

北京名师导学丛书

北京电视台讲座用书
中国教育电视台讲座用书

高中代数

知识要点 专题解析

明知白 主编

专题讲解

专题测试

试题详解

知识扩展

九洲图书出版社

中国教育电视台讲座用书
北京电视台讲座用书

高中代数

知识要点专题解析

主编 明知白（北京东城教研中心 特级教师）
编者 储瑞年 蒋佩锦 薛川坪 明知白

九洲图书出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中代数知识要点专题解析/明知白等编著. —北京:九洲图书出版社, 1998. 1

(北京名师导学)

ISBN 7-80114-233-0

I. 高… II. 明… III. 代数课-高中-教学参考资料 IV. G634.623

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 00401 号

高中代数知识要点专题解析

明知白 主编

*

九洲图书出版社出版

(地址:北京市车公庄大街 6 号市委党校 2 号楼

邮编:100044 电话:010 68366742)

新华书店发行

北京市京东印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 10.375 字数 220 千字

1998 年 1 月第 1 版 1998 年 1 月第 1 次印刷

印数 1—20,000 册

ISBN 7-80114-233-0/G · 96

定价:13.50 元

版权所有 翻印必究

如发现印、装质量问题,影响阅读请与九洲图书出版社联系调换

《北京名师导学——知识要点专题解析》

编 委 会

主 任 王绍宗（首都师大附属育新学校校长 特级教师）

柴永广（中国教育电视台台长）

编 委 徐锦培（中国教育电视台节目部 主任）

郭和平（中国教育电视台节目部 编导）

王俊鸣（北京十二中 特级教师）

明知白（北京东城区教研中心 特级教师）

王维翰（北京教科院教研中心 特级教师）

程耀尧（北京教育学院丰台分院 特级教师）

杨子坤（北师大附中 特级教师）

赵如云（北京四中 特级教师）

赵景瑞（北京崇文区教研中心 特级教师）

吕 坚（北京教育学院崇文分院 特级教师）

总策划 刘 强（北京艺豪语言教育中心 主任）

作者简介

明知白——北京东城区教研中心, 特级教师(详细介绍见封底)。

储瑞年, 1941 年生, 1963 年毕业于北京师范大学数学系。现任北师大实验中学高级教师, 是北京市与西城区学科带头人, 中国数学会《数学通报》编委。



长期在重点中学任教, 成绩显著。参与编写的著作有《中国中学数学百科全书·数学卷》、《高中数学总复习》、《中学教师实用数学辞典》、《高中数学课外练习》、《名师导学·数学》等书。曾多次在北京电视台及中国教育电视台做《复习时间》、《专题讲座》等电视讲座, 他的事迹被收录在《中国名师大典》中。



蒋佩锦, 1963 年毕业于北京师范大学数学系, 1988 年评为中学高级教师, 现任北京五中数学教师, 是东城区学科带头人, 并兼任北京市中学数学学科兼职教研员, 北京数学会理事。

至今已出版《名师授课录》、《名师导学》、《三角恒等式证明》、《高中数学 88 讲》等 40 余部专著, 在各种报刊上发表了 50 余篇专题文章, 并有十余篇教科讲论文在北京市或东城区获奖, 还多次为北京电视台、中国教育电视台、辽宁电视台做有关数学总复习的专题电视讲座。



薛川坪,中学数学高级教师,从教三十余年,现任教于北京五中,任北京五中数学教研组长,东城区教科研中心兼职教研员,东城区数学学科带头人。多年来参加北京市、东城区教科研活动,是国家教委“九五”科研课题“教育与发展”中学数学课题组负责人之一,主要著作有《初等数学解题思路》、《高中数学解难释疑》、《高中数学精讲与解析》、《高考考试说明例释与训练》、《学好数学的金钥匙》等。

编写说明

《北京名师导学——知识要点专题解析》丛书,依据教学大纲和考纲,归纳总结本阶段本学科所学知识的重点、难点、疑点及考点,从众多的知识点中选择出知识要点(疑难点及考点),分专题进行分析讲解,同时说明该知识点与其它相关知识的联系与区别。通过对典型例题的分析、讲解,达到教会学生解决该类问题的方法、技巧。使学生从题海中解脱出来,变应试教育为素质教育,提高学生运用知识的能力。

