.4.1	黑洞度规	64
3.4.2	似正规模频率与参数的关系	65
本章参考文献		68
第4章 变形 Hořava - Lifshitz 引力理论中黑洞的似正规模		72
4.1	Hořava - Lifshitz 引力理论的基本思想	72
4.2	变形 Hořava - Lifshitz 引力理论中的黑洞	73
4.3	变形 Hořava - Lifshitz 引力理论中的标量场扰动	76
4.4	变形 Hořava - Lifshitz 引力理论中的 Dirac 场扰动	80
本章参考文献		82

第1章 黑洞基础理论

天空中存在着黑暗的天体，像恒星那样大，或许也像恒星那样多。一个具有与地球同样密度而直径为太阳 250 倍的明亮星球，它发射的光将被它自身的引力拉住而不能被我们接收。正是由于这个道理，宇宙中最明亮的天体很可能却是看不见的。

——Pierre Simon Laplace (1796)^[1]

1.1 黑洞的提出

黑洞是广义相对论预言的一种特殊天体。爱因斯坦广义相对论认为，物质的存在会造成时空的弯曲，人们通常所说的万有引力就是时空弯曲的表现。在时空弯曲得非常厉害的地方，时空几何性质会发生重要的变化，形成黑洞。

从万有引力定律可以知道，星体的引力对物体有束缚作用，物体只有具有足够大的速度才能摆脱星体的束缚，这个阈值被称为“逃逸速度”。一般来说，星体的质量越大、密度越大，物体从它表面逃离所需的速度就越大。当星球的密度达到一定程度时，物体的逃逸速度必须大于光速，否则它就不可能逃离这颗星球。最早预言黑洞的人是英国的米歇尔(R. J. Michell)和法国的拉普拉斯(P. S. Laplace)，他们从牛顿力学和光的微粒说出发，预言了“宇宙中最明亮的天体很可能却是看不见的”。在当时的学术界，光的微粒说占据上风，认为光也受万有引力作用，因此，当一颗恒星的万有引力强大到可以把自身发射的光子拉回来的时候，这颗星就将成为外部观测者看不见的“暗星”了。

依据牛顿的能量理论可以算出这类“暗星”的形成条件。设光子质量为 m ，光速为 c ，星球的质量为 M ，半径为 r ，则从星球表面射出的光子的动能和势能分别表示为

$$E_k = \frac{1}{2}mc^2 \quad (1-1)$$

$$E_p = \frac{GMm}{r} \quad (1-2)$$

其中, G 是万有引力常数。

当光子的动能不大于势能, 即

$$\frac{1}{2}mc^2 \leq \frac{GMm}{r} \quad (1-3)$$

时, 它就不可能逃离星球了, 那么相对于远处的观测者来说, 星球就是不可见的。

因此, 从(1-3)式可有

$$r \leq \frac{2GM}{c^2} \quad (1-4)$$

这就是拉普拉斯等人给出的“暗星”的形成条件。它表明, 当一个星球的质量和半径之间满足(1-4)式的关系时, 这个星球发射的光将被万有引力拉回去, 而这颗星就是不可见的。

当19世纪初光的干涉实验被成功完成时, 光的波动说登上了历史舞台, 这使得拉普拉斯等人在微粒说基础上得出的“暗星”形成条件((1-4)式)的正确性受到质疑。后来, 美国物理学家奥本海默(J. R. Oppenheimer)和施耐德(H. Snyder)从爱因斯坦广义相对论出发, 再一次预言了“暗星”的存在。他们认为, 当某个时空区弯曲得非常厉害的时候, 光线将不能从那个区域逃离到远方。在远方观测者看来, 这个区域将是一颗看不见的“暗星”。

有趣的是, 奥本海默从广义相对论得出的“暗星”形成条件, 在形式上与拉普拉斯等人从牛顿理论给出的暗星条件完全相同。但是, 随着物理学的发展, 今天来看(1-1)式和(1-2)式的推导时, 将会发现两个错误: 第一个错误是光子的动能不应该是 $\frac{1}{2}mc^2$, 而应该是 mc^2 ; 第二个错误是描述引力的不应是万有引力定律, 而应该是广义相对论。巧合的是, 这两个错误相互抵消, 最终得到了正确的结论。但这里需要指出的是, 在拉普拉斯时代, 人们并不知道光速是速度的极限, 因此, 人们认为即使光子逃不出去的“暗星”, 也许还有其他物体可以逃离。而广义相对论认为, 光速是物体和信号的最大传播速度, 也就是说, 光都逃不出去的暗星, 任何物体和信息也都逃不出去。

