高等学校数学学习辅导教材

线性代数

全程学习指导

同济大学·线性代数第三、四版

刘学生/主编

大连理工大学出版社

高等学校数学学习辅导教材

线性代数
·全程学习指导·

（第三版）

（同济·线性代数第三、四版）

刘学生　主　编
蔡若松　副主编
赵振海　主　审

大连理工大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数全程学习指导 / 刘学生主编. —3 版.— 大连 :大连理工大学出版社, 2003.9
(高等学校数学学习辅导教材)
ISBN 7-5611-1969-0

Ⅰ. 线… Ⅱ. 刘… Ⅲ. 线性代数—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 041975 号

大连理工大学出版社出版
地址:大连市凌水河 邮政编码:116024
电话:0411-4708842 传真:0411-4701466 邮购:0411-4707961
E-mail:dutp@mail.dlptt.ln.cn URL:http://www.dutp.cn
大连理工印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:140mm×203mm 印张:10.25 字数:290 千字
印数:54 001 ~ 60 000
2001 年 9 月第 1 版 2003 年 9 月第 3 版
2003 年 9 月第 7 次印刷

责任编辑:刘 杰 范业婷 责任校对:王 鹏
封面设计:王福刚

定 价:15.00 元

编者的话

本书自 2001 年出版以来，发行已经突破 5 万册，想到此书帮助了数以万计的同学学习《线性代数》，作为教师，我们感到无比欣慰。同时，也督促我们进一步修订此书，使其日臻完善。

本次修订，订正了原书中的少量笔误及排版错误，并根据近年来考研题型的变化趋势，增加了与此相近的典型题，及 2003 年考研真题。

考虑到很大一部分院校的学生选用同济大学《线性代数》三版或四版教材。习题同步解析中标有两个版本的题号，三版题号在前，四版题号在后，并用括号标明，例如 6(8)表

·应用更便利·基础更扎实·学习更容易·

示三版的第 6 题，四版的第 8 题。

线性代数的学习，需要学生通过认真的读书和反复的做习题来逐步提高抽象思维能力，本书正是基于这一点来帮助学习线性代数的同学能在较短的时间内掌握线性代数，也为他们今后的学习和工作奠定良好的基础。

为增加信息量，考研真题采用“年代/类别/分值”标注方式，如“990406”，说明此题是 1999 年数学四的考题，分值 6 分。

本书再版，非常感谢我的老师，大连理工大学赵振海教授，对本书的审阅和修改付出辛勤努力。

也请读者将对本书的意见和建议反馈给我们，以便再版时修订。

刘学生

2003 年 9 月

前言

·应用更便利·基础更扎实·学习更容易·

《线性代数》是大学工科、经济学、管理学等门类各专业学生必修的基础课，也是硕士研究生入学考试的一门必考科目。为了帮助在校的大学生及考研的同学学好《线性代数》，扩大课堂信息量，提高应试能力，我们根据国家教委审订的高等院校“高等数学课程教学基本要求”(教学大纲)，教育部“2002 年全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲”的要求，融学习指导和考研为一体编写了此书。书中设计了一些必要的版块，使全书的理论体系更臻完善，选取最典型、最权威的 5 套模拟试卷和 1995 年～2002 年研究生考试线性代数的全部试题并给出参考答案，使本书更适合本科学生学习线性代数及考研的需要。

本书仍然按照被全国许多院校采用的《线性代数》(同济大学编,第四版,高等教育出版社)的章节顺序,分为七章,每章均设计了四个版块,即

知识点考点精要 列出基本概念,重要定理和主要内容,突出必须掌握或考试出现频率高的核心知识。

典型题真题精解 精选历年研究生入学考试试题中具有代表性的例题进行详尽的分析和解析。这些例题涉及内容广、类型多、技巧性强,旨在提高学生的分析能力,掌握基本概念和理论,开拓解题思路,熟练掌握解题技巧。

