《几何学引论》（第2版）解析几何部分

解析几何习题全解

JIEXI JIHE XITI QUANJIE

卢 涛 安佰玲 黄保军 主编

中国科学技术大学出版社

《几何学引论》(第2版)解析几何部分

解析几何习题全解

卢　涛　安佰玲　黄保军　主编

中国科学技术大学出版社

内容简介

本书是解析几何的学习辅导书，分向量与坐标、平面与直线、特殊曲面、二次曲面、二次曲线共五章．每章由知识概要、典型例题分析与讲解、习题详解三个部分组成，较好地阐释了解析几何的思想和方法，对每章的重点和难点做了梳理与总结，同时通过举例分析，尝试一题多解，提高读者的解题能力，帮助读者解疑释惑，进一步理解知识点．其中习题详解部分对《几何学引论》（第2版）中的解析几何课后习题进行了全解．

本书可作为高等学校解析几何课程的教学参考用书，也可以作为学生的学习辅导用书．

图书在版编目（CIP）数据

解析几何习题全解/卢涛，安佰玲，黄保军主编．—合肥：中国科学技术大学出版社，2013.7

ISBN 978-7-312-03250-9

I．解… II．①卢…②安…③黄… III．解析几何—题解 IV．O182-44

中国版本图书馆CIP数据核字（2013）第134423号

出版 中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路96号，230026
http://press.ustc.edu.cn
印刷 合肥华星印务有限责任公司
发行 中国科学技术大学出版社
经销 全国新华书店
开本 710 mm × 960 mm 1/16
印张 12.5
字数 238千
版次 2013年7月第1版
印次 2013年7月第1次印刷
定价 22.00元

前言

“解析几何”是高等院校数学各专业的重要基础课程，不仅数学、物理学的许多后继课程要以此为基础，更为重要的是，它的思想方法和几何直观可为许多抽象的、高维的数学、物理问题提供模型和背景.

本书可作为《几何学引论》（第 2 版，郑崇友、王汇淳、侯忠义、王智秋编写，高等教育出版社出版）解析几何部分的教学参考用书，它较好地阐释了解析几何的思想和方法，对每章的重点和难点做了梳理与总结，并对某些概念做了适当的延伸与拓宽，同时通过举例分析，尝试一题多解，提高读者的解题能力，帮助读者解疑释惑，进一步理解知识点.

本书对《几何学引论》（第 2 版）解析几何部分的章节次序及内容分配略有改动，全书共分五章：第 1 章向量与坐标，第 2 章平面与直线，第 3 章特殊曲面，第 4 章二次曲面，第 5 章二次曲线. 每章由知识概要、典型例题分析与讲解、习题详解三个部分组成.

第一部分“知识概要”以图表的形式详细地介绍了各章的基本内容，利用图表更能突出体现解析几何中的数形结合思想；对各章中的核心概念与重要定理及公式做了梳理与总结，对教材中的有些概念与知识点还做了适当的延伸与拓宽，让读者能更进一步地深入理解与掌握教材的内容.

第二部分“典型例题分析与讲解”是对各章中的理论知识进行应用分析，其内容结构包括常见题型及常用的解题方法，根据解决问题的不同进行分类归纳，深刻阐述了同一类型的题目所隐含的基本方法与思想及不同的解决方法，希望启发和引导读者多思考，发挥自己的创造力，提高分析问题与解决问题的能力.

第三部分“习题详解”是对《几何学引论》（第 2 版）解析几何部分的习题所做的详细解答，同时还选解了《解析几何》（第 4 版，吕林根、许子道编）中的一些典型习题. 在做题时，有些题做了解析，有些做了解后注解，有些做了一题多解. 习题解析可以帮助读者准确把握概念，深入理解定理，拓展思想方法.

本书由安佰玲、卢涛执笔，黄保军对全书进行了审校，最后集体讨论定稿.

