北京名师导学丛书

北京电视台讲座用书

中国教育电视台讲座用书

高中代数

知识要点专题解析

明知白 主编

专题讲解　专题测试　试题详解　知识扩展

九洲图书出版社

中国教育电视台讲座用书
北京电视台讲座用书

高中代数
知识要点专题解析

主编 明知白（北京东城教研中心 特级教师）
编者 储瑞年 蒋佩锦 薛川坪 明知白

九洲图书出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中代数知识要点专题解析/明知白等编著.—北京:九洲图书出版社,1998.1

(北京名师导学)

ISBN 7-80114-233-0

Ⅰ.高… Ⅱ.明… Ⅲ.代数课-高中-教学参考资料 Ⅳ.G634.623

中国版本图书馆CIP数据核字(98)第00401号

高中代数知识要点专题解析

明知白 主编

*

九洲图书出版社出版

(地址:北京市车公庄大街6号市委党校2号楼

邮编:100044 电话:010 68366742)

新华书店发行

北京市京东印刷厂印装

*

开本850×1168 1/32 印张10.375 字数220千字

1998年1月第1版 1998年1月第1次印刷

印数 1—20,000册

ISBN 7-80114-233-0/G·96

定价:13.50元

《北京名师导学——知识要点专题解析》

编　委　会

作 者 简 介

明知白——北京东城区教研中心，特级教师(详细介绍见封底)。

储瑞年，1941 年生，1963 年毕业于北京师范大学数学系。现任北京师大实验中学高级教师，是北京市与西城区学科带头人，中国数学会《数学通报》编委。

长期在重点中学任教，成绩显著。参与编写的著作有《中国中学数学百科全书·数学卷》、《高中数学总复习》、《中学教师实用数学辞典》、《高中数学课外练习》、《名师导学·数学》等书。曾多次在北京电视台及中国教育电视台做《复习时间》、《专题讲座》等电视讲座，他的事迹被收录在《中国名师大典》中。

蒋佩锦，1963 年毕业于北京师范大学数学系，1988 年评为中学高级教师，现任北京五中数学教师，是东城区学科带头人，并兼任北京市中学数学学科兼职教研员，北京数学会理事。

至今已出版《名师授课录》、《名师导学》、《三角恒等式证明》、《高中数学 88 讲》等 40 余部专著，在各种报刊上发表了 50 余篇专题文章，并有十余篇教科研论文在北京市或东城区获奖，还多次为北京电视台、中国教育电视台、辽宁电视台做有关数学总复习的专题电视讲座。

薛川坪，中学数学高级教师，从教三十余年，现任教于北京五中，任北京五中数学教研组组长，东城区教科研中心兼职教研员，东城区数学学科带头人。多年来参加北京市、东城区教科研活动，是国家教委“九五”科研课题“教育与发展”中学数学课题组负责人之一，主要著作有《初等数学解题思路》、《高中数学解难释疑》、《高中数学精讲与解析》、《高考考试说明例释与训练》、《学好数学的金钥匙》等。

编 写 说 明

《北京名师导学——知识要点专题解析》丛书，依据教学大纲和考纲，归纳总结本阶段本学科所学知识的重点、难点、疑点及考点，从众多的知识点中选择出知识要点（疑难点及考点），分专题进行分析讲解，同时说明该知识点与其它相关知识的联系与区别。通过对典型例题的分析、讲解，达到教会学生解决该类问题的方法、技巧。使学生从题海中解脱出来，变应试教育为素质教育，提高学生运用知识的能力。

在丛书编写过程中，各学科遵循统一的编写体例，同时针对每个学科的特点有所变化。每个专题的设立，分别从专题讲解、专题测试、试题详解、知识扩展等方面进行讲解、剖析、辨异，力求把每个专题全面精确地进行讲解。

本套丛书吸取目前畅销教辅书的优点，把知识点、考点、测试点有机地结合在一起，由特级教师和权威人士亲自编写、主讲，是一套集知识性、实用性、科学性于一体的小型学习工具书。

编委会

《丛书》编委会

目　　录

(以上为高一年级用)

(以上为高二年级用)

(以上为高三年级用)

专题1　集合及其应用

【专题讲解】

集合是现代数学的基本概念,是应用广泛的数学语言.明确元素与集合的关系及其两个基本特征(确定性——对于任何一个给定的集合 A 和元素 a,$a\in A$ 与 $a\notin A$ 二者必居其一,二者仅居其一;互异性——每一集合中的任意两个元素都互不相同),是讨论集合的有关概念及运算的基础.集合的交、并、补运算与逻辑关系中的且、或、非紧密相连,对深刻理解各种数量关系及图形关系具有十分重要的基础作用.