在丛书编写过程中,各学科遵循统一的编写体例,同时针对每个学科的特点有所变化。每个专题的设立,分别从专题讲解、专题测试、试题详解、知识扩展等方面进行讲解、剖析、辨异,力求把每个专题全面精确地进行讲解。

本套丛书吸取目前畅销教辅书的优点,把知识点、考点、测试点有机地结合在一起,由特级教师和权威人士亲自编写、主讲,是一套集知识性、实用性、科学性于一体的小型学习工具书。

编委会

《丛书》编委会

目 录

专题 1 集合及其应用	(1)
专题 2 函数的概念、图象和性质	(11)
一、函数的概念	(11)
二、函数的图象和性质	(17)
专题 3 二次函数	(40)
一、二次函数的解析式	(40)
二、二次函数的图象和性质	(43)
三、二次函数的应用	(48)
专题 4 幂函数、指数函数和对数函数	(60)
一、指数式和对数式的计算和化简	(60)
二、幂函数、指数函数和对数函数的定义、图象和性质	(62)
三、指数方程和对数方程	(69)
专题 5 三角公式的理解与运用	(81)
一、重视对公式结构形式和功能的认识	(81)
二、掌握某些公式的变形形式	(83)
三、注意公式的反用	(84)
四、仔细辨析有关三角函数的正负号	(86)
专题 6 三角式的化简、求值和证明	(93)
一、三角式的化简	(93)
二、三角式的求值	(96)
三、三角式的证明	(102)
专题 7 三角函数的图象和性质	(109)
一、重视把性质研究与三角变换结合起来	(109)

- 二、以三角函数线、三角函数的图象为依据,发展数形结合的思想 (114)
- 三、重视有关的应用性问题 (119)

(以上为高一年级用)

专题 8 不等式的解法及应用 (131)

- 一、等价转化是解不等式的基本思路 (131)
- 二、用好分类讨论是解字母系数不等式的主要课题 (134)
- 三、解不等式的应用举例 (139)

专题 9 不等式证明 (149)

- 一、重视对方法的理解和选用 (149)
- 二、加强对各种方法的综合运用 (153)
- 三、不等式证明的方法综合运用举例 (156)

专题 10 等差数列与等比数列 (165)

- 一、等差数列、等比数列的判断与证明 (165)
- 二、等差数列、等比数列有关公式的使用及方程的思想 (167)
- 三、等差数列、等比数列性质的运用 (170)
- 四、等差、等比数列综合问题 (171)
- 五、等差、等比数列应用问题 (177)

专题 11 归纳、猜想、证明 (185)

专题 12 复数的概念和运算 (198)

- 一、复数及其有关概念 (198)
- 二、与复数运算有关的问题 (204)

(以上为高二年级用)

专题 13 排列与组合 (221)

专题 14 函数的最值问题 (233)

- 一、关于函数最值问题的几点说明 (233)

二、求一元函数最值的常用方法	(236)
三、求二元函数最值的常用方法	(243)
四、三角与复数中的最值问题	(249)
五、解析几何中的最值问题	(255)
六、应用题中的最值问题	(261)
专题 15 函数与不等式的综合问题	(274)
专题 16 数列综合问题	(298)
一、方程思想在解数列问题中的运用	(298)
二、函数思想在解数列问题中的运用	(301)
三、提高理解和运用数学语言的能力	(304)
四、数列求和与数列的极限	(307)
五、等差、等比数列应用问题	(313)

(以上为高三年级用)

专题1 集合及其应用

【专题讲解】

集合是现代数学的基本概念,是应用广泛的数学语言.明确元素与集合的关系及其两个基本特征(确定性——对于任何一个给定的集合 A 和元素 a , $a \in A$ 与 $a \notin A$ 二者必居其一,二者仅居其一;互异性——每一集合中的任意两个元素都互不相同),是讨论集合的有关概念及运算的基础.集合的交、并、补运算与逻辑关系中的且、或、非紧密相连,对深刻理解各种数量关系及图形关系具有十分重要的基础作用.