在编写过程中，编者参考和借鉴了诸多书籍，在此谨向原作者表示衷心的感谢，恕不一一列举．研究生朱润秋、杜银铃、马晶晶协助做了大量的录入工作，在此表示感谢．同时向对本书的编写和出版给予大力支持的淮北师范大学数学科学学院、中国科学技术大学出版社以及对本书给予关注和指导的各位专家、老师和学生表示衷心的感谢．向郑崇友教授表示诚挚的谢意，感谢郑教授百忙之中对本书的编写提出的指正意见．

本书可作为高等学校“解析几何”课程的教学参考用书，也可以作为学生的学习辅导用书．

由于编者水平有限，书中存在不妥与错误在所难免，欢迎广大读者批评指正．

编　者

目　录

第 1 章　向量与坐标

1.1　知 识 概 要

1.1.1　向量的运算

向量的基本运算包括向量的加法、向量与数的数乘、向量的数量积及向量的向量积四种运算，我们用表格的形式列出了各种运算的定义、运算性质、几何意义及坐标表示.

设表格中的向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的坐标分别是

$$\boldsymbol{a}=\{a_1,a_2,a_3\},\quad \boldsymbol{b}=\{b_1,b_2,b_3\},\quad \boldsymbol{c}=\{c_1,c_2,c_3\}$$

1. 向量的线性运算

向量的线性运算包括向量的加法及向量与实数的数乘运算，表 1.1 给出了这两种运算的定义及运算性质.

表 1.1

	向量的加法：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$	向量的数乘：$\lambda\boldsymbol{a}$
定义	三角形法则或平行四边形法则	$\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个向量，大小：$\lvert\lambda\boldsymbol{a}\rvert=\lvert\lambda\rvert\lvert\boldsymbol{a}\rvert$，方向：当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同向；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反向；当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$
运算规律	$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$， $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$	$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}=\mu(\lambda\boldsymbol{a})$， $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$， $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$
坐标表示	$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\{a_1\pm b_1,a_2\pm b_2,a_3\pm b_3\}$ 其中坐标为仿射坐标	$\lambda\boldsymbol{a}=\{\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3\}$ 其中坐标为仿射坐标

续表

	向量的加法：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$	向量的数乘：$\lambda\boldsymbol{a}$
几何意义	若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线，$\lvert\lvert\boldsymbol{a}\rvert-\lvert\boldsymbol{b}\rvert\rvert<\lvert\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}\rvert<\lvert\boldsymbol{a}\rvert+\lvert\boldsymbol{b}\rvert$ 表示三角形第三边小于两边之和，大于两边之差	若 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$，则 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$

2. 向量的数量积与向量积

(1) 定义及运算性质

向量的数量积与向量积的定义及运算性质见表 1.2.

表 1.2

	数量积：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$	向量积：$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$
定义	两个向量的数量积是一个数量，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\lvert\boldsymbol{a}\rvert\lvert\boldsymbol{b}\rvert\cos\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$	$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 是一个向量， 大小：$\lvert\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\rvert=\lvert\boldsymbol{a}\rvert\lvert\boldsymbol{b}\rvert\sin\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$； 方向：$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{b}$，且 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 构成右手系
运算规律	$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$，$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$， $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$， $\left.\begin{matrix}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}\end{matrix}\right\}\not\Rightarrow\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$	$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$，$(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$， $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$， $\left.\begin{matrix}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}\end{matrix}\right\}\not\Rightarrow\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$
坐标表示	$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ 其中坐标为直角坐标	$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=$ $\left\{\begin{vmatrix}a_2&a_3\\b_2&b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_3&a_1\\b_3&b_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}\right\}$ 其中坐标为右手直角坐标系中的坐标
几何意义	(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\lvert\boldsymbol{a}\rvert\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}}=\lvert\boldsymbol{b}\rvert\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}}$； (2) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$； (3) $\lvert\boldsymbol{a}\rvert=\sqrt{\boldsymbol{a}^2}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$； (4) $\cos\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\lvert\boldsymbol{a}\rvert\lvert\boldsymbol{b}\rvert}$	(1) 若 $\boldsymbol{a}\not/\!/\boldsymbol{b}$，$\lvert\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\rvert$ 表示以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积； (2) $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$； (3) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{b}$

(2) 数量积与向量积的区别与联系

联系：

$$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2+(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2 \tag{1.1}$$

区别：① 从结果属性来看，两个向量的数量积是一个数，而两个向量的向量积是一个向量；

② 从运算规律来看，数量积满足交换律，向量积满足反交换律. 即交换两向量的位置对数量积而言没有影响，但对向量积而言其结果变为反向量.