列举法和描述法是集合的两种表示方法,其中描述法表示集合 $X=\{x\mid P(x)\}$,具有两个基本特征:纯粹性——凡属于集合 X 的任何一个元素 x,都具有性质 $P(x)$;完备性——凡具有性质 $P(x)$ 的任何一个元素 x 都属于集合 X.

文氏图是表示子集、交集、并集、补集等概念的有效方式,对处理集合的关系和运算十分有用.

例1　集合 $X=\{x\mid x=2m,m\in Z\}$,$Y=\{y\mid y=4n\pm2,n\in Z\}$,则 X 与 Y 的关系是(　　).

(A)　$X\subset Y$　　　　(B)　$X\supset Y$

(C)　$X=Y$　　　　(D)　$X\cap Y=\varnothing$①

分析一　令 $m=-2,-1,0,1,2,\cdots$,可知 $X=\{\cdots,-4,-2,0,2,4,\cdots\}$;

令 $n=-2,-1,0,1,2,\cdots$,可知 $Y=\{\cdots,-10,-6,-2,2,6,10,\cdots\}$.

可以看出 $X\supset Y$,因此选(B).

分析二　X 是全体偶数组成的集合,Y 是除4的倍数以外的偶数组成的集合,故 $X\supset Y$.

---

① 本书中的选择题都是"四选一"型的,代号为A、B、C、D的结论中,有且仅有一个正确.

分析三 当 $m=2n$(m 是偶数)时,$x=4n\notin Y$,当 $m=2n-1$ 或 $m=2n+1$(m 是奇数)时,$x=4n-2$ 或 $x=4n+2$,可知集合 Y 是由集合 X 中 m 取奇数时的元素组成的集合,故 $X\supset Y$.

说明 判定两个集合的包含关系或相等关系,可以归结为元素与集合的关系,也可以从分析元素的分类或集合的结构来得出结论.

例2 设全集 $I=R$,集合 $A=\{x\mid x^2-|x|-2=0\}$,$B=\{x\mid 3x^4+5x^3-2x^2=0\}$,求 $A\cup B$,$A\cap B$,$A\cap\overline{B}$,$\overline{A}\cap B$.

解 $A=\{x\mid |x|^2-|x|-2=0\}=\{x\mid |x|=2$ 或 $|x|=-1\}=\{x\mid |x|=2\}\cup\{x\mid |x|=-1\}=\{-2,2\}\cup\varnothing=\{-2,2\}$.

$B=\{x\mid x^2(3x^2+5x-2)=0\}=\{0,-2,\frac{1}{3}\}$.

$\therefore\quad A\cup B=\{-2,0,\frac{1}{3},2\}$,$A\cap B=\{-2\}$.

$A\cap\overline{B}=\{2\}$,$\overline{A}\cap B=\{0,\frac{1}{3}\}$.

说明 按照元素与集合的关系的互异性的要求,方程 $3x^4-5x^3-2x^2=0$ 的解集 B 应是$\{0,-2,\frac{1}{3}\}$,而不能写成$\{0,0,-2,\frac{1}{3}\}$.

例3 设方程 $x^2-px+q=0$ 的解集是 A,方程 $x^2+qx+p=0$ 的解集是 B,且 $A\cap B=\{2\}$,则 $A\cup B=$ ______.

解 由 $A\cap B=\{2\}$可知:2 是两方程的公共根,因此

$$\begin{cases}4-2p+q=0,\\4+2q+p=0.\end{cases}\quad 解得\begin{cases}p=\dfrac{4}{5},\\q=-\dfrac{12}{5}.\end{cases}$$

方程 $x^2-\frac{4}{5}x-\frac{12}{5}=0$ 的另一根是$-\frac{6}{5}$;方程 $x^2-\frac{12}{5}x+\frac{4}{5}=0$ 的另一根是$\frac{2}{5}$,故 $A\cup B=\{2,-\frac{6}{5},\frac{2}{5}\}$.