教材习题同步解析 针对《线性代数》教材中的习题,几乎给出了全部的解,它无非方便于读者对照和分析。值得提醒的是,解题能力需要亲自动手,通过本身的实践,才能逐步锻炼出来,从而不断提高水平。

模拟试题自测 自测旨在进一步强化解题训练,反映考试的重点、难点,培养综合能力和应变能力,巩固和提高复习效果。

本书包含了1995年～2002年研究生入学考试全部试题。虽然每年的试题都有变化,但是知识的范围和结构基本类同。同时我们还可看出:试题与科学的思维方式,熟练的技巧,涉及知识的使用意识等密

切相关。因此，深入掌握基本概念、基本理论、常用方法是至关重要的，精读并学会解一定数量的范例不失为应试的有效途径。

本书在编写过程中，檀颖、刚家泰、崔国生、周丽馥参加了部分编写工作，在策划、编写、审稿等方面得到了大连理工大学的许多教授的热情帮助与支持，还得到了大连大学信息工程学院领导、教务处徐晓鹏同志的极大关怀，在此一并表示衷心的感谢！

限于编者的水平，错漏不当之处，诚恳期望同行和读者批评指正。

编　者

2002年9月

目 录

第一章　n 阶行列式

知识点考点精要

行列式最早是由解线性方程组而引进的。时至今日，行列式已不止如此，在许多方面都有广泛的应用。本章着重叙述了 n 阶行列式的定义、n 阶行列式的计算及其应用。

一、n 阶行列式的定义 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

等于 $n!$ 项的代数和，其中每一项都是取自不同行不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，而其符号为 $(-1)^{\tau[j_1j_2\cdots j_n]}$，$j_1j_2\cdots j_n$ 为 $1,2,\cdots,n$ 的任一种排列，$\tau[j_1j_2\cdots j_n]$表示 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数。

二、行列式的性质

(1)行列式与它的转置行列式相等。

(2)互换行列式的两行(两列)行列式变号。由此即得若行列式某两行(或两列)完全相同，此行列式等于零。

(3)把一个行列式的某一行(列)的所有元素同乘以某一数 k，等于以数 k 乘这个行列式。

(4) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(5)把行列式的某一行(列)的元素乘以同一数后加到另一行(列)上,行列式不变。

三、行列式计算

(1)定义法。

(2)化成三角形行列式法,这是行列式计算中最基本的方法。

(3)递推法:根据已给行列式 D_n 的特点,找出 D_n 的递推关系式。

(4)降阶法:可利用按行(列)展开定理、拉普拉斯定理*、分块行列式的降阶定理*等进行计算。

(5)升阶法:此法多采用的形式为加边法。

(6)分解之和法。

(7)分解之积法。

(8)换元法。

(9)数学归纳法。

(10)线性因子法。

(11)辅助行列式法。

(12)应用范德蒙德行列式进行计算。

(13)n 阶循环行列式算法。

四、行列式的应用

克拉墨法则:

若一个含有 n 个未知量 n 个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{1}$$

其系数行列式 $D\neq 0$,则线性方程组(1)仅有一个解

---

* 表示可在参考书中查到。

$$x_i = \frac{D_i}{D} \qquad (i = 1,2,3,\cdots,n)$$

其中 D_i 是系数行列式 D 中的第 i 列元素换以常数项 $b_1,\cdots,b_n$，而得到的行列式。

典型题真题精解

一、几种特殊行列式的结果

(1)三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \qquad (\text{上三角行列式})$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \qquad (\text{下三角行列式})$$

(2)对角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(3)对称与反对称行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

满足 $a_{ij} = a_{ji} \quad \begin{matrix} (i = 1,2,\cdots,n) \\ (j = 1,2,\cdots,n) \end{matrix}$

D 称为对称行列式。

$$D=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ a_{n1} & a_{2n} & a_{n3} & \cdots & 0 \end{vmatrix} \quad \text{满足 } a_{ij}=-a_{ji} \quad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