奥本海默预言的“暗星”, 就是今天所说的“黑洞”。然而, 他对“暗星”的预言, 一开始就遭到爱因斯坦(A. Einstein)和惠勒(J. Wheeler)等人的反对, 他们认为, 一定有某种物理机制会阻止恒星塌缩成“暗星”。因此,

“暗星”理论长时期没有受到物理学界的重视。爱因斯坦始终不承认“暗星”存在的可能性，而惠勒等人则经过长期的反对和钻研之后，改变了自己的观点，认识到奥本海默预言的“暗星”是可能存在的，并最终为“暗星”起名为“黑洞”。

1.2 黑洞的形成机制

黑洞概念被提出以后的几十年里，黑洞物理逐渐成为天体物理学的一个前沿热门话题。那么黑洞是如何形成的呢？这个话题需要从恒星的演化与引力塌缩谈起^[2]。

通过指向空中的望远镜可以发现，数以千亿计的恒星各式各样，它们不仅光度不同，而且颜色各异。这里的光度是指恒星的绝对光度，即反映恒星在单位时间内释放出的光能。从绝对光度可以估算出恒星的体积，而恒星的颜色则反映了它们具有不同的表面温度。1907年，丹麦天文学家赫兹普隆(E. Hertzsprung)发现，恒星的颜色和光度之间存在一定的统计关联，并于1911年将测定的银河系星团中的几个恒星的颜色和光度画在同一张图上，用表面温度作为横轴，光度作为纵轴，如图1-1所示。可以发现，大多数恒星都集中在图上一些特定的小区内。在1913年，美国天文学家罗素(H. Russell)通过研究图1-1中邻近恒星的光度与表面温度的关系，也独立地得到了类似的结果，因此，这一关联图被称作赫罗(Hertzsprung - Russell)图，简称H-R图。

H-R图中能够清晰地体现出恒星的演化过程。如图1-1所示，绝大多数恒星都聚集在H-R图中从左上方到右下方的一条倾斜的窄带上，因此这条带被称作恒星的主序列，相应的恒星被称为主序星。光度大的主序星表面温度高，颜色偏蓝，位于主序列的左上部；光度小的则表面温度低，颜色偏红，位于主序列的右下部。太阳位于主序列的中部，是黄色的恒星。主序列的右上方有低温而巨大的红巨星，左下方有形体小而高温的白矮星，它们属于恒星演化的不同阶段。若给每一个温度范围定义一个光谱型，从高温的蓝星到低温的红星，依次分为O, B, A, F, G, K, M七个光谱型，其中太阳属于黄色的G型，其表面温度约为6000K。另外，还有其他少数恒星位于主序列之外的一些特定区域内，它们分别被称作红巨星、超巨星和白矮星等。从H-R图中还可以看到，等 R (半径)线是向右下方倾斜的直线，即右上方是恒星半径增大的方向，所以巨星都是半径很大但温度很低的恒星，而半径小温度高的白矮星则位于主序列的左下部。