例4 设全集 $I=R$.集合 $A=\{x\mid (x-1)(x-3)\leqslant 0\}$,$B=\{x\mid (x-1)(x-a)<0\}$且 $A\supseteq B$.求实数 a 的取值范围.

解 不等式$(x-1)(x-3)\leqslant 0$可化为

(Ⅰ)$\begin{cases} x-1\leqslant 0, \\ x-3\geqslant 0; \end{cases}$或(Ⅱ)$\begin{cases} x-1\geqslant 0, \\ x-3\leqslant 0. \end{cases}$

不等式组(Ⅰ)的解集是空集$\varnothing$,不等式组(Ⅱ)的解集是$\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 3\}$,故$A=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 3\}$.

同理可得:

当$a<1$时,不等式$(x-1)(x-a)<0$的解集$B=\{x\mid a<x<1\}$,此时$A\supseteq B$不成立;

当$a=1$时,不等式$(x-1)(x-a)<0$的解集$B=\varnothing$,此时$A\supseteq B$成立;

当$a>1$时,不等式$(x-1)(x-a)<0$的解集$B=\{x\mid 1<x<a\}$,由$A\supseteq B$和$1<a\leqslant 3$.

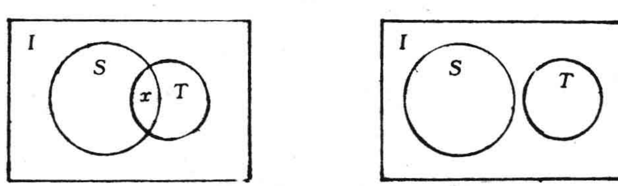
综上可知,a的取值范围是$1\leqslant a\leqslant 3$.

说明 处理含字母余数的不等式的解集及解集之间的关系时,要对字母系数进行分类讨论.

例5 设S,T是两个非空集合,且$S\nsubseteq T$,$T\nsubseteq S$,$X=S\cap T$,则$S\cup X$等于(　　).

分析一 由$X=S\cap T\subseteq S$,可知$S\cup X=S$,因此选(D).

分析二 由于S,T是非空集合,$S\nsubseteq T$,$T\nsubseteq S$,用文氏图表示S,T有两种可能的情况(如图1—1).



甲　　　　乙

图1—1

在图甲中,$X=S\cap T\neq\varnothing$,这时$S\cup X=S$.在图乙中$X=S\cap T=\varnothing$,这时$S\cup X=S$仍成立.因此选(D).

说明 对于未给出具体元素的集合,用文氏图讨论集合的关系具有化抽象为具体的功能,是一种有效的解题方法.

例6 已知在直角坐标平面上，集合 A 是以原点 O 为圆心，半径 $r=1$ 的圆及其内部的点集，集合 $B=\{(x,y)\,|\,|x|\leqslant a,|y|\leqslant a,a>0\}$. 实数 a 分别在什么范围内取值时，(1) $A\subset B$；(2) $A\supset B$.

解 点集 B 是由四条直线 $x=-a,x=a,y=-a,y=a$ 所围成的正方形及其内部.

如图 1—2，当圆 O 位于正方形内部时，$A\subset B$，正方形最小应是圆 O 的外切正方形，故 $a\geqslant 1$.

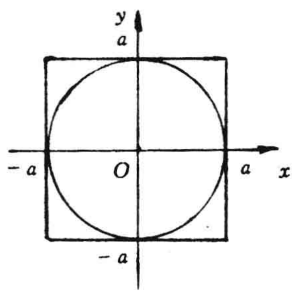


图 1—2

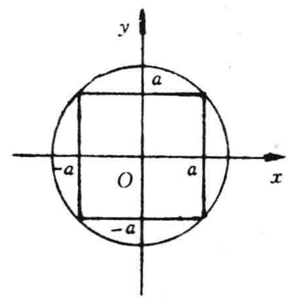


图 1—3

如图 1—3，当正方形位于圆 O 内部时，$A\supset B$，正方形最大应是圆 O 的内接正方形，故 $0<a\leqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

说明 直角坐标平面上的直线、曲线及区域是常见的一种点集，利用图形的直观性可有助于分析与解决点集及点集之间的关系问题.