(3) 向量的乘法与数的乘法

表 1.3 比较了两向量的乘法的运算性质和数的乘法，在学习与应用时应特别注意.

表 1.3

数的乘法	向量的数量积	向量的向量积
$ab=ba$	$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$	$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$
$\lambda(ab)=(\lambda a)b=a(\lambda b)$	$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$	$(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times(\lambda\boldsymbol{b})$
$(a+b)c=ac+bc$	$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$	$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$
$aa=a^2$	$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=\lvert\boldsymbol{a}\rvert^2=\boldsymbol{a}^2$	$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=0$
$ab=0\Rightarrow a=0$ 或 $b=0$	$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\not\Rightarrow\boldsymbol{a}=0$ 或 $\boldsymbol{b}=0$	$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=0\not\Rightarrow\boldsymbol{a}=0$或 $\boldsymbol{b}=0$
$\begin{cases}ab=ac\\ a\neq0\end{cases}\Leftrightarrow b=c$	$\begin{cases}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{a}\neq0\end{cases}\Leftrightarrow \mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}}=\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{c}}$	$\begin{cases}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{a}\neq0\end{cases}\Leftrightarrow \boldsymbol{b}'=\boldsymbol{c}'$ 其中 $\boldsymbol{b}'$，$\boldsymbol{c}'$分别为 $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 在与$\boldsymbol{a}$垂直的平面上的射影向量

3. 向量的混合积与双重外积

向量的混合积与双重外积的比较见表 1.4.

表 1.4

	混合积：$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$	双重外积：$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$
定义	$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$	$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$
运算性质	(1) $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=-(\boldsymbol{b},\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})=-(\boldsymbol{c},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a})=-(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{b})$; (2) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$	(1) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$; (2) $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$; (3) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$
坐标表示	$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}$ 其中坐标为右手直角坐标系中的坐标	$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$ $=(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)\{b_1,b_2,b_3\}$ $-(b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3)\{a_1,a_2,a_3\}$ 其中坐标为直角坐标

续表

	混合积:$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$	双重外积:$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$
几何意义	(1) $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=0\Leftrightarrow\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面; (2) 若$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$不共面,$\lvert(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})\rvert$表示以$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$为邻棱的平行六面体的体积,且 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})\begin{cases}>0 & \boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\text{ 构成右手系}\\<0 & \boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\text{ 构成左手系}\end{cases}$	$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}\Leftrightarrow\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$ 或 $\boldsymbol{c}$ 垂直于$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 所在的平面

1.1.2 重要定理与公式

1. 向量的分解定理

定理 1.1 设 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 为二不共线向量,对于任意一个与 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 共面的向量 $\boldsymbol{r}$,存在唯一的一对实数 λ,μ 使得

$$\boldsymbol{r}=\lambda\boldsymbol{e}_1+\mu\boldsymbol{e}_2 \tag{1.2}$$

定理 1.2 设 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$ 为三个不共面向量,对于空间中的任意一个向量 $\boldsymbol{r}$,存在唯一的一组实数 λ,μ,ν 使得

$$\boldsymbol{r}=\lambda\boldsymbol{e}_1+\mu\boldsymbol{e}_2+\nu\boldsymbol{e}_3 \tag{1.3}$$

向量的分解定理为标架与坐标的定义提供了理论根据,阐述了在怎样的几何条件下一个向量可以由其余向量线性表示,是研究空间中几何体内部关系的重要理论基础.

2. 共线的等价命题

定理 1.3 已知非零向量 $\boldsymbol{a}=\{a_1,a_2,a_3\},\boldsymbol{b}=\{b_1,b_2,b_3\}$,那么下列条件是等价的:

(1) $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$.

(2) 存在不全为零的实数 λ,μ 使得

$$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$$

(3) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

(4) $a_1:b_1=a_2:b_2=a_3:b_3$.