列举法和描述法是集合的两种表示方法,其中描述法表示集合 $X = \{x | P(x)\}$,具有两个基本特征:纯粹性——凡属于集合 X 的任何一个元素 x ,都具有性质 $P(x)$;完备性——凡具有性质 $P(x)$ 的任何一个元素 x 都属于集合 X .

文氏图是表示子集、交集、并集、补集等概念的有效方式,对处理集合的关系和运算十分有用.

例1 集合 $X = \{x | x = 2m, m \in \mathbb{Z}\}$, $Y = \{y | y = 4n \pm 2, n \in \mathbb{Z}\}$, 则 X 与 Y 的关系是().

(A) $X \subset Y$

(B) $X \supset Y$

(C) $X = Y$

(D) $X \cap Y = \emptyset$ ①

分析一 令 $m = -2, -1, 0, 1, 2, \dots$, 可知 $X = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$;

令 $n = -2, -1, 0, 1, 2, \dots$, 可知 $Y = \{\dots, -10, -6, -2, 2, 6, 10, \dots\}$.

可以看出 $X \supset Y$, 因此选(B).

分析二 X 是全体偶数组成的集合, Y 是除4的倍数以外的偶数组成的集合,故 $X \supset Y$.

① 本书中的选择题都是“四选一”型的,代号为A、B、C、D的结论中,有且仅有一个正确.

分析三 当 $m=2n$ (m 是偶数) 时, $x=4n \in Y$, 当 $m=2n-1$ 或 $m=2n+1$ (m 是奇数) 时, $x=4n-2$ 或 $x=4n+2$, 可知集合 Y 是由集合 X 中 m 取奇数时的元素组成的集合, 故 $X \supset Y$.

说明 判定两个集合的包含关系或相等关系, 可以归结为元素与集合的关系, 也可以从分析元素的分类或集合的结构来得出结论.

例2 设全集 $I = \mathbb{R}$, 集合 $A = \{x | x^2 - |x| - 2 = 0\}$, $B = \{x | 3x^4 + 5x^3 - 2x^2 = 0\}$, 求 $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cap \bar{B}$, $\bar{A} \cap B$.

解 $A = \{x | |x|^2 - |x| - 2 = 0\} = \{x | |x| = 2 \text{ 或 } |x| = -1\} = \{x | |x| = 2\} \cup \{x | |x| = -1\} = \{-2, 2\} \cup \emptyset = \{-2, 2\}$.

$$B = \{x | x^2(3x^2 + 5x - 2) = 0\} = \{0, -2, \frac{1}{3}\}.$$

$$\therefore A \cup B = \{-2, 0, \frac{1}{3}, 2\}, A \cap B = \{-2\}.$$

$$A \cap \bar{B} = \{2\}, \bar{A} \cap B = \{0, \frac{1}{3}\}.$$

说明 按照元素与集合的关系的互异性的要求, 方程 $3x^4 - 5x^3 - 2x^2 = 0$ 的解集 B 应是 $\{0, -2, \frac{1}{3}\}$, 而不能写成 $\{0, 0, -2, \frac{1}{3}\}$.

例3 设方程 $x^2 - px + q = 0$ 的解集是 A , 方程 $x^2 + qx + p = 0$ 的解集是 B , 且 $A \cap B = \{2\}$, 则 $A \cup B = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 由 $A \cap B = \{2\}$ 可知: 2 是两方程的公共根, 因此

$$\begin{cases} 4 - 2p + q = 0, \\ 4 + 2q + p = 0. \end{cases} \quad \text{解得} \begin{cases} p = \frac{4}{5}, \\ q = -\frac{12}{5}. \end{cases}$$

方程 $x^2 - \frac{4}{5}x - \frac{12}{5} = 0$ 的另一根是 $-\frac{6}{5}$; 方程 $x^2 - \frac{12}{5}x + \frac{4}{5} = 0$ 的另一根是 $\frac{2}{5}$, 故 $A \cup B = \{2, -\frac{6}{5}, \frac{2}{5}\}$.

例4 设全集 $I = \mathbb{R}$. 集合 $A = \{x | (x-1)(x-3) \leq 0\}$, $B = \{x | (x-1)(x-a) < 0\}$ 且 $A \supseteq B$. 求实数 a 的取值范围.

