3导 自考3导丛书
导教·导学·导考

2005年

核心学案

自学考试新教材·公共课(一)

高等数学(一)微积分

教材依据/武汉大学出版社《高等数学(一)微积分》

章学诚/主编
组编/全国高等教育自学考试命题研究组

同步辅导同步过关
指定教材核心浓缩
预测试卷历年真题

RED PRECIOUS BOOK 红宝书

航空工业出版社

高等教育自学考试3导丛书

导教·导学·导考

高等数学（一）微积分

核心学案

自学考试新教材

应对自考课程大规模修订新教材内容。

教材依据／武汉大学出版社《高等数学（一）微积分》高汝熹／主

组　编／全国高等教育自学考试命题研究组

航空工业出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.1,微积分/自学考试命题研究组编,《高等数学》编委会编.—北京:航空工业出版社,2005.1

(自学考试新教材核心学案.公共课.第1辑)

ISBN 7-80183-527-1

Ⅰ.高... Ⅱ.①自...②高... Ⅲ.①高等数学—高等教育—自学考试—自学参考资料②微积分—高等教育—自学考试—自学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2004)第128680号

高等数学(一)微积分

Gaodeng Shuxue (Yi) Weijifen

航空工业出版社出版发行

(北京市安定门外小关东里14号 100029)

发行部电话:010-84926529 010-64978486

三河市燕山印刷有限公司印刷 全国各地新华书店经售

2005年1月第1版 2005年1月第1次印刷

开本:850×1168 1/32 印张:65

字数:2400千字 (全12册)定价:168.00元

代言人

简介

张立勇　一个普通的农民孩子，清华大学打工 8 年，一直坚持刻苦自学，不仅 80 分以上通过四级、六级考试，托福考试 630 分，而且获得了北京大学本科文凭。2004 年 10 月共青团中央向张立勇颁发了“中国青年学习成才奖”，他被誉为共青团中央树立的全国十大杰出学习青年之一。

张立勇的事迹被中央电视台“东方之子”“面对面”“新闻会客厅”等多个栏目采访报道，被北京电视台、中国教育电视台等电视媒体，新浪网、雅虎网等网络媒体，《人民日报》《中国青年报》《大学生》等报纸杂志，共 100 多家媒体采访报道，在社会上引起很大反响。被众多青年学子视为学习的榜样。

“因为我选择了这样一条自己的人生道路，所以我没有机会像大多数的学子那样，经历从学校到学校，顺利地接受高等教育的过程。我只能通过自学来圆我的大学梦。”

“我常常想，上帝会厚爱每一个人的，它会用不同的方式对你所付出的艰辛和努力给予补偿。但是，上帝只钟爱那些自助的人。如果你不努力，你不拼搏，所有的机会都会和你失之交臂。如果在这十年之中，我放弃了对人生理想和人生价值的追求，那么，当这一切机遇到来的时候，我又怎么可能把握住呢？”

“大家觉得我是一个榜样，但我个人并不这么想。社会把我放到这样的位置，充当这样的角色，能够影响一些人，这是最让我自豪的。”

-------- 张立勇

导教·导学·导考

编委会

编委主任：程　琨　　魏　莹

编委名单：（按姓氏笔画排列）

万　鹏　刘　斌　刘海飞　刘　涛

闫树茂　宋玉珍　张　沁　张远盛

肖　果　郜桂英　崔海燕　程　琨

董金波　董　蕾　蒋　怡　魏　莹

前言

“其实人的智力相差并不悬殊，可毅力的差距却使每个人拥有各自不同的前途。尤其是对于参加自考的人来说，毅力是非常重要的，当然还需要有得当的学习方法。”

“有很多人抱怨自考难以通过，然而正是这种严格的管理制度保证了自考毕业生的质量，使自考生获得了社会的认可和一致的好评。”

——一名从自考获得本科学历后又考上硕士生直到博士生的成功者的自述

参加自学考试，除了需要具备以上成功者所提到的毅力和方法外，还应该了解自考的每门课程都采用我们通常所说的“过关”考试——只要通过课程的一次性考试，就可拿到课程的学分，通过某专业要求课程的全部考试，也就会顺利获得这个专业的自考毕业证。然而，一分之差也会导致参考课程过关失败，有些考生难免多次重考才能修完规定课程。因此，在本书的编写过程中，编委们反复研讨自学考试的特点，努力寻求帮助自考生的有效途径。本书是多位学者、专家，历时数年的产物，具有以下优点。

