二次无理数的连分数

ERCI WULISHU DE LIANFENSHU

杨中和 著

陕西出版传媒集团
陕西科学技术出版社

二次无理数的连分数

杨中和　著

陕西出版传媒集团
陕西科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

二次无理数的连分数/杨中和著. —西安:陕西科学技术出版社, 2013.3
ISBN 978-7-5369-5623-0

Ⅰ.①二… Ⅱ.①杨… Ⅲ.①无理数—连分数—研究
Ⅳ.①O122

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第047699号

二次无理数的连分数

出 版 者	陕西出版传媒集团 陕西科学技术出版社 西安北大街 131 号 邮编 710003 电话 (029)87211894 传真 (029)87218236 http://www.snstp.com
发 行 者	陕西出版传媒集团 陕西科学技术出版社 电话 (029)87212206 87260001
印 刷	西安力顺彩印有限公司
规 格	880mm × 1230mm 32 开本
印 张	3.375
字 数	60 千字
版 次	2013 年 3 月第 1 版 2013 年 3 月第 1 次印刷
书 号	ISBN 978-7-5369-5623-0
定 价	12.00 元

前　言

连分数是实数逼近的重要工具，是初等数论的内容，在其他学科也有应用。本人从事初等数论教学多年，深感学生为将一个二次无理数化为连分数时的艰难。数越大越不堪重负，因此，有些书不得不在书末附一张连分数展开表。本书就是针对这一问题而出的，目的是提供给学生一个参考材料。书中主要给出了展$(a+\sqrt{n})/b$为连分数的一个展开方法——取整展开法，并由该法引出一些展开公式和简便算法，以及折回运算，给循环节分了类，给出了判型方法。最后，尝试了另一种展开法——取近展开法，并与取整法做了比较。

书中用汉字标号为(一)、(二)……的定理或公式，未见于以前的书中，是笔者独立得出的。取整法可把有理数展为连分数，即把无理数的方法用于有理数。反之，书中的循环节分数，和对同一个n的所有$(a+\sqrt{n})/b$的循环节长，具有相同奇偶性，给出了用展转相除化$(a+\sqrt{n})/b$为连分数，即把有理数方法用于无理数。本书在个别地方用到了矩阵和行列式的简单知识，大部分内容只是+、-、×、÷的运算，各节大部分都可独立阅读，

因此，具有中学文化水平就可阅读。

笔者颇感遗憾的是：①判双圈型的方法太麻烦，计算量大，总想找出一个具体的数学公式判据，终未成功。②估计$\sqrt{n}$的循环节长 l 是一大难题，笔者根据大量资料提出 $l\leqslant 2[\sqrt{n}]$，但给不出证明，并认为 l 不是初等方法所能撼动的。③对于取近法来说，纯循环和拟纯循环的充要条件各是什么，笔者未考虑，希望有兴趣的朋友去研究。

本书作者，学无师承，底子薄，水平不高，书中对问题分析不透，表述疏漏，推理有误，逻辑欠严谨等在所难免，希望读者若有发现，请批评指正。

目 录

1. $\sqrt{n}$的连分数展开 …………………………………… (1)
2. 对部分商算法结构的分析 ……………………… (5)
3. $(a+\sqrt{n})/b$ 的连分数展开 ……………………… (8)
4. 可展条件 …………………………………………… (10)
5. 取整展开法对有理数的应用 …………………… (13)
6. 求展式中的分子和分母 ………………………… (15)
7. 展式分析补充 …………………………………… (17)
8. 连分数展开公式 ………………………………… (19)
9. 简便算法 ………………………………………… (21)
10. 绕开过渡数求分母………………………………… (25)
11. 循环节分析……………………………………… (28)
12. 折回运算分析…………………………………… (34)
13. 渐近分数性质…………………………………… (37)
14. 渐近分数的加成表示…………………………… (42)
15. 循环节分数……………………………………… (45)
16. 循环节分数反用………………………………… (49)
17. 渐近分数速求…………………………………… (52)
18. 循环节分类……………………………………… (54)
19. 循环节判型……………………………………… (58)
20. 佩尔方程………………………………………… (62)
21. 解 $x^2-ny^2=\pm Q$ ………………………………… (66)