(5) $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a},\lambda\neq 0$.

定理 1.4 设有三点 $P_i=\{x_i,y_i,z_i\}(i=1,2,3)$,那么下列条件是等价的:

(1) P_1,P_2,P_3 三点共线.

(2) $\overrightarrow{P_1P_2}\parallel\overrightarrow{P_1P_3}$.

(3) $(x_2-x_1):(y_2-y_1):(z_2-z_1)=(x_3-x_1):(y_3-y_1):(z_3-z_1)$.

3. 共面的等价命题

定理 1.5　已知非零向量 $\boldsymbol{a}=\{a_1,a_2,a_3\},\boldsymbol{b}=\{b_1,b_2,b_3\},\boldsymbol{c}=\{c_1,c_2,c_3\}$，那么下列条件是等价的：

(1) $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面.

(2) 存在不全为零的实数 λ,μ,ν 使得

$$\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\nu\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$$

(3) $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=0$.

(4) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=0$.

(5) 如果 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线，存在不全为零的实数 λ,μ 使得

$$\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$$

定理 1.6　设有四点 $P_i=\{x_i,y_i,z_i\}(i=1,2,3,4)$，那么下列条件是等价的：

(1) P_1,P_2,P_3,P_4 四点共面.

(2) $\overrightarrow{P_1P_2},\overrightarrow{P_1P_3},\overrightarrow{P_1P_4}$ 共面.

(3) $\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}=0$.

4. 两个向量垂直的等价命题

定理 1.7　已知非零向量 $\boldsymbol{a}=\{a_1,a_2,a_3\},\boldsymbol{b}=\{b_1,b_2,b_3\}$，那么下列条件是等价的：

(1) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

(2) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

(3) $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$.

5. 与度量性质相关的重要公式

设 $P_i(x_i,y_i,z_i)(i=1,2,3,4)$ 是空间中的四点，则有：

(1) 距离

$$|\overrightarrow{P_1P_2}|=\sqrt{\overrightarrow{P_1P_2}^2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \tag{1.4}$$

(2) 夹角

$$\cos\angle(\overrightarrow{P_1P_2},\overrightarrow{P_1P_3})=\frac{\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\overrightarrow{P_1P_3}}{|\overrightarrow{P_1P_2}||\overrightarrow{P_1P_3}|}$$

$$=\frac{(x_2-x_1)(x_3-x_1)+(y_2-y_1)(y_3-y_1)+(z_2-z_1)(z_3-z_1)}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}}$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{(x_3-x_1)^2+(y_3-y_1)^2+(z_3-z_1)^2}} \tag{1.5}$$

(3) 三角形的面积

$$S_{\triangle P_1P_2P_3}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{P_1P_2}\times\overrightarrow{P_1P_3}|$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix}y_2-y_1 & z_2-z_1\\ y_3-y_1 & z_3-z_1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}z_2-z_1 & x_2-x_1\\ z_3-z_1 & x_3-x_1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1\end{vmatrix}^2} \tag{1.6}$$

(4) 四面体的体积

$$V_{P_1-P_2P_3P_4}=\frac{1}{6}|(\overrightarrow{P_1P_2},\overrightarrow{P_1P_3},\overrightarrow{P_1P_4})|$$

$$=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1\end{matrix}\right\| \tag{1.7}$$

1.2 典型例题分析与讲解

1.2.1 向量代数式的变形问题

利用向量法解决几何问题时，首先应将几何问题转化为向量代数式 (由向量及其运算构成的式子)，根据向量各种运算定义与性质对代数式进行变形，变形为具有明显几何意义的代数式．所以向量代数式变形问题是利用代数方法解决几何问题的关键，这属于代数中的运算问题．

常见的题型有：

① 向量代数式的化简与求解问题；

② 含有向量的等式或者不等式的证明与判断问题.

常用的解决方法：将向量的复合运算逐步分解成基本运算，根据基本运算的定义及运算性质进行化简或等价表示.