一 掌握核心内容，了解命题动态，注重知识系统化

了解命题精神，是自学考试的核心，是达到专业标准的关键。自学考试的课程命题以课程自学考试大纲为依据，以最新指定教材为范围。本书紧紧贴住每一门课程的考试大纲和指定教材，用【考纲要求提示】、【知识结构图示】、【核心内容速记】、【同步精华题解】、【典型例题解析】等多个栏目解剖教材内容，是一套脉络清晰的速成讲义，可以使考生在厚厚的教材中抓住重点，对教材的系统学习有极强的指导作用。同时，对于临考考生，它又可以成为离开教材仍能独立使用的贴身笔记。《核心学案》摒弃了一些辅导书的题海战术，引导考生重视教材的学习。那么怎样去自学才能弄懂教材并将厚书读“薄”呢？抓住重点才是关键。《核心学案》用清晰的思路，帮助考生将教材知识系统化，使考生在答卷时知识系统、逻辑清晰、胸有成竹。

二 依据权威资料，重视最新信息，紧跟时代脉搏

参加高等教育自学考试的考生，常常会感到市面上的辅导资料甚至教材都有

滞后性。全国高教自考办也认可这一事实,并采取了一些有效措施,比如在发布考试大纲和指定教材的基础上又组编了《全国高等教育自学考试活页丛书》等补充学习材料,并明文规定增补内容纳入统一命题范围,要占卷面5~10分。同时高教自考办还加快了教材的修订频率。面对这种情况,原有的一些辅导资料的严重滞后和内容缺陷也是必然的。本套《核心学案》则高度重视这一现象,在依据考试大纲和指定教材时,选用高教自考办的最新修订本(2004年起自考课程已在做大规模修订),并将活页丛书等内容融会贯通其中,有的科目还特意增加了【最新内容补充】以引起考生重视。另外,本套书还吸收了许多自考强化班的授课精华,目的是帮助考生了解最新考试动态。我们还将开通网上自考辅导随时更新有关内容和提供特色售后服务,欢迎点击 www. study-book. com. cn。

三 做到讲练结合,力求精讲精练,提高辅导命中率

本套书配有【同步精华题解】和综合演练题,是在对考纲、教材归纳总结后选编的一些经典同步练习题。这些练习题的题型与考试题型完全一致,使考生能够迅速掌握答题方法与同步要点。另外,本书的编者还依据各科内容,遴选考点,在对历年实考真题做详细分析的基础上精编了《命题预测试卷》。这些试卷不仅题型题量完全与真考试卷保持一致,而且力求覆盖考试大纲的各科重点。考生如果在学习《核心学案》的基础上再认真研习《命题预测试卷》,既可熟悉题型、了解试卷难易度,又可将其作为自测、练习之用,找出差距,查漏补缺。因此,在《核心学案》的首印首发优惠活动中,为了帮助考生用好的学习方法提高应试过关率,我们特意将《命题预测试卷》作为《核心学案》的赠品送给每个考生。这样,本书即成为真正具有命中率的辅导用书。

总之,面对数千万的自考考生,我们是抱着高度的责任感来完成这项使命的。我们的目的是:减轻考生的学习负担;我们口号是:用最短的时间使考生自考过关!因为工作量的巨大和考期的压力,也许我们遗留了某些不足,欢迎读者批评指正。来函可致:reader@ study-book. com. cn,我们将高度重视,以求完善。

编　者

目录

第六章　多元函数微积分

第一章　函数及其图形

考纲要求提示

1. 理解一元函数的定义及函数与图形之间的关系；
2. 了解函数的几种常用表示法；
3. 理解函数的几种基本特性；
4. 理解函数的反函数及它们的图形之间的关系；
5. 掌握函数的复合和分解；
6. 熟练掌握基本初等函数及其图形的性态；
7. 知道什么是初等函数；
8. 知道几种常见的经济函数；
9. 能从比较简单的实际问题建立其中蕴含的函数关系.

知识结构图示

- 函数及其图形
  - 预备知识
    - 集合及其运算
    - 绝对值及其基本性质
    - 区间和邻域
  - 函数
    - 函数的概念
    - 函数表示法
    - 函数的运算
  - 函数的几种基本特性
    - 有界性
    - 单调性
    - 奇偶性
    - 周期性
  - 反函数
  - 复合函数
  - 初等函数
    - 基本初等函数
    - 初等函数
  - 简单函数关系的建立
    - 简单函数关系的建立
    - 经济学中几种常见的函数

核心内容速记

1. 集合的概念

集合是现代数学中一个重要的基本概念，所谓集合，就是指具有某个共同属性的一些对象的全体，构成集合的每一个对象称为该集合的“元素”.