解 不等式 $(x-1)(x-3) \leq 0$ 可化为

$$(I) \begin{cases} x-1 \leq 0, \\ x-3 \geq 0; \end{cases} \text{ 或 } (II) \begin{cases} x-1 \geq 0, \\ x-3 \leq 0. \end{cases}$$

不等式组(I)的解集是空集 $\emptyset$, 不等式组(II)的解集是 $\{x | 1 \leq x \leq 3\}$, 故 $A = \{x | 1 \leq x \leq 3\}$.

同理可得:

当 $a < 1$ 时, 不等式 $(x-1)(x-a) < 0$ 的解集 $B = \{x | a < x < 1\}$, 此时 $A \supseteq B$ 不成立;

当 $a = 1$ 时, 不等式 $(x-1)(x-a) < 0$ 的解集 $B = \emptyset$, 此时 $A \supseteq B$ 成立;

当 $a > 1$ 时, 不等式 $(x-1)(x-a) < 0$ 的解集 $B = \{x | 1 < x < a\}$, 由 $A \supseteq B$ 和 $1 < a \leq 3$.

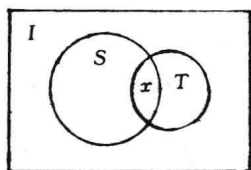
综上所述, a 的取值范围是 $1 \leq a \leq 3$.

说明 处理含字母系数的不等式的解集及解集之间的关系时, 要对字母系数进行分类讨论.

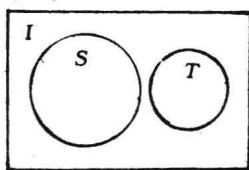
例5 设 S, T 是两个非空集合, 且 $S \not\subseteq T, T \not\subseteq S, X = S \cap T$, 则 $S \cup X$ 等于().

分析一 由 $X = S \cap T \subseteq S$, 可知 $S \cup X = S$, 因此选(D).

分析二 由于 S, T 是非空集合, $S \not\subseteq T, T \not\subseteq S$, 用文氏图表示 S, T 有两种可能的情况(如图1-1).



甲



乙

图1-1

在图甲中, $X = S \cap T \neq \emptyset$, 这时 $S \cup X = S$. 在图乙中 $X = S \cap T = \emptyset$, 这时 $S \cup X = S$ 仍成立. 因此选(D).

说明 对于未给出具体元素的集合, 用文氏图讨论集合的关系具有化抽象为具体的功能, 是一种有效的解题方法.

例6 已知在直角坐标平面上,集合 A 是以原点 O 为圆心,半径 $r=1$ 的圆及其内部的点集,集合 $B=\{(x,y)| |x|\leq a, |y|\leq a, a>0\}$. 实数 a 分别在什么范围内取值时, (1) $A\subset B$; (2) $A\supset B$.

解 点集 B 是由四条直线 $x=-a, x=a, y=-a, y=a$ 所围成的正方形及其内部.

如图 1—2, 当圆 O 位于正方形内部时, $A\subset B$, 正方形最小应是圆 O 的外切正方形, 故 $a\geq 1$.

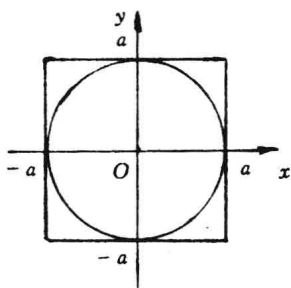


图 1—2

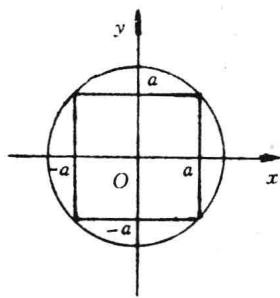


图 1—3

如图 1—3, 当正方形位于圆 O 内部时, $A\supset B$, 正方形最大应是圆 O 的内接正方形, 故 $0<a\leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

说明 直角坐标平面上的直线、曲线及区域是常见的一种点集, 利用图形的直观性可有助于分析与解决点集及点集之间的关系问题.

