机械可靠性设计

（下）

张子正

武汉工学院原零教研室

一九八三年十月

机械可靠性设计

（下）

武汉工学院

一九八三年

第四章　概率设计

传统的强度计算是按下列的强度方程进行的：

$$S \leq [S] = \frac{S_{lim}}{n}$$

式中：S——应力；

[S]——许用应力；

S_{lim}——极限应力；

n——安全系数。

例如直径为d的园形拉杆受拉力Q的作用（图4—1），其强度条件为

图4—1　拉杆受力图

$$S = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\frac{1}{4}\pi d^2} \leq [S] = \frac{S_{lim}}{n}$$

这种传统计算方程存在三个问题：

1、把所有的参数，如S、Q、A、[S]、S_{lim}、n

n 等都作为定值。显然这是与实际情况不符的，因为不论是载荷。几何尺寸或材料的机械性能等都具有离散性，也就是说，它们一般都是随机变量而不是定值。

2、在选取安全仔数时往往带有较大的主观性和经验色采是因人而异的；

3、在强度计算时虽然安全系数总是取得大于1的。但这并不意味着就绝对可靠了。表4—1清楚地说明了这一点了。

表4—1　　　不同直径拉杆的 n 与 R

	拉力Q (N)	拉杆直径 d(mm)	材料强度的均值 (N/mm²)	应力均值	强度标准差 (N/mm²)	应力标准差 (N/mm²)	安全系数n	可 R (9
1	8000	19·5	250	267·87	50	20	0·93	3
2	8000	20·18	250	250	50	20	1	5
3	8000	22	250	210·45	50	20	1·18	7
4	8000	26	250	150·67	50	20	1·57	9

表4—2 相同直径、相同n不同标准差、时的R

拉力Q (N)	拉杆直径 d(mm)	材料7度均值 (N/mm²)	应力均值 (N/mm²)	强度标准差 (N/mm²)	应力标准差 (N/mm²)	安全系数n	可靠度 R(%)
8000	22	250	210·45	30	20	1·18	86·2[illegible]
8000	22	250	210·45	25	15	1·18	90·99
8000	22	250	210·45	20	10	1·18	96·08
8000	22	250	210·45	15	6	1·18	99·29

表4—1与表4—2中安全系数是按强度均值与应力均值之比来计算的如下式：

$$n = \frac{\mu_\delta}{\mu_s} \qquad (4\text{—}1)$$

式中 μ_δ—强度均值，下标"δ"表示强度；

μs—应力均值，下标"s"表示应力。

由表4—2可以清楚地看到，纵然安全系数都为1·18，但由于强度和应力的标准差的变化，可靠度是不同的，标准差

越大，可靠度越低，反之亦然。比较下列两种提法：

（1）该拉杆的安全系数 $n=1.18$；

（2）该拉杆的可靠度 $R=86.21\%$。

显然，第二种提法较为确切和完善，能反映问题的实质，便于探察原因，制订提高产品质量的措施。

所以，概率设计较之传统设计具有下述的特点：

（1）不论已知的或未知的参数，一般都看作是随机应变；

（2）进行概率设计所需的数据都来自试验或现场，经过统计分析，作为设计依据，所以它是比较合乎实际的；

（3）概率设计中运行了可靠度概念，设计者心里有数，具有说服力，这就掌握了能动性。

为此，对概率设计的过程可作如下的描述：

在对所有的设计变量进行统计分析及建立统计模型的基础上，用概率统计的理论和方法，以解决工程实际问题。

§4—1 应力—强度的干涉理论

"干涉"理论

"干涉"理论是强度概率设计的基本理论。

在前述的传统强度方程计算时，是比较应力与许用应力，也就是比较工作值和许用值，若工作值小于许用值就认为是安全的了。当然，除了强度计算以外，如刚度、磨损量、温升……的计算亦是这样计算的，例如在刚度设计中，则是扭角〔φ〕挠度 $f\leqslant[f]$ 等等。

在概率设计中也可以认为是对工作值和极限值（因为没有安全系数这一因素，所以不提许用值）。所不同的是该两值都是随机变量，因此有一个“可能性”的问题，也就是产品正常工作（即极限值大于工作值）的概率是多大的问题。