2. 集合的表示法

(1) 列举法：是指按任意顺序列出集合中所有的元素，并用花括号$\{\ \}$括起来.

由1,3,5,7组成的集合，可表示为$A=\{1,3,5,7\}$或$A=\{3,1,5,7\}$等. 用列举法表示集合时，必须列出集合中的所有元素，不能遗漏和重复.

(2) 描述法：是指把集合中元素所具有的某个共同属性描述出来，用$A=\{x \mid x$具有的共同属性$\}$表示.

3. 集合的类型

(1) 有限集：集合中所包含的元素的个数只有有限个，称为有限集.

(2) 无限集：集合中所包含的元素的个数是无限个，称为无限集.

注意空集ϕ不能与含有单个元素“0”的集合$\{0\}$相混淆.

4. 子集的概念

设有两个集合A与B，如果集合A的任何一个元素都是集合B的元素，那么集合A叫做B的子集，记为$A\subset B$或$B\supset A$，读作A包含于B或B包含A.

任何一个集合都是它自身的子集，即$A\subset A$. 空集是任何一个集合的子集，即$\phi\subset A$.

5. 集合相等

两个集合A和B称为相等，是指集合A和集合B含有相同的元素，记为$A=B$.

6. 全体实数与数轴上的所有点有一一对应关系

每一实数对应数轴上的一个点，数轴上每一点也对应一个实数.

7. 集合的运算

(1) **并**　由A,B中的所有元素组成的集合称为A和B的**并集**(简称**并**). 记为$A\cup B$.

$$A\cup B=\{x \mid x\in A\text{或}x\in B\}.$$

(2) **交**　由既属于A又属于B的元素组成的集合称为A和B的**交集**(简称**交**). 记为$A\cap B$.

$$A\cap B=\{x \mid x\in A\text{且}x\in B\}.$$

(3) **差**　由 A 中不属于 B 的元素组成的集合称为 A 和 B 的**差集**（简称差）. 记为 $A - B$.

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \text{ 瘙綷 } B\}.$$

8. 绝对值及其基本性质

(1) 绝对值的定义

设 x 为一实数，则其绝对值定义为

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{若 } x \geqslant 0; \\ -x, & \text{若 } x < 0. \end{cases}$$

$|x|$ 的几何意义是表示数轴上从原点 O 到点 x 的距离. 而 $|x-y|$ 则表示数轴上两点 x 和 y 之间的距离.

设 $a > 0$，则 $|x| < a$ 表示数轴上点 x 与原点 O 之间的距离小于 a，即 $-a < x < a$. 或者说，

$$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a.$$

同样

$$|x| > a \Leftrightarrow x < -a \text{ 或 } x > a.$$

(2) 绝对值的基本性质

设 x, y 是任意两个实数，则

① $|x| \geqslant 0$;

② $|-x| = |x|$;

③ $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$;

④ $|x \pm y| \leqslant |x| + |y|$;

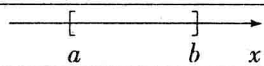
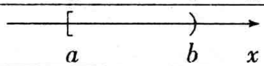
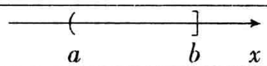
⑤ $||x| - |y|| \leqslant |x - y|$;

⑥ $|xy| = |x||y|$.

9. 有限区间及各种表示法

表 1-1 给出了各种有限区间的集合表示以及数轴上相应的线段.

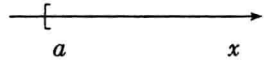
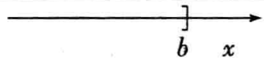
表 1-1

开区间	$(a,b) = \{x \mid a < x < b\}$	
闭区间	$[a,b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$	
左闭右开区间	$[a,b) = \{x \mid a \leqslant x < b\}$	
左开右闭区间	$(a,b] = \{x \mid a < x \leqslant b\}$	

10. 无穷区间及各种表示法

表 1-2 给出各种无穷区间的集合表示以及数轴上相应的部分.

表 1-2

$(a,+\infty)=\{x \mid x>a\}$	
$[a,+\infty)=\{x \mid x \geqslant a\}$	
$(-\infty,b)=\{x \mid x<b\}$	
$(-\infty,b]=\{x \mid x \leqslant b\}$	
$(-\infty,+\infty)=\{x \mid -\infty<x<+\infty\}$	表示全体实数,图示为整个实数轴.

注意“$+\infty$”(读正无穷大),“$-\infty$”(读负无穷大)是引用的符号,不能作为数看待.