恒星的一生是在同引力的斗争中度过的。恒星内每一个气体原子都受到

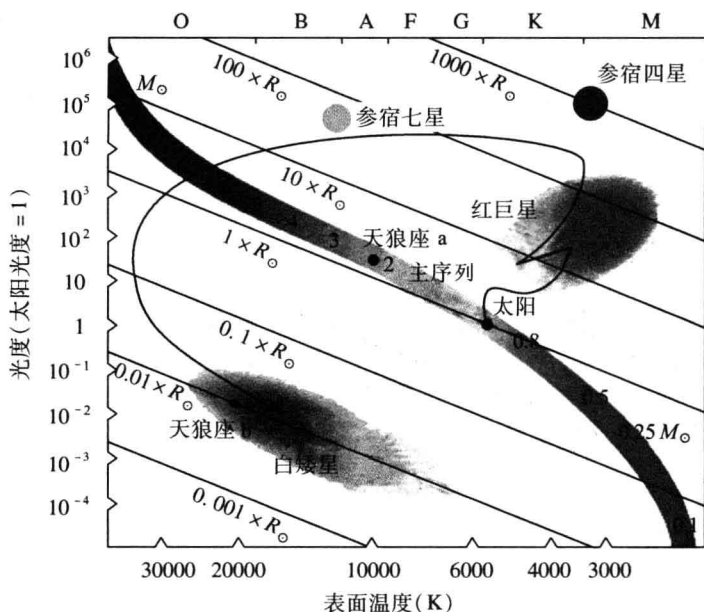


图1-1 H-R图中恒星的演化 ($R_{\odot}$ 为太阳半径, $M_{\odot}$ 为太阳质量)

拉向中心的引力, 如果恒星没有内部压力对抗这种吸引, 这颗星就会向内塌缩, 所有原子落向中心而形成黑洞。因此, 恒星赖以生存的条件是星体内部存在与引力相抗衡的压力。

弥漫于银河系中的星际物质(尘埃和气体, 主要由氢和氦组成), 在万有引力作用下, 塌缩变热, 点燃热核反应成为主序星。在主序星阶段, 恒星主要是靠辐射产生的向外膨胀的压力与引力塌缩产生的向内的压力达到平衡来维持的。以太阳为例, 在主序星阶段, 太阳的核心温度高于 4×10^6 K, 一连串反应使核心内的四个氢原子结合成一个氦原子并放出巨大的能量。太阳的含氢量极为丰富, 它是一颗巨大的缓慢燃烧的氢弹, 至今已燃烧了约 45 亿年。在氢燃烧期间, 太阳暂时(约 90 亿年)停止了塌缩。然而, 太阳(任何其他恒星也一样)的氢燃烧终究是有限的, 一旦耗尽, 由中心产生的能量已经不多, 再没有足够的力量来承担起外壳巨大的重量。所以, 在外壳的重压之下, 核心开始塌缩而进一步致密和升温, 产生的能量补充恒星发光损失的能量, 而进入红巨星阶段。此后, 质量不同的恒星将有各自不同的命运, 大质量的恒星在主序星阶段停留的时间短于小质量的恒星停留的时间。

如果恒星的质量 M 小于钱德拉塞卡极限 $1.4M_{\odot}$ ($M_{\odot}$ 是太阳的质量), 则核心物质被压缩到电子也互相紧靠在一起, 进而产生巨大的电子简并压, 这

种简并压足以抵抗恒星的进一步塌缩，最后稳定下来，成为小而高密、高温的白矮星。而中等质量的恒星，电子被挤压得使其简并压也抗衡不住引力，进一步塌缩，将中子挤压到互相紧靠而产生中子简并压，中子简并压抗衡了引力塌缩而稳定下来并形成中子星。中子星的最大质量不能大于奥本海默极限($3M_{\odot} \sim 4M_{\odot}$)。对于质量大于 $25M_{\odot}$ 的恒星，当它们演化成中子星后其体积将大于中子星的最大体积，因此会再次发生塌缩，当它们的半径收缩到一定程度(视界半径)时，巨大的引力使得即使光也无法向外射出，从而形成黑洞。

1.3 黑洞的天文观测

在黑洞被提出后的很长一段时间里，对黑洞的研究都只是停留在纸面上，宇宙中是否真的存在黑洞一直是个谜。1925 年 12 月，在广义相对论发表不到一个月时，施瓦希(K. Schwarzschild)得到爱因斯坦场方程的第一个精确解(真空球对称解)，它可以描述一个静止球对称无电荷星体的外部场。除了施瓦希解以外，爱因斯坦场方程还存在很多其他解。如 20 世纪 60 年代克尔(Kerr)得到了旋转物体的爱因斯坦场方程的真空外部解，并被纽曼(Newman)推广到带有荷电的情况，给出了稳态黑洞外的引力和电磁场的描述，即 Kerr - Newman 黑洞。同时期，1962 年致密 X 射线源的发现，1963 年类星体的发现，1967 年脉冲星的发现，都大大推动了对黑洞的理论研究和实验探索，大量有关黑洞的重要性质和定律被发现，天体物理学家也开始考虑探测黑洞存在的可能性。