例7 设全集 $I=\{$小于 10 的自然数$\}$，集合 A,B 满足 $A\cap B=\{2\}$，$\overline{A}\cap B=\{4,6,8\}$，$\overline{A}\cap\overline{B}=\{1,9\}$，求集合 A,B.

解 由 $A\cap B=\{2\}$，$\overline{A}\cap\overline{B}=\{1,9\}$ 可知：

$2\in A,2\in B;1,9\notin A,1,9\notin B$.

由 $\overline{A}\cap B=\{4,6,8\}$ 可知：$4,6,8\notin A,4,6,8\in B$.

假设 $3,5,7\in B$，则由确定性可知：

$3,5,7\in A\cap B$，或 $3,5,7\in\overline{A}\cap B$.

均与已知矛盾，故 $3,5,7\notin B$.

假设 $3,5,7\notin A$，则由确定性可知：

$3,5,7 \in \overline{A} \cap B$ 或 $3,5,7 \in \overline{A} \cap \overline{B}$,

均与已知矛盾,故 $3,5,7 \in A$.

综上可知,$A = \{2,3,5,7\}$,$B = \{2,4,6,8\}$.

例 8 设 $A = \{-4, 2a-1, a^2\}$,$B = \{9, a-5, 1-a\}$.已知 $A \cap B = \{9\}$,求 a 的值.

解 $\because$ $A \cap B = \{9\}$.

$\therefore$ $9 \in A$.即 $2a-1=9$,或 $a^2=9$.

若 $2a-1=9$,则 $a=5$.这时 $A=\{-4,9,25\}$,$B=\{9,0,-4\}$,$A \cap B = \{-4,9\}$,与已知矛盾.

若 $a^2=9$,则 $a=\pm 3$.当 $a=3$ 时,$A=\{-4,5,9\}$.$B=\{-2,-2,9\}$,B 中两个元素都是 -2,与互异性矛盾,当 $a=-3$ 时,$A=\{-4,-7,9\}$.$B=\{9,-8,4\}$ 符合题意.

综上可知 $a=-3$.

说明 判定元素与集合的关系,确定元素或集合时,必须符合确定性和互异性的要求.

【专题测试】

1. 选择题

(1) 已知 I 是全集,M,N 是非空子集,且 $M \subset N$,则必为空集的是(   ).

(A) $M \cap N$ (B) $\overline{M} \cap N$

(C) $M \cap \overline{N}$ (D) $\overline{M} \cap \overline{N}$

(2) 数集 $X=\{x \mid x=2m+1, m \in Z\}$,$Y=\{y \mid y=4n \pm 1, n \in Z\}$,则 X 与 Y 的关系是(   )

(A) $X \subset Y$ (B) $X \supset Y$

(C) $X = Y$ (D) $X \cap Y = \varnothing$

(3) 设全集 $I=R$,$A=\{x \mid x \leqslant -3$,或 $x \geqslant 2\}$,$B=\{x \mid -1<x<5\}$,则集合 $\{x \mid -1<x<2\}$ 等于(   )

(A) $\overline{A} \cap B$ (B) $\overline{A \cup B}$

(C) $\overline{A} \cup \overline{B}$ (D) $A \cap B$

(4) 图 1 -4 中的阴影部分可由集合 M, P, Q 表示为(　　)

(A) $M \cup (P \cup Q)$

(B) $M \cap (P \cup Q)$

(C) $M \cup (P \cap Q)$

(D) $M \cap (P \cap Q)$

(5) 设全集为 I,则用阴影部分表示集合 $P \cap (\overline{M \cup Q})$ 的是(　　)