22. 降 Q …………………………………………………… (69)
23. 循环节判型举例 ………………………………………… (72)
24. 循环节长 ………………………………………………… (78)
25. 连分数的另一种展开法 ………………………………… (85)
附录:连分数史略述 …………………………………… (99)
参考文献 …………………………………………………… (102)

1. $\sqrt{n}$的连分数展开

连分数是丢番都逼近的重要工具,但一般书上的算法较繁,本书给出了二次无理数的展开法——取整法。对于一般实数 α,将其写成整数与分数之和,即 $\alpha=[\alpha]+\{\alpha\}=[\alpha]+(1/\{\alpha\})^{-1}$(见下注),则其形式连分数为 $\alpha=[[\alpha],1/\{\alpha\}]$。对于非平方自然数 n,若 $[\sqrt{n}]=k$,则

$\sqrt{n}=k+\sqrt{n}-k=k+(1/(\sqrt{n}-k))^{-1}$,于是,其连分数为:$\sqrt{n}=[k,\dfrac{1}{\sqrt{n}-k}]$,若要求出完整的简单连分数,再将第二项的分母有理化,写出其整数部与分数部,整数部即第二部分商,分数部的倒数即形式上的第三部分商,继续这一模式:整、分部分离→分数部取倒→分母有理化,…,最后便得出$\sqrt{n}$的简单连分数。

注:上述符号[·],即括号内一个数有两种含义,一为连分数符号,常叫欧拉括号,另一种即高斯取整符号,如$[3/2]=1$、$[\sqrt{5}]=2$,等等。

例 1 求$\sqrt{7}$的连分数

解: $[\sqrt{7}]=2\Rightarrow$

$$\sqrt{7}=2+\sqrt{7}-2=[2.\frac{1}{\sqrt{7}-2}=\frac{2+\sqrt{7}}{3}=1+\frac{\sqrt{7}-1}{3}]$$

$$=[2.1.\frac{3}{\sqrt{7}-1}=\frac{1+\sqrt{7}}{2}=1+\frac{\sqrt{7}-1}{2}]$$

$$=[2.1.1.\frac{2}{\sqrt{7}-1}=\frac{1+\sqrt{7}}{3}=1+\frac{\sqrt{7}-2}{3}]$$

$$=[2.1.1.1.\frac{3}{\sqrt{7}-2}=2+\sqrt{7}]=[2,\dot{1},1,1,\dot{4}]$$

将以上算法一般化，设 $n=k^2+\gamma, 1\leqslant\gamma\leqslant 2k$，则有 $[\sqrt{n}]=k$，在$\sqrt{n}$的连分数展开过程中，每次分母有理化后，都会出现形式为$(a+\sqrt{n})/b$ 的分数，如$\sqrt{7}$展式中的 $(2+\sqrt{7})/3$，$(1+\sqrt{7})/2$ 等等，给分子加、减一个$\leqslant k$ 的最大整数 c，使 $b|(a+c)$，则$(a+c)/b$ 的商便是新的部分商。接着对$(\sqrt{n}-c)/b$ 继续进行取倒、有理化，整、分部分离步骤，不断循环。为了表述方便，令 $n_c=n-c^2$，称为 n 对 c 的过渡数，于是：

$$\sqrt{n}=k+\sqrt{n}-k=[k.\frac{1}{\sqrt{n}-k}=\frac{k+\sqrt{n}}{n_k}=\frac{k+i_1+\sqrt{n}-i_1}{n_k}]$$

$$=[k,(k+i_1)/n_k,\frac{n_k}{\sqrt{n}-i_1}=\frac{i_1+\sqrt{n}}{n_{i_1}/n_k}=\frac{i_1+i_2+\sqrt{n}-i_2}{n_{i_1}/n_k}]$$

$$=[k.\frac{k+i_1}{n_k},\frac{i_1+i_2}{n_{i_1}/n_k},\frac{n_{i_1}/n_k}{\sqrt{n}-i_2}=\cdots]$$

$$=[k.\frac{k+i_1}{n_k},\frac{i_1+i_2}{n_{i_1}/n_k},\cdots,\frac{i_{l-1}+i_l}{q},\frac{i_l+i_{l+1}}{n_{i_l}/q}=\cdots]$$