例7 设全集 $I=\{\text{小于 } 10 \text{ 的自然数}\}$, 集合 A, B 满足 $A\cap B=\{2\}$, $\overline{A}\cap B=\{4, 6, 8\}$, $\overline{A}\cap \overline{B}=\{1, 9\}$, 求集合 A, B .

解 由 $A\cap B=\{2\}$, $\overline{A}\cap \overline{B}=\{1, 9\}$ 可知:

$2\in A, 2\in B; 1, 9\notin A, 1, 9\notin B$.

由 $\overline{A}\cap B=\{4, 6, 8\}$ 可知: $4, 6, 8\notin A, 4, 6, 8\in B$.

假设 $3, 5, 7\in B$, 则由确定性可知:

$3, 5, 7\in A\cap B$, 或 $3, 5, 7\in \overline{A}\cap B$.

均与已知矛盾, 故 $3, 5, 7\notin B$.

假设 $3, 5, 7\notin A$, 则由确定性可知:

$3, 5, 7 \in \overline{A} \cap B$ 或 $3, 5, 7 \in \overline{A} \cap \overline{B}$,

均与已知矛盾, 故 $3, 5, 7 \in A$.

综上所述, $A = \{2, 3, 5, 7\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$.

例 8 设 $A = \{-4, 2a-1, a^2\}$, $B = \{9, a-5, 1-a\}$. 已知 $A \cap B = \{9\}$, 求 a 的值.

解 $\because A \cap B = \{9\}$.

$\therefore 9 \in A$. 即 $2a-1=9$, 或 $a^2=9$.

若 $2a-1=9$, 则 $a=5$. 这时 $A = \{-4, 9, 25\}$, $B = \{9, 0, -4\}$, $A \cap B = \{-4, 9\}$, 与已知矛盾.

若 $a^2=9$, 则 $a = \pm 3$. 当 $a=3$ 时, $A = \{-4, 5, 9\}$, $B = \{-2, -2, 9\}$, B 中两个元素都是 -2 , 与互异性矛盾, 当 $a=-3$ 时, $A = \{-4, -7, 9\}$, $B = \{9, -8, 4\}$ 符合题意.

综上所述 $a = -3$.

说明 判定元素与集合的关系, 确定元素或集合时, 必须符合确定性和互异性的要求.

【专题测试】

1. 选择题

(1) 已知 I 是全集, M, N 是非空子集, 且 $M \subset N$, 则必为空集的是().

(A) $M \cap N$ (B) $\overline{M} \cap N$

(C) $M \cap \overline{N}$ (D) $\overline{M} \cap \overline{N}$

(2) 数集 $X = \{x | x = 2m + 1, m \in \mathbb{Z}\}$, $Y = \{y | y = 4n \pm 1, n \in \mathbb{Z}\}$, 则 X 与 Y 的关系是()

(A) $X \subset Y$ (B) $X \supset Y$

(C) $X = Y$ (D) $X \cap Y = \emptyset$

(3) 设全集 $I = \mathbb{R}$, $A = \{x | x \leq -3, \text{ 或 } x \geq 2\}$, $B = \{x | -1 < x < 5\}$, 则集合 $\{x | -1 < x < 2\}$ 等于()

(A) $\overline{A} \cap B$ (B) $\overline{A \cup B}$

(C) $\overline{A} \cup \overline{B}$ (D) $A \cap B$

- (4) 图 1-4 中的阴影部分可由集合 M, P, Q 表示为()

- (A) $M \cup (P \cup Q)$
 (B) $M \cap (P \cup Q)$
 (C) $M \cup (P \cap Q)$
 (D) $M \cap (P \cap Q)$

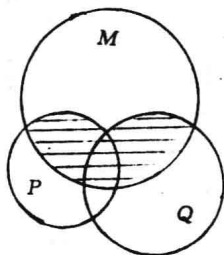


图 1-4

- (5) 设全集为 I , 则用阴影部分表示集合 $P \cap (\overline{M \cup Q})$ 的是()

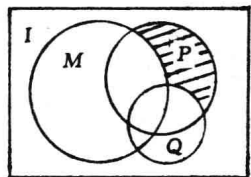
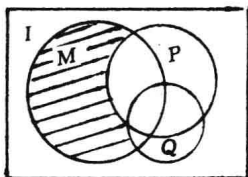
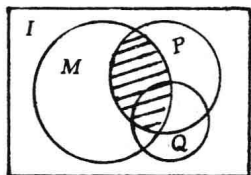
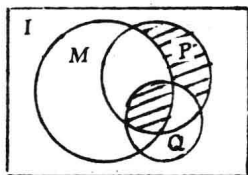