在概率设计中，把产品各种形式的工作值，如应力、压力载荷、变形量（即刚度）、磨损量、温度量等统称为“应力”用“S”表示。把能够承受这些“应力”的能力——功能参数的极限值，统称为“强度”，用“δ”表示，那么δ＞S，说明能正常工作，其可靠度就是该事件的概率，即

$$R=P(\delta>S)$$

δ＜S，说明丧失工作能力，其失效概率是：

$$F=1-R=P(\delta<S)$$

由于强度δ和应力S都是随机变量，假如它们分别服从某种分布，强度的概率密度函数用g（δ）表示，应力的概率密度函数用f（S）表示。因为δ与S具有同一量纲，可以把它们画在同一座标系上。根据δ值与S值的不同，可以有三种情况：

（1）两概率密度曲线不重合，可能出现的最大应力都要小于可能出现的最小强度（图4—2，a）。所以，应力大于强度是不可能事件，或者说，强度大于应力是必然事件，即

$$F = P(S > \delta) = 0$$

或

$$R = P(\delta > S) = 1$$

具有这样的强度——应力关系的零件当然是安全的，不会发生强度破坏。

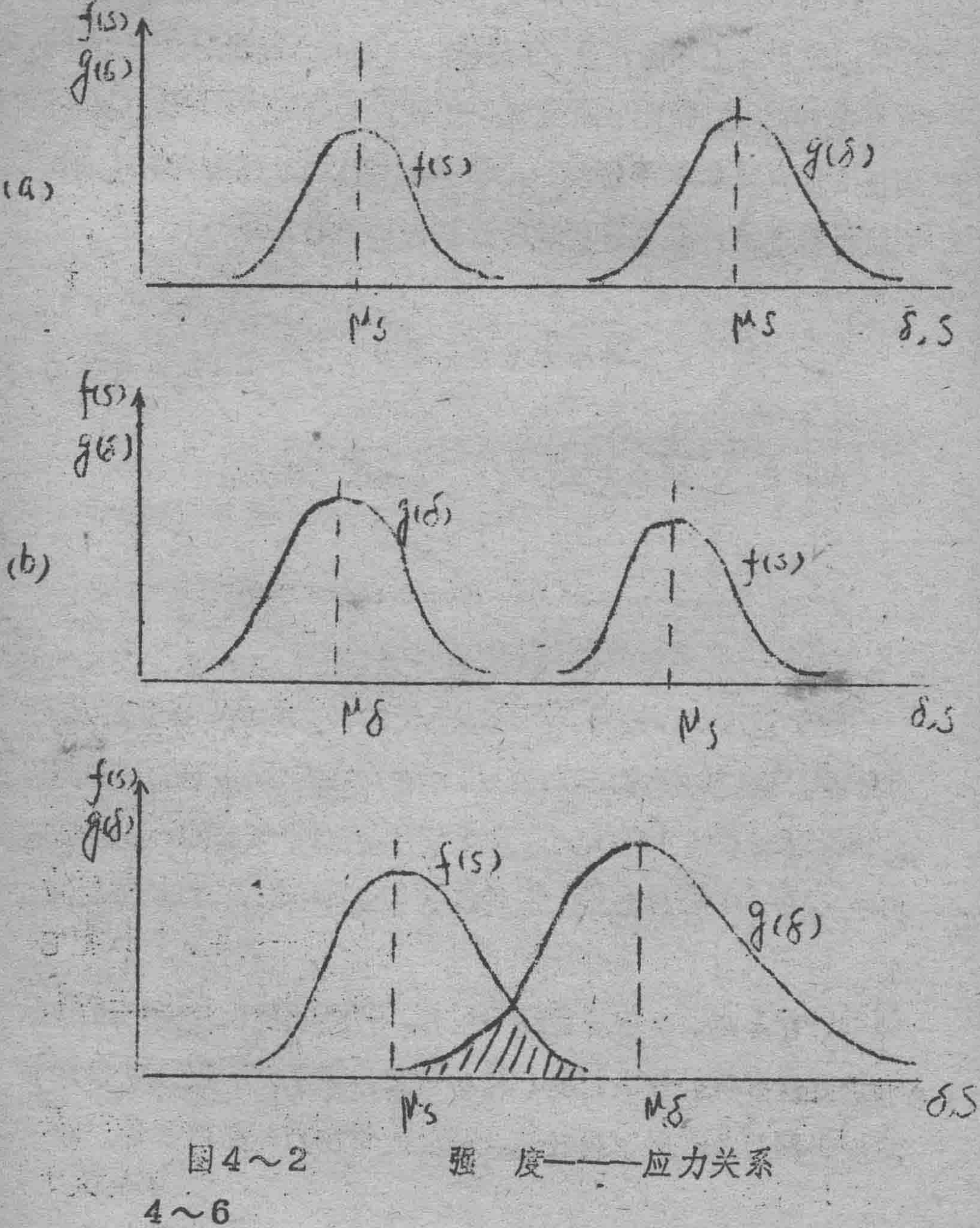

图4～2　　强　度——应力关系

（2）图4—2，b的情况与图4—2，a的情况恰好相反，在这种情况下：

$$F=P(S>\delta)=1$$

或 $$R=P(\delta>S)=0$$

这种情况下的零件是不安全的，必然要失效。

（3）两概率密度曲线有部分重迭——"干涉"（见图4—2，c）。在这种情况下，虽然强度均值μ_δ远大于应力均值μ_s，按传统的安全系数的概念来说，安全系数是大于1的。但实际上都不能保证应力在任何情况下都小于强度，即应力大于强度的概率大于零。