(1)

公式(1)说明:$\sqrt{n}$的连分数首商(第一部分商)为$[\sqrt{n}]=k$,然后取$\leqslant k$的最大整数i_1,使$n_k \mid (k+i_1)$,其商便为次商,再取$\leqslant k$的最大整数i_2,使i_1+i_2被n_{i_1}/n_k整除,其商即三商。一般的,若求得某商$(i_{l-1}+i_l)/q$,则取$\leqslant k$的最大整数i_{l+1},使(i_l+i_{l+1})被n_{i_l}/q整除,其商便是下一个部分商。现在证明(1)中每个分母都是整数。

证:(数学归纳法)(1)先证$n_{i_1}/n_k\in N$.

$k+i_1\equiv 0(\bmod n_k)\Rightarrow k\equiv -i_1(\bmod n_k)\Rightarrow -k^2\equiv -i_1^2(\bmod n_k)\Rightarrow$

$n_k=n-k^2\equiv n-i_1^2=n_{i_1}(\bmod n_k)\Rightarrow n_k \mid n_{i_1}$,即$n_{i_1}/n_k\in N$.

(2)设$(i_{l-1}+i_l)/q$之q为整数,证$n_{i_l}/q\in N$.

$q\mid n_{i_{l-1}}$及$i_{l-1}+i_l\equiv 0(\bmod q)\Rightarrow i_{l-1}\equiv -i_l(\bmod q)\Rightarrow -i_{l-1}^2\equiv -i_l^2(\bmod q)\Rightarrow n_{i_{l-1}}=n-i_{l-1}^2\equiv n-i_l^2=n_{i_l}(\bmod q)\Rightarrow n_{i_l}/q\in N$.

若$n=k^2+\gamma,1\leqslant\gamma\leqslant 2k$,则有$[\sqrt{n}]=k$.

例2 求$\sqrt{13}$的连分数

解:$13=3^2+4\Rightarrow k=3\Rightarrow i$只能取1,2,3,因展式中要用到过渡数$n_i,i=1,2,3$,我们可预先算出:$13_1=13-1=12,13_2=13-2^2=9,13_3=13-3^2=4\Rightarrow\sqrt{13}=[3,$

$\dfrac{3+1}{13_3},\dfrac{1+2}{13_1/4},\dfrac{2+1}{13_2/3},\dfrac{1+3}{13_1/3},\dfrac{3+3}{13_3/4},\dfrac{3+1}{13_3}\cdots] = [3,\dot{1},1,1,1,\dot{6}]$

解释：第二部分商$\dfrac{3+1}{13_3}$，$\because 13_3=4$，$\therefore$ 商为 1。第三项的分母为过渡数 13_1 除以前一项分母 $13_3=4$，第四项的分母为过渡数 13_2 除以第三项的分母：$13_1/4=3$。依此类推，第七项$\dfrac{3+1}{13_3}$与第二项相同，说明开始循环。

2. 对部分商算法结构的分析

(1)每个部分商都是由一个分母和左、右两个分子 i,j 由算式$\frac{i+j}{q}$得出的,$i,j\leqslant k$,q 为 n_i 的因子,而$\frac{i+j}{q}$的不同形式有限,故$\sqrt{n}$的连分数是循环的,又因分母最小为 1,两分子 i,j 各$\leqslant k$,故所有部分商都$\leqslant 2k$。

容易看出,运算具有连锁关系,设三个相邻部分商为

$\frac{i_1+i_2}{a},\frac{i_2+i_3}{b},\frac{i_3+i_4}{c}$ 则有

$$\left.\begin{array}{l} b=n_{i_2}/a\Rightarrow n_{i_2}=ab \\ c=n_{i_3}/b\Rightarrow n_{i_3}=bc \end{array}\right\rangle \Rightarrow (n_{i_2},n_{i_3})=b(a,c)\Rightarrow$$