11. 邻域的概念

所谓点 x_0 的 δ 邻域,是指以 x_0 为中心的开区间 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$,亦即设 x_0 和 δ 为两个实数,$\delta>0$,则满足不等式

$$|x-x_0|<\delta$$

的全体实数就称为点 x_0 的 δ 邻域. 点 x_0 为该邻域的中心,δ 为该邻域的半径,在数轴上的表示见图 1-1.

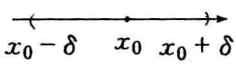


图 1-1

12. 函数的定义

若 X 和 Y 都是实数集合(简称数集),则两实数集合之间的映射 $f:X\to Y$ 称为函数.

函数定义是映射定义的特例. 习惯上,我们称 X 为函数 f 的定义域,记为 D_f,并记函数 f 为　$y=f(x),X\in D_f$.

13. 函数概念的五个因素

① 自变量 x,看作主动变化的实变量;

② 定义域 D_f,表示自变量 x 的变化范围;

③ 因变量 y 在函数关系中是一个被动的、随自变量 x 的变化作相应变化的实变量;

④ 因变量 y 关于自变量 x 的依存关系 f,是一种对应规则,使对每一个值 $x \in D_f$, 相应地确定惟一的对应值 $y = f(x)$;

⑤ 值域 R_f,表示因变量的变化范围.

14. 分段函数的定义

在自变量的定义域内,必须用几个不同的数学式子表示的函数,称为分段函数.

15. 函数的运算

设有函数 f,g 如下:

$$y = f(x),x \in D_1; \quad y = g(x),x \in D_2,$$

且 $D = D_1 \cap D_2 \neq \varnothing$,则定义函数 f,g 的和 $f+g$、差 $f-g$、积 fg、商 $\dfrac{f}{g}$ 为如下的函数:

$$y = f(x) \pm g(x), \quad x \in D;$$
$$y = f(x)g(x), \quad x \in D;$$
$$y = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad x \in \{x \mid x \in D, g(x) \neq 0\}.$$

16. 函数的几种基本特性

(1) 单调性

设有函数 $y = f(x),x \in D_f$,若对任意两点 $x_1,x_2 \in D_f$,当 $x_1 < x_2$ 时,恒有 $f(x_1) < f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在 D_f 内严格单调增加. 反之,若对任意两点 x_1, $x_2 \in D_f$,当 $x_1 < x_2$ 时恒有 $f(x_1) > f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在 D_f 内严格单调减少.

(2) 有界性

若存在两个数 A 和 B,对一切 $x \in D_f$ 恒有 $A \leqslant f(x) \leqslant B$,则称函数 $y = f(x)$ 在 D_f 内是有界函数,否则就称为无界函数.

(3) 奇偶性

设有函数 $y = f(x)$,其定义域 D_f 关于原点 O 对称,那末

① 若对任何 $x \in D_f$,恒有 $f(-x) = f(x)$,则称函数为偶函数.

② 若对任何 $x \in D_f$,恒有 $f(-x) = -f(x)$,则称函数为奇函数.

(4) 周期性

设有函数 $y = f(x),x \in (-\infty, +\infty)$,若存在 $\omega \neq 0$,对一切 $x \in (-\infty,$

$+\infty$) 恒有$f(x+\omega)=f(x)$,则称$f(x)$为周期函数,ω为$f(x)$的一个周期.

17. 复合函数的概念

设有两个实数集上的映射

$$f: y=f(u),\quad u\in D_f,$$
$$g: u=g(x),\quad x\in D_g.$$

如果映射g的值域R_g包含在映射f的定义域D_f中,亦即$R_g\subset D_f$,于是可将$u=g(x)$代入$y=f(u)$,得到新的函数

$$y=(f\circ g)(x)=f(g(x)),\quad x\in D_g,$$

则我们称此函数为f和g复合而成的复合函数,u称为中间变量.

18. 反函数及其存在定理

设$y=f(x)$为给定的一个函数,如果对其值域R_f中的任一值y,都可以通过关系式$y=f(x)$在其定义域D_f中确定惟一的一个x与它对应,则得到一个定义在R_f上的以y为自变量,x为因变量的新函数,我们称此函数为$y=f(x)$的**反函数**,记为

$$f^{-1}: Y\to X\quad(\text{即函数 } x=f^{-1}(y)).$$

反函数存在定理:若函数$y=f(x)$,$x\in D_f$是严格单调增加(或减少)的,则存在反函数$x=f^{-1}(y)$,$y\in R_f$,且此反函数也是严格单调增加(或减少)的.

利用反函数存在定理,我们只需判断函数在所讨论的范围内是否严格单调,就可确定其反函数是否存在.