$$F=P(S>\delta)>0$$

显然，失效概率的大小是与干涉区（图4—2，c的阴影线部分）面积有关，纵使μ_δ与μ_s不变，由于标准差σ_δ与σ_s的改变引起干涉区面积的改变，从而使失效概率发生变化。干涉区越小，失效概率越小，可靠度越高；反之亦然。若干涉区面积为零，就意味着失效概率为零，为图4—2，a的情况了

概率设计就是基于上述强度——应力的"干涉"理论为基础进行计算的。

在具体设计中，根据强度概率密度分布与应力概率密度分布的不同，可采用下列三种方法：

（1）当强度和应力的分布都为正态分布时，可以采用强度差概率密度函数积分法进行计算。

（2）当强度和应力的分布不都是正态分布，或者一个是正态分布，另一个是其它分布；或者二个都不是正态分布时，可以采用概率密度函数联合积分法进行计算。

（3）当概率分布不确定时，可以采用图解法来求失效概率。

§4—2 强度和应力都是正态分布的概率设计

一、强度差概率密度函数积分法的基本概念。

设强度随机变量 $\delta \sim N(\mu_\delta, \sigma_\delta)$，其概率密度函数是 $g(\delta)$，应力随机变量 $S \sim N(\mu_S, \sigma_S)$，其概率密度函数是 $f(s)$。那么，强度与应力之差（强度差）$Y=\delta-s$ 当然也是随机变量。由《概率论》可知，当 δ 和 s 均为正态分布的随机变量时，其差 Y 亦为正态分布的随机变量，即 $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y)$，其概率密度函数为 $f(y)$。所以零件的失效概率可表示为：