(2)相邻分母为其共用分子过渡数的一对互补因子。

(3)每个分母都是其上两个分子过渡数的公因子(不一定是最大公因子)。

(4)设 n_i 的一对互补因子为 $p,q(n=k^2+\gamma,1\leqslant\gamma\leqslant 2k)$,则有

$n_i=n-i^2=pq=(k+i)(k-i)+\gamma\Rightarrow k-i<p,q\leqslant k+i$

(5)n_k 有一对互补因子 $1,n_k$,而其他任一过渡数 n_i 都$\geqslant n_k+2k-1$,故不能有互补因子 $1,n_i$。

由以上分析,可将$\sqrt{n}$的连分数计算简化为直接由过

渡数的互补因子来计算，将公式(1)中的每个部分商$\frac{i+j}{q}$写成形式 i—(q)—j，即分母居中、分子列左右，部分商标于分母之上，由短线连接，再将第一部分商 $k=\frac{0+k}{1}$写成0→(1)—k，0 往右所标箭头表示运算前进方向。于是(1)成为

$$0\to(\overset{k}{1})—k—(\overset{a_1}{\gamma})—i_1—(\overset{a_2}{q_1})—i_2—(q_2)—i_3—\cdots \tag{2}$$

上式中的 $q_1=n_{i_1}/\gamma(\gamma=n_k)$，$q_2=n_{i_1}/q_1$，总之，下一个分母，为前一个分母去除其第二个分子加项的过渡数所得的商。

例 3　求$\sqrt{106}$的连分数

解： $106=10^2+6\Rightarrow k=10,\gamma=6$，即 $n_k=6$

$$0\to(\overset{10}{1})—10—(\overset{3}{6})—8—(\overset{2}{7})—6—(\overset{1}{10})—4—(\overset{1}{9})—5—(\overset{1}{9})—4—(\overset{1}{10})—6—(\overset{2}{7})—8—(\overset{3}{6})—10—(\overset{20}{1})—1\underbrace{0—(6)}$$

$$\Rightarrow\sqrt{106}=[10,\dot{3},2,1,1,1,1,2,3,\dot{20}]$$

演算步骤：

(1)先写出第一部分商 10 的计算单元，0—($\overset{10}{1}$)—10，下一个分母为 $106_{10}/1=6$ 与前一个分子 10 相连。

(2)在≤10 中取最大整数 x，使 $6\mid(10+x)$，得 $x=8$，与分母(6)相连。

(3)(10+8)/6=3,即第二部分商,标于(6)之上。

(4)反复(2)、(3)两步,直至出现10—(6),显示开始循环为止。

容易看出,展式呈现一种对称现象,所得结果形成中心对称数段。我们着眼于上式中(9)—5—(9)这一段,由5处截开,除过首商10和末商20外,5的左段和右段数字完全相同,次序相反,因此,我们可由5处折回(用箭头表示)使两段重合,右段所得部分商写于分母下,这样更明晰、美观,且省篇幅。于是,上式成为:

$$0\rightarrow(\overset{10}{1})-\underset{\underset{20(1)}{\|}}{10}=(\overset{3}{\underset{3}{6}})=8=(\overset{2}{\underset{2}{7}})=6=(\overset{1}{\underset{1}{10}})=4=(\overset{1}{\underset{1}{9}})\Leftarrow 5$$

由此可得结论:当某分子两边的分母等值时,展式可由该分子处折回。

同理可得:当某分母两边的分子等值时,展式由该分母处折回。

3. $(a+\sqrt{n})/b$ 的连分数展开

我们对$(a+\sqrt{n})/b$ 约定：a、b、n 均为整数，$n>0$ 为非平方数（$n=k^2+\gamma, 1\leqslant\gamma\leqslant 2k$，下同），$b\neq 0$，$\sqrt{n}$前永为+号，如$\frac{3-\sqrt{5}}{7}$，$\frac{-3-\sqrt{5}}{7}$等，就应化为$\frac{-3+\sqrt{5}}{-7}$，$\frac{3+\sqrt{5}}{-7}$，这样以来，$\sqrt{n}$就可理解为$\frac{0+\sqrt{n}}{1}$。$(a+\sqrt{n})/b$ 的连分数首商应为$[(a+\sqrt{n})/b]$，但 $n=k^2+\gamma$，$\Rightarrow[\sqrt{n}]=k\Rightarrow[(a+\sqrt{n})/b]=[(a+k)/b]$。具体做法是：若 $b>0$，取$\leqslant k$ 的最大整数 i，使 $b\mid(a+i)$，其商便是连分数的第一部分商；若 $b<0$，取 $>k$ 的最小整数 i，使 $b\mid(a+i)$，因此，第一部分商可能为负，但以后就全为正了。展式如下：（设 $b>0$）

$$a\to(\overset{a_0}{b})—i_1—(\overset{a_1}{q_1})—i_2—(\overset{a_2}{q_2})—i_3—(q_3)—\cdots$$