19. 基本初等函数

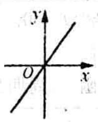
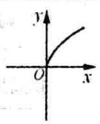
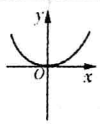
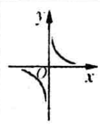
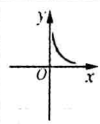
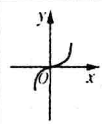
基本初等函数包括幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数.

(1) 幂函数　幂函数的表达式为

$$y=x^a\ (a\text{ 为实常数})$$

随着实数a的不同,幂函数定义域和性质都有很大的差别,然而不论a取何实数,x^a在$(0,+\infty)$内总有定义,且其图形必通过点$(1,1)$,表1-3给出了$a=1,2,3,\frac{1}{2},-1,-\frac{1}{2}$时常见的幂函数的定义域、值域、函数特性和图像. 对$y=x^a$,当$a\neq 0$时,不论a取何实数,$y=x^a$都不是周期函数,在定义域内是无界的.

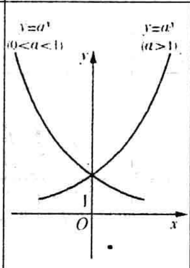
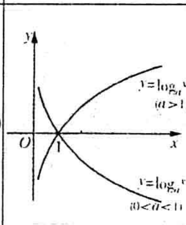
表 1-3

函数	$y = x$	$y = x^{1/2}$	$y = x^2$	$y = {}^{-1}$	$y = x^{-1/2}$	$y = x^3$
定义域	$(-\infty, +\infty)$	$[0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$	$(0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
值域	$(-\infty, +\infty)$	$[0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$	$(0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
奇偶性	奇	非奇非偶	偶	奇	非奇非偶	奇
单调性	单调增加	单调增加	$(-\infty, 0)$ 单调减少 $(0, +\infty)$ 单调增加	$(-\infty, 0)$ 单调减少 $(0, +\infty)$ 单调减少	单调减少	单调增加
图像						

(2) 指数函数　函数的定义域、值域、图像及其主要特性见表 1-4.

(3) 对数函数　函数的定义域、值域、图像及其主要特性见表 1-4.

表 1-4

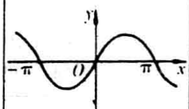
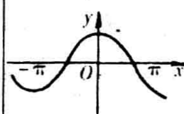
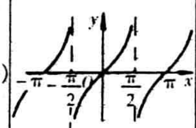
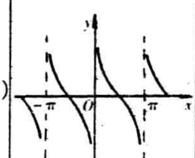
函数	定义域	值域	图　　像	主要性质
指数函数 $y = a^x$ $(a \neq 1, a > 0)$	$(-\infty, +\infty)$	$(0, +\infty)$		① 图像通过点(0,1) ②$a > 1$ 时,y 单调增加;$0 < a < 1$ 时,y 单调减少 ③ 非奇函数,非偶函数,非周期函数,无界函数
对数函数 $y = \log_a x$ $(a \neq 1, a > 0)$	$(0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$		① 图像通过点(1,0) ②$a > 1$ 时,y 单调增加;$0 < a < 1$ 时,y 单调减少 ③ 非奇函数,非偶函数,非周期函数,无界函数

指数函数与对数函数互为反函数.

(4) 三角函数

正弦函数 $y=\sin x$、余弦函数 $y=\cos x$、正切函数 $y=\mathrm{tg}x$、余切函数 $y=\mathrm{ctg}x$ 的定义域、值域、图像和它们的特性见表 1-5.

表 1-5

函数	定义域	值域	图　　像	主要性质
$y=\sin x$	$(-\infty,+\infty)$	$[-1,1]$		① $-1\leqslant\sin x\leqslant 1$,有界 ② 在$\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$内单调增加,$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 在$\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right]$内单调减少,$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$ ③ 奇函数 ④ 周期函数,周期为 2π
$y=\cos x$	$(-\infty,+\infty)$	$[-1,1]$		① $-1\leqslant\cos x\leqslant 1$,有界 ② 在$[2k\pi-\pi,2k\pi]$内单调增加,$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$ 在$[2k\pi,2k\pi+\pi]$内单调减少,$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$ ③ 偶函数 ④ 周期函数,周期为 2π
$y=\mathrm{tg}x$	$\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$	$(-\infty,+\infty)$		① 无界函数 ② 在$\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$内单调增加,$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$ ③ 奇函数 ④ 周期函数,周期为 π
$y=\mathrm{ctg}x$	$(k\pi,k\pi+\pi)$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$	$(-\infty,+\infty)$		① 无界函数 ② 在$(k\pi,k\pi+\pi)$内单调减少,$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$ ③ 奇函数 ④ 周期函数,周期为 π