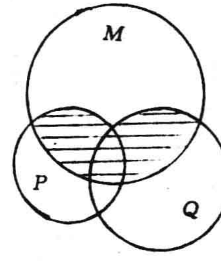


图 1—4

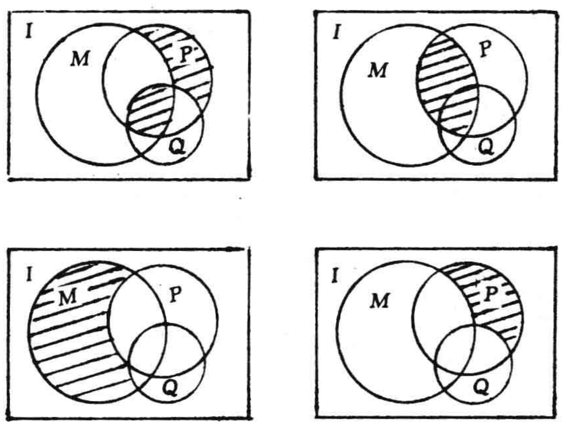


图 1—5

(6) 设集合 $M = \{(x, y) \mid 3x - 2y = -1\}$, $N = \{(x, y) \mid 5x + 3y = 11\}$,则 $M \cap N$ 等于(　　)

(A) $(1,2)$　　　　(B) $\{1,2\}$

(C) $\{(1,2)\}$　　　　(D) $\varnothing$

(7) 设全集 $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $P \cup Q = I$, $P \cap Q = \{1, 2\}$,则 $(P \cup Q) \cap (\overline{P} \cup \overline{Q})$ 等于(　　)

(A) $\{1, , 2, 3\}$　　　　(B) $\{1, 4, 5\}$

(C) $\{2, 3, 4\}$　　　　(D) $\{3, 4, 5\}$

(8) 设集合 $M = \{y \mid y = 3 - x^2, x \in R\}$, $N = \{y \mid y = 2x^2 - 1, x$

$\in R\}$，则 $M\cap N$ 等于（　　）

(A) $\{y\mid -1\leqslant y\leqslant 3\}$ (B) $\{y\mid -3\leqslant y\leqslant 1\}$

(C) $\{\frac{2\sqrt{3}}{3},-\frac{2\sqrt{3}}{3}\}$ (D) $\{(\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{5}{3}),(-\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{5}{3})\}$

2. 填空题

(1) 已知 $I=\{$小于 9 的自然数$\}$，$A=\{3,4,5\}$. $B=\{4,7,8\}$，则 $\overline{A}\cup\overline{B}=$______，$\overline{A}\cap\overline{B}=$______，$\overline{A\cup B}=$______，$\overline{A\cap B}=$______.

(2) 已知 $a<0$，则方程 $x^2-2ax-3a^2=0$ 的解集是______，不等式 $x^2-2ax-3a^2<0$ 的解集是______.

(3) 设 $A=\{x\mid x+4>0\}$，$B=\{x\mid x-3<0\}$，$C=\{x\mid x+4<0\}$，$D=\{x\mid x-3>0\}$，则不等式 $x^2+x-12<0$ 的解集是______，不等式 $x^2+x-12>0$ 的解集是______.

(4) 60 的正因数组成的集合是______.

(5) x^6-y^6 的因式组成的集合是______.

(6) 方程 $x^2-px+q=0$ 的解集是 A，方程 $x^2+qx+p=0$ 的解集是 B，且 $A\cap B=\{1\}$，则 $p=$______，$q=$______，$A\cup B=$______.

(7) 设 $A=\{(x,y\mid x^2-y^2=3\}$，$B=\{(x,y)\mid 2x+y=3\}$，则 $A\cap B=$______.

(8) 设 $A=\{(x,y)\mid y=-3x+1,x\in R\}$，$B=\{(x,y)\mid y=(2-k^2)x+3,x\in R\}$，且 $A\cap B\neq\varnothing$，则 k 的取值范围是______.

3. 已知 $A=\left\{x\,\middle|\,\begin{cases}2x-1>0,\\3x-4<0\end{cases}\right\}$，$B=\{x\mid(x-\frac{1}{2})(x-a)<0\}$. 并且 $A\subset B$，求实数 a 的取值范围.

4. 设 $A=\{x\mid x=2n,n\in N\}$，$B=\{x\mid x=3n-1,n\in N\}$，把集合 $A\cap B$ 中的元素按照从小到大的顺序排列，求其中的第 9 个元素.

5. 集合 $A=\{2,4,a^3-2a^2-a+7\}$，$B=\{-4,a+3,a^2-2a+2,a^3+a^2+3a+7\}$，已知 $A\cap B=\{2,5\}$，则 a 的值及 $A\cup B$.