例 1.1　设向量 $\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{b}$ 垂直，向量 $\boldsymbol{c}$ 与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 两个向量的夹角都是 $60°$，并且 $|\boldsymbol{a}|=1,|\boldsymbol{b}|=2,|\boldsymbol{c}|=3$，计算：

(1) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$.　(2) $(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c})$.　(3) $[(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a})]^2$.

解　(1) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2+2\boldsymbol{ab}}=\sqrt{1+4+0}=\sqrt{5}$.

(2)
$$\begin{aligned}(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c})&=3\boldsymbol{ab}-9\boldsymbol{ac}-2\boldsymbol{b}^2+6\boldsymbol{bc}\\&=0-9\times3\times1\times\cos 60°-2\times4\\&\quad+6\times2\times3\times\cos 60°\\&=-\frac{27}{2}-8+18=-\frac{7}{2}.\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}[(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a})]^2&=[3(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})]^2=9|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2\\&=9\left||\boldsymbol{a}|\times|\boldsymbol{b}|\sin\frac{\pi}{2}\right|^2=36.\end{aligned}$$

例 1.2　证明下列各题.

(1) $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d},\boldsymbol{b}-\boldsymbol{d},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{abc})-(\boldsymbol{abd})+(\boldsymbol{acd})-(\boldsymbol{bcd})$.

(2) $\boldsymbol{a}\times[\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$.

(3) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{abc})^2$.

证明　(1)
$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d},\boldsymbol{b}-\boldsymbol{d},\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d})&=[(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{d})\times(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{d})]\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d})\\&=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{d}-\boldsymbol{d}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{d})\\&=(\boldsymbol{abc})-(\boldsymbol{adc})-(\boldsymbol{dbc})-(\boldsymbol{abd})\\&=(\boldsymbol{abc})-(\boldsymbol{abd})+(\boldsymbol{acd})-(\boldsymbol{bcd}).\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times[\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})]&=\boldsymbol{a}\times[(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{d}]\\&=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}).\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})&=[(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{abc})\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\\&=(\boldsymbol{abc})\cdot(\boldsymbol{bca})=(\boldsymbol{abc})^2.\end{aligned}$$

例 1.3　下列式子或结论是否正确.

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^2$.

(2) $\boldsymbol{a}^2=|\boldsymbol{a}|^2$.

(3) $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}$.

(4) 若 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0},\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$.

(5) $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$.

(6) $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2$.

(7) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

(8) $|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})|\geqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|$.

分析与解 式 (2) 与式 (7) 是正确的，其他式子或结论均不正确.

判断一个向量代数式是否正确，可首先判断等式两端的结果属性是否一致. 如式 (1) 左边是两个向量的向量积，结果为向量，而右边是向量模的平方，结果是数量，显然不等. 如果等式两端的结果属性一致，再分别化简变形比较. 如式 (3) 等式左端是与 $\boldsymbol{a}$ 共线的向量，右端是与 $\boldsymbol{b}$ 共线的向量，所以不等. 再如式 (5)，等式左端是与 $\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面的向量，而右端是与 $\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}$ 共面的向量，所以不等. 对于式 (4)，由于 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}\Longleftrightarrow\boldsymbol{a}\,/\!/\,\boldsymbol{b}$，所以当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0},\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，但 $\boldsymbol{a}\,/\!/\,\boldsymbol{b}$ 时，仍然有 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$. 式 (6) 是错误的，其原因是

$$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2\cos\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\leqslant|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2=\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2$$

式 (8)是错误的，其原因是

$$|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})|=|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}|\leqslant|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}||\boldsymbol{c}|$$

上式的几何意义为：在以三个不共面的长度固定的向量为邻棱的平行六面体中，长方体的体积最大.

解决此类问题的关键是要熟练掌握向量的各种运算的定义与运算规律，特别要注意理解向量与数量运算的区别 (表 1.3).

1.2.2 共线、共面及垂直等位置关系问题

常见的题型有：

① 三点共线、三线共点及两个向量的共线问题；

② 四点共面及三个向量共面的问题；

③ 线线、线面、面面及两个向量垂直的问题.