目前已知的寻找恒星级黑洞的途径是由双星系统提供的。当双星系统中一个子星的气体被另一个子星吸积时，便会发出很强的 X 射线辐射，因此，在有 X 射线的双星系统中，如果一个子星的质量超过中子星质量的上限，且光学不可见，那么这个子星就很可能是黑洞。最典型的是天鹅座 X-1。天文学家们对天鹅座研究后发现，它是一个很强的 X 射线辐射源，在它附近有一颗大约 5 倍于太阳质量的普通恒星围绕着发出 X 射线源的地方旋转。对这一现象的最好解释是，物质从可见星的表面被吹起来，当它落向不可见的伴星时，其运行轨迹呈螺旋状，并且变得非常热而发出 X 射线，如图 1-2 所示。为了使这一机制起作用，不可见伴星必须非常小，像白矮星、中子星或黑洞那样。从观察那颗可见星的轨道，人们可估算出不可见伴星的最小质量。对于天鹅座 X-1 的情形，不可见伴星的质量大约是太阳质量的 6 倍。根据钱德拉塞卡极限可知，这颗不可见星的质量太大了，所以它既不可能是白矮星，

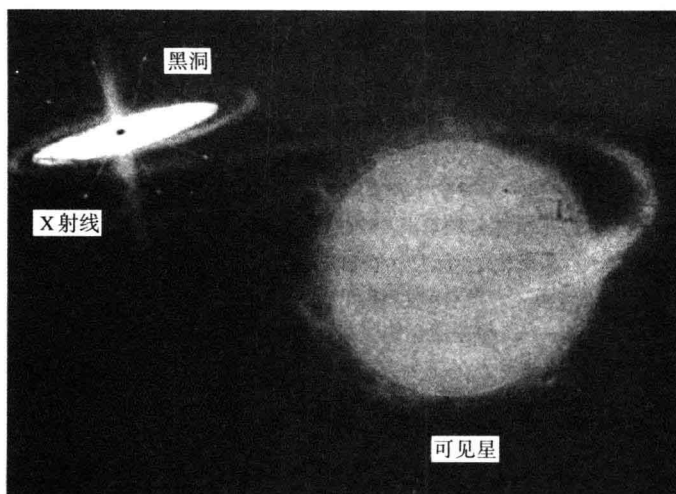


图 1-2 天鹅座 X-1

也不可能是中子星。另外，它虽然不发光，但能够发出 X 射线，由此可以推断它只能是一个黑洞。

1994 年 2 月 27 日，哈勃太空望远镜拍摄到了室女座的椭圆星系 M87（这个星系位于一个称为室女座星系团的中心，它要比一般的星系大很多，直径足足有 12 万光年，比整个银河系还要大，距离地球大约有 5000 万光年）中心存在旋涡状气体云盘的照片，如图 1-3 所示。从整个云盘中发现，M87 的大



图 1-3 室女座椭圆星系 M87

部分物质是温度高达 10000°C 左右而处于电离状态的氢气。计算结果显示,在云盘高速旋转的盘状区域中心,应该存在一个质量相当于30亿个太阳质量,而体积却并不超过太阳系的天体。由于其周围并不存在能产生如此巨大能量的其他天体,因此可以推断,如此高能量的粒子喷流是由M87产生的。对这一现象的最好解释就是此处存在黑洞。

此外,加利福尼亚大学的天文学家们也声称,他们已经探测到了以每秒200千米的速度绕银河系中心运动的气体流。离银河系的中心越近,气体流的速度就越快。并且他们已测到了星系中心的射电源,其能量非常巨大,但是体积却非常小,因此他们认为在银河系的中心很可能有一个黑洞存在。

1.4 黑洞的分类

20世纪70年代初,卡特(B. Carter)和罗宾逊(D. C. Robinson)等人指出,当星体塌缩形成黑洞后,会丧失除了质量 M 、电荷 Q 和角动量 J 以外的其他任何信息,因此,黑洞的全部性质只由这三个参量来确定。也就是说,时空如何弯曲只取决于黑洞的总质量、总角动量和总电荷,与物质的组成成分和结构都没有关系。对于外界观测者来说,只能探测到这三个量而探测不到其他任何信息。我们不可能知道黑洞的过去,也不会知道它是由什么样的星体、在什么时候、以何种方式形成的,所以将无法区分具有相同质量、角动量和电荷的黑洞。黑洞这种不具有可识别特征的现象被惠勒等人称为“无毛定理”。

黑洞,最初是由爱因斯坦场方程的一组解给出的。作为一类具有特殊结构和性质的神秘天体,我们能够获取的它的信息量少之又少,那么,如何区分不同的黑洞呢?