D 称为反对称行列式。若阶数 n 为奇数时,则 $D=0$

(4)范德蒙行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j)$$

二、行列式的计算

【例 1】 (用定义计算)计算

$$D=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 \\ 0 & a_{52} & a_{53} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

解 由行列式定义知 $D=\sum\limits_{j_1\cdots j_n}(-1)^{\tau[j_1\cdots j_n]}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$,因 $a_{11}a_{14}a_{15}=0$,所以 D 的非零项 j_1 只能取 2 或 3,同理由 $a_{41}=a_{44}=a_{45}=a_{51}=a_{55}=0$,因而 j_4j_5 只能取 2 或 3,又因 $j_1\cdots j_5$ 要求各不相同,故 $a_{j_1}a_{j_2}\cdots a_{5j_5}$ 项中至少有一个必须取零,所以 $D=0$。

【例 2】 计算(化为三角形法)

$$D_n=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

解 各行加到第一行中去

$$D_n=\begin{vmatrix} a+(n-1)b & a+(n-1)b & \cdots & a+(n-1)b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ b & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$$

【例 3】 计算(用递推法)

$$D_n=\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}$$

解 按第一行展开得

$$D_n=(\alpha+\beta)D_{n-1}-\alpha\beta D_{n-2} \tag{1}$$

$$D_n-\alpha D_{n-1}=\beta(D_{n-1}-\alpha D_{n-2})$$

按递推关系 $D_n-\alpha D_{n-1}=\beta^{n-2}(D_2-D_1)$

$$D_1=\alpha+\beta \qquad D_2=\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$$

$$D_n-\alpha D_{n-1}=\beta^n \tag{2}$$

由(1)式又可推导出

$$D_n-\beta D_{n-1}=\alpha(D_{n-1}-\beta D_{n-2})\text{，按递推关系得}$$

$$D_n-\beta D_{n-1}=\alpha^n \tag{3}$$

由(2)(3)解得

$$D_n=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}.$$

【例 4】 计算(降阶法)

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}$$

解 原式$=3(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix}=3\times 2(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=6\times 10=60$

【例 5】 计算(升阶法)行列式$|\boldsymbol{I}_n-2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}|$，其中$\boldsymbol{I}_n$是单位阵，$\boldsymbol{u}=(u_1,\cdots,u_n)^{\mathrm{T}}$为$n$维实列向量，且$\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}=1$。

解 将行列式$|\boldsymbol{I}_n-2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}|$升为$(n+1)$阶行列式

$$|\boldsymbol{I}_n-2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}|=\begin{vmatrix} 1 & 2u_1 & 2u_2 & \cdots & 2u_n \\ 0 & 1-2u_1^2 & -2u_1u_2 & \cdots & -2u_1u_n \\ 0 & -2u_2u_1 & 1-2u_2^2 & \cdots & -2u_2u_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & -2u_nu_1 & -2u_nu_2 & \cdots & 1-2u_n^2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 2u_1 & 2u_2 & \cdots & 2u_n \\ u_1 & 1 & & & \\ u_2 & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ u_n & & & & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1-\sum_{i=1}^{n}2u_i^2 & 2u_1 & 2u_2 & \cdots & 2u_n \\ 0 & 1 & & & \\ 0 & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{vmatrix}$$

$$=1-2\sum_{i=1}^{n}u_i^2=-1\left(由\sum_{i=1}^{n}u_i^2=1\right)$$

【例 6】 计算(分解之和法)

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1-m & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-m & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n-m \end{vmatrix}$$

解

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1-m & x_2-0 & \cdots & x_n-0 \\ x_1-0 & x_2-m & \cdots & x_n-0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1-0 & x_2-0 & \cdots & x_n-m \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} -m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -m \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ x_1 & -m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & 0 & \cdots & -m \end{vmatrix}+\cdots+$$

$$\begin{vmatrix} -m & 0 & \cdots & x_n \\ 0 & -m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$