常用的解决方法：三点共线、三线共点的证明最终转化为两个向量的共线问题，利用定理 1.4 来解决；四点共面问题最终转化为三个向量的共面问题，利用定理 1.6 来解决；线线、线面及两个向量垂直的问题最终转化为两个向量的垂直问题，利用定理 1.7 来解决.

例 1.4 设两个向量 $\boldsymbol{e}_1$ 与 $\boldsymbol{e}_2$ 不共线，试确定 k 的值，使得 $\boldsymbol{a}=k\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$ 与 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_1+k\boldsymbol{e}_2$ 两个向量共线.

解法一 由于 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 均是非零向量，从而

$$a /\!/ b \Longleftrightarrow \exists\lambda \text{ 使 } a = \lambda b$$

亦即

$$ke_1 + e_2 = \lambda(e_1 + ke_2)$$

整理得

$$(k-\lambda)e_1 + (1-\lambda k)e_2 = 0$$

由于 $e_1 /\!\!\!/ e_2$，从而

$$\begin{cases} k-\lambda = 0 \\ 1-\lambda k = 0 \end{cases}$$

解得 $k=\pm 1$，所以当 $k=1$ 或 $k=-1$ 时，a 与 b 共线.

解法二　由题意得

$$a /\!/ b \Longleftrightarrow \text{存在不全为零的实数 } \lambda, \mu \text{ 使 } \lambda a + \mu b = 0$$

即

$$\lambda(ke_1 + e_2) + \mu(e_1 + ke_2) = 0 \Longleftrightarrow (\lambda k + \mu)e_1 + (\lambda + \mu k)e_2 = 0$$

由于 $e_1 /\!\!\!/ e_2$，从而

$$\begin{cases} \lambda k + \mu = 0 \\ \lambda + \mu k = 0 \end{cases}$$

由于 λ, μ 不全为零，从而

$$\lambda : (-\mu) = 1 : k = k : 1$$

解得 $k=\pm 1$.

解法三　取定标架 $[O; e_1, e_2]$，于是

$$a = \{k, 1\}, \quad b = \{1, k\}$$

而

$$a /\!/ b \Longleftrightarrow \frac{k}{1} = \frac{1}{k} \Longleftrightarrow k = \pm 1$$

例 1.5　试证明：三角形的三条中线共点.

证法一（向量法）　如图 1.1 所示，$\triangle ABC$ 中的点 D, E, F 分别为边 BC, AC 与 AB 上的中点，设中线 AD, BE 交于 O 点，下证中线 CF 经过 O 点，即证明 C, O, F 三点共线.

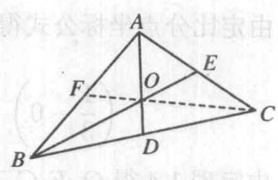

图1.1

根据题意得

$$\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{CB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{CB}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})$$
$$=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}+\frac{1}{3}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})$$
$$=\frac{1}{3}(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA})$$

又由

$$\overrightarrow{CF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA})$$

从而 $2\overrightarrow{CF}=3\overrightarrow{CO}$，即 O,F,C 三点共线.

证法二 (向量法)

$$\overrightarrow{OF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}-\frac{2}{3}\overrightarrow{BE}\right)=-\frac{1}{3}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE})$$
$$=-\frac{1}{3}\left[\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})+\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})\right]$$
$$=-\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC})$$
$$=\frac{1}{6}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})$$

又由

$$\overrightarrow{CF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA})$$

从而 $\overrightarrow{CF}=3\overrightarrow{OF}$，即 O,F,C 三点共线.

证法三 (坐标法) 建立平面仿射标架 $[B;\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}]$，于是

$$B(0,0),\quad C(1,0),\quad A(0,1),\quad D\left(\frac{1}{2},0\right),\quad E\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\quad F\left(0,\frac{1}{2}\right)$$

而且

$$\overrightarrow{BO}=2\overrightarrow{OE}$$

由定比分点坐标公式得 $O\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$，于是

$$\left(\frac{1}{3}-0\right):\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)=\left(1-\frac{1}{3}\right):\left(0-\frac{1}{3}\right)=2:(-1)$$

由定理 1.4 得 O,F,C 三点共线.