图 1-5

- (6) 设集合 $M = \{(x, y) | 3x - 2y = -1\}$, $N = \{(x, y) | 5x + 3y = 11\}$, 则 $M \cap N$ 等于()
- (A) $(1, 2)$ (B) $\{1, 2\}$
 (C) $\{(1, 2)\}$ (D) $\emptyset$
- (7) 设全集 $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $P \cup Q = I$, $P \cap Q = \{1, 2\}$, 则 $(P \cup Q) \cap (\overline{P} \cup \overline{Q})$ 等于()
- (A) $\{1, 2, 3\}$ (B) $\{1, 4, 5\}$
 (C) $\{2, 3, 4\}$ (D) $\{3, 4, 5\}$
- (8) 设集合 $M = \{y | y = 3 - x^2, x \in \mathbb{R}\}$, $N = \{y | y = 2x^2 - 1, x \in \mathbb{R}\}$

$\in R$ }, 则 $M \cap N$ 等于()

(A) $\{y | -1 \leq y \leq 3\}$ (B) $\{y | -3 \leq y \leq 1\}$

(C) $\{\frac{2\sqrt{3}}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\}$ (D) $\{(\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{5}{3}), (-\frac{2\sqrt{3}}{3}, \frac{5}{3})\}$

2. 填空题

(1) 已知 $I = \{\text{小于9的自然数}\}$, $A = \{3, 4, 5\}$, $B = \{4, 7, 8\}$, 则 $\overline{A \cup B} =$ _____, $\overline{A \cap B} =$ _____, $\overline{A \cup B} =$ _____, $\overline{A \cap B} =$ _____.

(2) 已知 $a < 0$, 则方程 $x^2 - 2ax - 3a^2 = 0$ 的解集是 _____, 不等式 $x^2 - 2ax - 3a^2 < 0$ 的解集是 _____.

(3) 设 $A = \{x | x + 4 > 0\}$, $B = \{x | x - 3 < 0\}$, $C = \{x | x + 4 < 0\}$, $D = \{x | x - 3 > 0\}$, 则不等式 $x^2 + x - 12 < 0$ 的解集是 _____, 不等式 $x^2 + x - 12 > 0$ 的解集是 _____.

(4) 60 的正因数组成的集合是 _____.

(5) $x^6 - y^6$ 的因式组成的集合是 _____.

(6) 方程 $x^2 - px + q = 0$ 的解集是 A , 方程 $x^2 + qx + p = 0$ 的解集是 B , 且 $A \cap B = \{1\}$, 则 $p =$ _____, $q =$ _____, $A \cup B =$ _____.

(7) 设 $A = \{(x, y) | x^2 - y^2 = 3\}$, $B = \{(x, y) | 2x + y = 3\}$, 则 $A \cap B =$ _____.

(8) 设 $A = \{(x, y) | y = -3x + 1, x \in R\}$, $B = \{(x, y) | y = (2 - k^2)x + 3, x \in R\}$, 且 $A \cap B \neq \emptyset$, 则 k 的取值范围是 _____.

3. 已知 $A = \{x | \begin{cases} 2x - 1 > 0, \\ 3x - 4 < 0 \end{cases}\}$, $B = \{x | (x - \frac{1}{2})(x - a) < 0\}$. 并且 $A \subset B$, 求实数 a 的取值范围.

4. 设 $A = \{x | x = 2n, n \in N\}$, $B = \{x | x = 3n - 1, n \in N\}$, 把集合 $A \cap B$ 中的元素按照从小到大的顺序排列, 求其中的第 9 个元素.

5. 集合 $A = \{2, 4, a^3 - 2a^2 - a + 7\}$, $B = \{-4, a + 3, a^2 - 2a + 2, a^3 + a^2 + 3a + 7\}$, 已知 $A \cap B = \{2, 5\}$, 则 a 的值及 $A \cup B$.