$$F=P(\delta<S)=P(y<0)=\int_{-\infty}^{0} f(y)dy \qquad (4\sim2)$$

它等于图4～3中阴影部分的面积。

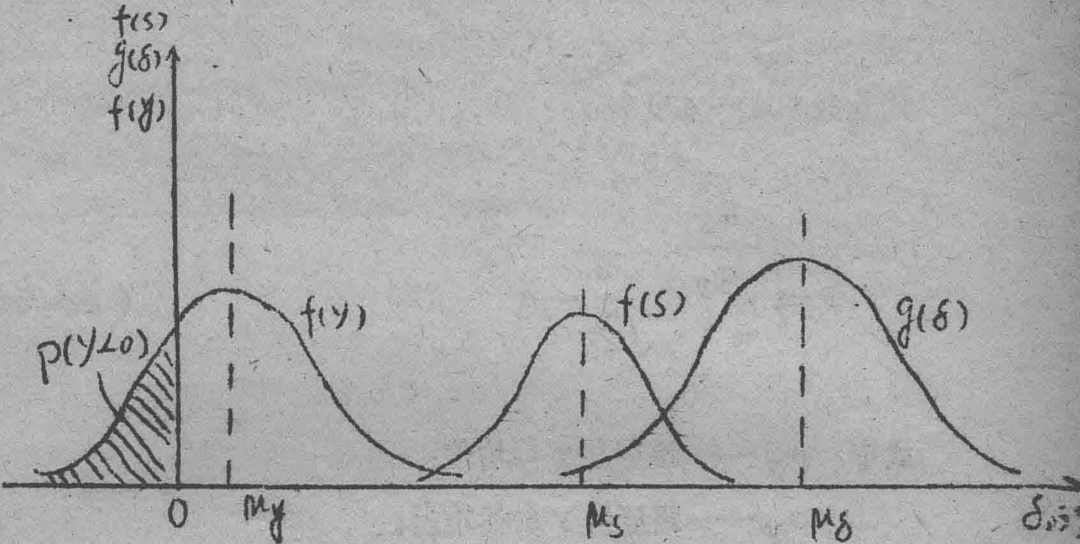

图4-3. y=δ-S 的概率分布

因为y呈N(μ_y, σ_y)，故概率密度函数

$$f(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_y}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2} \quad (4\sim3)$$

失效概率由式(4～2)：

$$F=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_y}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2}dy \quad (4\sim4)$$

将其标准化，以便于计算：

令 $Z=\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}$ 得 $dy=\sigma_y\,dZ$

当 $y=0$ 时， $Z=-\frac{\mu_y}{\sigma_y}$

代入式（4—4）得

$$F=\int_{-\infty}^{\frac{\mu_y}{\sigma_y}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{Z^2}{2}}dZ \qquad (4\sim5)$$

式中 μ_y——强度差 y 的均值；

σ_y——强度差 y 的标准差。

由式（4～5）可知，只要求得了新的随机变量 y 的均值与标准差，并据此查阅正态函数表就可得到零件的失效概率，则零件的可靠度

$$R=1-F$$

可见，计算可靠度是简单的，关键在于新随机变量 y 的均值与标准差如何确定，下面介绍一种行之有效的近似方法。

二、随机函数的数学期望与方差的近似计算

这里介绍的是一种代数运算法则。

随机变量函数可以有一维的、二维的以及多维的等等，现分述如下：

（一）一维函数的数学期望与方差的计算。

属于一维函数的有面积的计算，弯曲或扭转截面模量的计算等等。

例如，直径d呈$N\sim(\mu_d,\sigma_d)$，则圆面积$A=\frac{\pi}{4}d^2$当然也是随机变量，问题就是如何计算μ_d和σ_d。

具体方法是把函数用"台劳"级数展开，略去高次项，取前面第一、二项逐项计算数学期望E(x)和方差D(x)。对于正态分布，则

$$\mu_x=E(x);\quad \sigma_x^2=D(x)$$

对于一维函数$y=\varnothing(x)$，将其在$x=\mu_x$处展开，保留前二项，得

$$y=\varnothing(x)=\varnothing(\mu_x)+\varnothing'(\mu_x)(x-\mu_x) \tag{4-6}$$

式中：μ_x——随机变量x的均值，对于一组样本来说，μ_x是已知的，可以看作是常数。

为了方便起见，省略下标"x"，将μ_x写成μ，则式(4-6)为

$$y=\varnothing(x)=\varnothing(\mu)+\varnothing'(\mu)(x-\mu) \tag{4-7}$$

由《概率论》知，对于常数c来说，

期望值：$E(c)=c$；$E(cx)=cE(x)$

方差值：$D(c)=0$；$D(cx)=c^2D(x)$

这里不作推证，将予直接应用了。

1、y的数学期望$E(y)$：

取式（4—7）中的第一项，则

$$E(y)=\mu_y=E[\varnothing(\mu)]=\varnothing(\mu) \qquad (4-8)$$

2、y的方差$D(y)$：

取式（4—7）中的前二项，则

$$\begin{aligned} D(y)=\sigma_y^2 &= D[\varnothing(\mu)]+D[\varnothing'(\mu)(x-\mu)] \\ &= D[x\cdot\varnothing'(\mu)]-D[\mu\cdot\varnothing'(\mu)] \\ &= D[\varnothing'(\mu)\cdot x] \\ &= [\varnothing'(\mu)]^2 D(x) \qquad (4-9) \end{aligned}$$