1.4.1 按照黑洞的基本参量分类

为讨论方便,本书采用自然单位制,即 $G=c=1$ 。根据黑洞的三个基本参量,可以把黑洞分为如下四类。

第一类: Schwarzschild 黑洞——只有质量,不旋转,不带电。

Schwarzschild 黑洞的度规线元为

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dr^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (1-5)$$

式中的 M 是黑洞质量,它是描述 Schwarzschild 黑洞的唯一参量。上述度规只对真空爱因斯坦场方程成立,它描述的是一个在真空中静止、球对称星体的

外部时空几何结构,如图 1-4 所示。

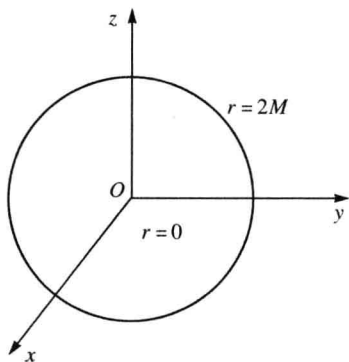


图 1-4 Schwarzschild 黑洞的时空结构图

如果令 $M=0$, 度规(1-5)式回到球坐标系下的闵可夫斯基度规情形, 显然, 无物质存在的时空应该是平坦的。当 $r \rightarrow \infty$ 时, 度规也趋于闵可夫斯基度规, 这表明, 在无穷远处, 引力场趋于零。所以, Schwarzschild 时空是一种渐近平直时空。

此外, 从度规(1-5)式不难看出施瓦希度规在奇点 $r=0$ 和奇面 $r=2M$ 两个地方有奇异。在奇点 $r=0$ 处, 不仅度规发散, 时空曲率也是发散的。而且, 无论选择什么坐标系, 这种发散都不能被消除。因此, $r=0$ 处的奇异性是由时空本身性质造成的, 被称为“内禀奇点”。而在施瓦希半径 $r=2M$ 的球面上, 虽然度规发散, 但时空曲率并不发散, 并且此面的奇异性可通过爱丁顿坐标变换进行消除。这种由于坐标系的选择不当而引起的奇异性被称为“坐标奇点”。

$r=2M$ 的球面实际上是黑洞的表面, 它与拉普拉斯给出的“暗星”形成条件((1-4)式)是一致的。以该球面为界, 内部区域与外部区域的时空结构是不同的。内部区域是单向膜区, 外部区域的任何物质一旦穿入这个界面, 它只能落入黑洞的中心, 停止或返回都是不可能的。奇异面 $r=2M$ 也被称为 Schwarzschild 黑洞的视界面。

第二类: Reissner - Nordström 黑洞——有质量, 带电, 但不旋转。

Reissner - Nordström 黑洞的度规线元为

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (1-6)$$

式中的 M 和 Q 分别代表黑洞的质量和电荷。从(1-6)式可以看出, Reissner -

Nordström 黑洞只含有这两个基本参量, 它所描述的弯曲时空的几何结构是球对称且不随时间变化的。

研究表明, 该黑洞时空的度规在 $r=0$ 处有一个时空的内禀奇点。此外, 度规在

$$r^2 - 2Mr + Q^2 = 0 \quad (1-7)$$

处发散, 即在

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2} \quad (1-8)$$

这两张球面上也是奇异的。但可以证明, 这两个球面上的奇异性是可以通过坐标变换消除的, 时空曲率在这里并不发散, 所以这里的奇异性不是内禀的。 r_- 和 r_+ 分别被称为黑洞的内、外两个视界, 这两个视界之间的部分是 Reissner - Nordström 黑洞的单向膜区, 如图 1-5 所示。落入该黑洞的物体, 一旦穿过外视界 r_+ 进入单向膜区(图 1-5 中的阴影部分), 就将不可抗拒地穿越这个区域, 但穿过内视界 r_- 后, 物体将能够自由地运动, 不至落到奇点 $r=0$ 上。