计算第一单元 $a\to(\overset{a_0}{b})—i_1$：取$\leqslant k$ 的最大整数 i_1，使 $b\mid(a+i_1)$，其商 a_0 即为第一部分商。第二单元 $i_1—(\overset{a_1}{q_1})—i_2$：$q_1=n_{i_1}/b$；取$\leqslant k$ 的最大整数 i_2，使 $q_1\mid(i_1+i_2)$，其商 a_1 即为第二部分商。第三单元 $i_2—(\overset{a_2}{q_2})—i_3$：取$\leqslant k$ 的最大整数 i_3，使 $q_2\mid(i_2+i_3)$，其商 a_2 即为第三部分商……

例 4 求$(5+\sqrt{46})/7$ 的连分数

解:$46=6^2+10\Rightarrow k=6\Rightarrow$

$$\left(\overset{12}{1}\right)=6=\left(\overset{1}{\underset{1}{10}}\right)=4=\left(\overset{3}{\underset{3}{3}}\right)=5\Rightarrow\left(\overset{1}{\underset{1}{7}}\right)=2=\left(\overset{1}{\underset{1}{6}}\right)$$

$$6(2)=6=\left(\overset{2}{\underset{2}{5}}\right)=4$$

$\Rightarrow(5+\sqrt{46})/7=[\dot{1},1,2,6,2,1,1,3,1,12,1,\dot{3}]$

值得注意的是,不是任何一个二次无理数,都可依照上述方法展成连分数的。关键是求出的 n_a/b 是否为整数。是整数,展式就可顺利进行,否则,算法是启动不起来的。关于这一点,下一节解决。

4. 可展条件

定理1 $\alpha=(a+\sqrt{n})/b$ 可展的充要条件为 $b\mid n_a$

这里所谓的可展，就是对 α 写出展式来，按展式的结果，α 的连分数应为：

$$\alpha=\left[\frac{a+i_1}{b},\frac{i_1+i_2}{q_1},\frac{i_2+i_3}{q_2},\cdots,\frac{i_{m-1}+i_m}{q_{m-1}},\frac{i_m+i_{m+1}}{q_m},\cdots\right]$$

上述方括弧中各项都是整数，且各分母 q_i 也都是整数。

证：必要性：$b\mid(a+i_1)\Rightarrow a+i_1\equiv 0\pmod b\Rightarrow a\equiv -i_1\pmod b$

$\Rightarrow n_a=n-a^2\equiv n-i_1^2=n_{i_1}\pmod b$，$\alpha$ 可展必须 q_1 为整数，即

$n_{i_1}\equiv 0\pmod b\Rightarrow n_a\equiv 0\pmod b\Rightarrow b\mid n_a$

充分性：$n_a\equiv 0\pmod b\Rightarrow n_{i_1}\equiv 0\pmod b\Rightarrow q_1$ 为整数。

同理：$\left.\begin{array}{l}q_1\mid(i_1+i_2)\\ q_1\mid n_{i_1}\end{array}\right\}\Rightarrow q_1\mid n_{i_2}\Rightarrow q_2$ 为整数……依此类推，分母全为整数。

若 α 不可展，可对 α 的分式上、下乘 c 成为 $(ac+\sqrt{c^2n})/bc$，这时，原来的过渡数 n_a 成为 $(c^2n)_{ca}=c^2n-c^2a^2=c^2n_a$，可展条件成为 $bc\mid c^2n_a=b\mid cn_a$。若 $(n_a,b)=d$，$b=b_1d$，取 c 为 b_1 的倍数，即可满足可展条件，或直接