〔例4—1〕 已知正方形的边长为a，且$a\sim N(2、0.1)(cm^2)$，求面积A的均值μ_A与方差σ_A^2。

解：$A=\varnothing(a)=a^2$；$A'=\varnothing'(a)=2a$

（1）计算μ_A　由式（4—8），且$\mu_a=2\ cm^2$

$$E(A)=\mu_A=E[\varnothing(\mu_a)]=E[\mu_a^2]=\mu_a^2 = 4\ cm^2$$

（2）计算σ_A　由式（4—9），且$\sigma_a=0.1\ cm^2$

$$D(A)=[\varnothing'(\mu_a)]^2 D(a)=4\mu_a^2\cdot\sigma_a^2$$
$$=4\times4\times0\cdot01=0\cdot16\ \mathrm{cm}$$

$$\sigma_A=D(A)=\sqrt{0\cdot16}=0\cdot4\ \mathrm{cm}^2$$

〔例4—2〕 已知轴的直径$d\sim N(30\ \mathrm{mm},\ 1\cdot0\ \mathrm{mm})$。求弯曲截面模量$W$的均值$\mu_W$与标准差$\sigma_W$。

解：$W=\varnothing(d)=\dfrac{\pi}{16}d^3 \quad \mathrm{mm}^3$

$$W'=\varnothing'(d)=\frac{3\pi}{16}d^2 \quad \mathrm{mm}^3$$

$$\therefore\ \mu_W'=E(W)=E[\varnothing(\mu_d)]=\frac{\pi}{16}\mu_d$$
$$=$$
$$=\frac{\pi}{16}\times30^3$$

$$=5301\cdot4\ \mathrm{mm}^3$$

$$D(W)=[\varnothing'(\mu_d)]^2\cdot D(d)$$

$$=(\frac{3\pi}{16}\mu_d^2)^2\cdot D(d)$$

$$=[\frac{3\pi}{16}\times30^2]^2\times1^2=(530\cdot14)^2$$

$$=281048\cdot4\ \mathrm{mm}^6$$

$\sigma_W \approx 530 \cdot 1\ mm^3$

（二）、多维函数的数学期望和方差

多维函数中包含有几个变量，计算μ和σ时可夸用一维函数时的公式，今有一多维函数

$y=\varnothing(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 则有

$$E(y)=\mu_y=\varnothing(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n) \quad (4-10)$$

$$D(y)=\sigma_y^2=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial\varnothing(x)}{\partial x_i}\bigg|_{x=\mu}\right]^2 \cdot D(x_i) \quad (4-11)$$

〔例4—3〕 零件的应力$S \sim N(\mu_S, \sigma_S)$，材料的强度$\delta \sim N(\mu_S, \sigma_S)$，试计算强度差$y=\delta-S$的均值$\mu_y$与标准差$\sigma_y$。

解：由题意$y=\varnothing(\delta, S)=\delta-S$

$$\frac{\partial(\delta, s)}{\partial\delta}=\frac{\partial}{\partial\delta}(\delta-S)=1$$

$$\frac{\partial(\delta, S)}{\partial s}=\frac{\partial}{\partial S}(\delta-S)=-1$$

∴均值 $\mu_y=\mu_\delta-\mu_S \quad (4-12)$

方差 $D(y)=\sigma_y^2=1^2\cdot\sigma_\delta^2+(-1)^2\cdot\sigma_S^2$

$=\sigma_S{}^2+\sigma_S{}^2$

标准差 $\sigma_y=\sqrt{D(y)}=\sqrt{\sigma_\delta{}^2+\sigma_S{}^2}$ (4—13)

〔例4—4〕 已知Q～N（10000，1000）；A～N（5，0·4），S＝Q／A。求μ_S与σ_S。

解： $S=\varnothing(Q, A)=Q/A$

$$\frac{\partial(Q, A)}{\partial Q}=\frac{\partial}{\partial Q}\left(\frac{Q}{A}\right)=\frac{1}{A}$$

$$\frac{\partial(Q, A)}{\partial A}=\frac{\partial}{\partial A}\left(\frac{Q}{A}\right)=-\frac{Q}{A_2}$$

由式（4—10）：

$$\mu_S=E(S)=\varnothing(\mu_Q, \mu_A)=\frac{\mu_Q}{\mu_A}=$$

$$=\frac{10000}{S}=2000$$

由式（4—11）

$$D(S)=\left(\frac{1}{\mu_A}\right)^2\sigma_Q{}^2+\left(-\frac{\mu_Q}{\mu_A{}^2}\right)^2\cdot\sigma_A{}^2$$
$$=65600$$

$$\sigma_S=\sqrt{D(S)}=256{\cdot}12。$$