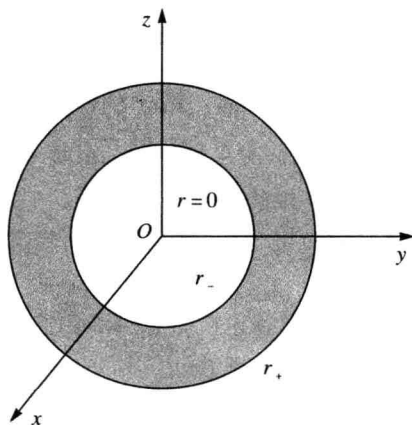


图 1-5 一般 Reissner - Nordström 黑洞的时空结构图

从(1-8)式可以看出, 当 $M^2 = Q^2$ 时, Reissner - Nordström 黑洞的内、外视界重合于一个面上, 即 $r_+ = r_- = M$ 。这时, 单向膜区收缩成一个无限薄的膜, 这种黑洞被称为极端 Reissner - Nordström 黑洞。若 $M^2 < Q^2$, 则内、外视界和单向膜区都将消失, 而奇点 $r=0$ 裸露出来。裸露的奇点会往外发出不确定的信息, 导致时空和物质演化完全不确定。为了避免这一现象出现, 彭若斯(R. Penrose)提出了“宇宙监督假设”, 即存在一位“宇宙监督”, 它禁止裸奇异的出现。

第三类: Kerr 黑洞——有质量, 旋转, 但不带电。

1961 年, Kerr 给出了爱因斯坦场方程的一个稳态轴对称解, 它是一个与 Schwarzschild 时空拓扑结构不同的解。在自然单位制下, 它的度规线元为

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2} \right) dt^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \left[(r^2 + a^2) \sin^2 \theta + \frac{2Mra^2 \sin^4 \theta}{\rho^2} \right] d\varphi^2 - \frac{4Mr a \sin^2 \theta}{\rho^2} dt d\varphi \quad (1-9)$$

其中

$$\rho^2 \equiv r^2 + a^2 \cos^2 \theta \quad (1-10)$$

$$\Delta \equiv r^2 - 2Mr + a^2 \quad (1-11)$$

从度规表达式可以看出, Kerr 黑洞主要由质量 M 和角动量 J (在这里, J 由单位质量的角动量 a 来显示, $a = J/M$) 来描述。由于 $\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial t} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial \varphi} = 0$ 且时轴交叉项不为零, 所以, 该黑洞是稳态轴对称的。

从(1-9)式至(1-11)式可以看出, Kerr 度规在 $\rho^2 = 0$ 和 $\Delta = 0$ 两个位置具有奇异性, 即在 $r=0$ 且 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 处, 除了度规是发散的, 时空曲率也是发散的, 该处为 Kerr 黑洞的内禀奇异区。后来, Kerr 的研究证明, 这个内禀奇异区不是奇点, 而是一个奇环; 在 $r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}$ 两个奇异面上, 时空曲率不发散, 这两个奇异面为 Kerr 度规的内、外视界面, 它们是坐标奇异的。如图 1-6 所示, 阴影部分 $r_- < r < r_+$ 是 Kerr 黑洞的单向膜区。

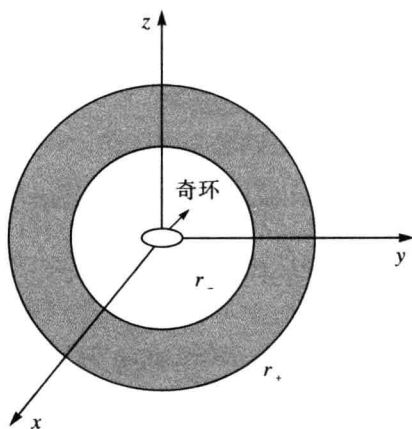


图 1-6 一般 Kerr 黑洞的时空图

第四类: Kerr - Newman 黑洞——有质量、有电荷的旋转黑洞。

Kerr - Newman 黑洞描述的是一个转动的带电星体的外部时空的引力场,