

机械工程前沿著作系列 HEP
HEP Series in Mechanical Engineering Frontiers MEF

连杆机构现代综合理论与方法

——解析理论、解域方法及软件系统

韩建友 杨通 著
尹来容 钱卫香

机械工程前沿著作系列 HEP
HEP Series in Mechanical Engineering Frontiers MEF

连杆机构现代综合理论与方法

——解析理论、解域方法及软件系统

LIANGAN JIGOU
XIANDAI ZONGHE
LILUN YU FANGFA

韩建友 杨 通 尹来容 钱卫香 著

内容简介

本书对经典机构综合问题给出了现代综合理论与方法,对连杆机构综合中的运动生成、函数生成和轨迹生成机构综合进行了系统、深入的阐述。全书共分13章,主要内容包括:坐标变换基础,三、四、五位置运动生成平面四杆机构综合,四位置运动生成平面六杆机构综合,四、五精确点函数生成平面四杆机构综合,四、五位置运动生成球面4R机构综合,四、五精确点函数生成球面4R机构综合,平面无限接近运动几何学基础,无限接近四位置直线轨迹生成平面四杆机构综合,无限接近五位置直线轨迹生成平面四杆机构综合,混合四位置直线轨迹生成平面四杆机构综合,机构稳健优化设计,机构综合软件的设计与实现。

解域综合方法贯穿本书的大部分内容,且均有示例及其对应的软件系统。软件系统可实现综合机构的可视化、立体化及动态化,以便于读者对复杂问题的理解以及设计者对机构方案的选取。

本书可作为连杆机构综合的研究者、工程设计人员的参考书,也可以作为机械设计及理论专业的研究生教材或参考资料。

图书在版编目(CIP)数据

连杆机构现代综合理论与方法:解析理论、解域方法及软件系统 / 韩建友等著. -- 北京:高等教育出版社, 2013. 7

ISBN 978 - 7 - 04 - 037349 - 3

I. ①连… II. ①韩… III. ①连杆机构 - 研究 IV. ①TH112. 1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 091039 号

策划编辑 刘占伟
版式设计 王莹

责任编辑 刘占伟
插图绘制 尹莉

特约编辑 陈静
责任校对 刁丽丽

封面设计 杨立新
责任印制 尤静

出版发行 高等教育出版社
社址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印刷 化学工业出版社印刷厂
开本 787mm × 1092mm 1/16
印张 15.75
字数 310千字
购书热线 010 - 58581118

咨询电话 400 - 810 - 0598
网址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landaco.com>
<http://www.landaco.com.cn>
版次 2013年7月第1版
印次 2013年7月第1次印刷
定价 69.00元(含光盘)

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物料号 37349 - 00

前 言

本书对经典机构综合问题给出了现代综合理论与方法,对连杆机构综合中的运动生成、函数生成和轨迹生成机构综合进行了系统、深入的阐述,其中包括了有限分离和无限接近的运动几何学理论及其在此三类综合问题中的应用,汇集了作者多年来,尤其是最近几年来几位博士研究生所取得的成果。本书采用解析法对上述机构综合的三个基本问题进行了求解,并以现代机构设计的计算机程序化、参数化、可视化、动态化、立体化为特色,以机构的全部解或部分解的解域化表示及稳健优化设计为目标,采用适当的理论和方法体系解决了多种综合问题,并编制出了具有上述特色的机构综合软件系统。本书对各综合问题的阐述系统而深入,且阐述方法深入浅出,容易理解;对于函数生成综合问题,通过机架变换的方法采用与运动生成问题同一套综合公式,大大简化了编程计算过程;对于两类四位置的四杆机构综合问题,过去常用几何法或解析法得到布尔梅斯特 (Burmester) 圆点或圆心曲线,而在本书中还可以看到全部机构解的类型解域图(解域图的使用使设计者很容易获得满足要求的机构)。解域综合方法是本书的重要特色和独到之处,大部分内容为作者的最新研究成果。

本书中关于无限接近和有限分离的混合问题的阐述以及该类问题的解决方法在直线机构综合中的应用是独一无二的,并且与各种运动生成问题有机地融为一体。本书中各部分内容均有综合示例以及对应的软件系统,以便于对复杂问题的理解。软件系统对综合出的机构能够实现可视化、立体化、动态化。尤其在动态化方面,不仅仅是机构的动态演示,还可以在机构解域上鼠标所到之处动态地显示所对应的机构,进而显示其所要关注的属性。

连杆机构综合的理论研究始于 18 世纪末、19 世纪初,但直到 19 世纪 80 年代才陆续出现了连杆机构综合方面较成熟的文献。其中,最具代表性的是布尔梅斯特等学者建立起的平面机构运动几何学的经典理论,为平面连杆机构的运动综合奠定了坚实的理论基础。本书的部分内容是对布尔梅斯特理论的继承与发展,例如四杆机构的解域综合方法和多杆机构的四位置运动综合问题所得到的解已经不是四杆机构综合中的圆点和圆心曲线,而是一般情况下的解曲线和相应的解域。

本书是在国家自然科学基金项目(编号:50975024)的资助下,对机械中最常应用的铰链四杆机构及六杆机构的尺寸综合问题进行研究所取得的成果,在此对

国家自然科学基金给予的资助表示感谢。

本书的出版有助于推动机构综合理论与方法的进步与发展,亦是对机构学理论与应用领域著作有益的补充与完善,对现代机构及机器设计水平的提高具有重要的意义。本书所阐述的设计理论与方法对各行业的机械产品设计都具有重要的指导意义,例如大型重载操作机构、汽车前轮转向操作机构、悬挂机构、单自由度假肢机构和手指机构、多自由度串联机器人增加约束构件转变成的单自由度多环机构,以及各种微机械中的微机构等。

本书第1~8章及第13章由北京科技大学韩建友和杨通撰写,第9、10章由长沙理工大学尹来容撰写,第11、12章由西安科技大学钱卫香撰写。全书由韩建友规划和统稿。

由于作者水平所限,书中错误和缺点在所难免,欢迎读者不吝指正。

韩建友

2013年3月于北京科技大学

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其为人将承担相应的民事责任和行政责任；构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人进行严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话 (010)58581897 58582371 58581879

反盗版举报传真 (010)82086060

反盗版举报邮箱 dd@hep.com.cn

通信地址 北京市西城区德外大街4号 高等教育出版社法务部

邮政编码 100120

目 录

第 1 章 坐标变换基础	1
1.1 共原点的坐标变换和刚体的定点转动	1
1.1.1 坐标变换矩阵的推导	1
1.1.2 方向余弦矩阵的性质	3
1.1.3 方向余弦矩阵的表示	4
1.1.4 刚体的定点转动	9
1.1.5 方向余弦矩阵的应用	11
1.2 方向余弦矩阵的导数和刚体的瞬时转动	13
1.2.1 方向余弦矩阵的一次导数和角速度矩阵	13
1.2.2 方向余弦矩阵的二次导数和角加速度矩阵	15
1.2.3 刚体转动中点的速度和加速度	17
1.3 不共原点的坐标变换和刚体的一般运动	17
1.3.1 不共原点的坐标变换	17
1.3.2 刚体的位移矩阵和螺旋位移参数	19
1.3.3 Hartenberg–Denavit 坐标变换	20
1.4 刚体一般运动中点的速度和加速度	22
参考文献	23
第 2 章 三位置运动生成平面四杆机构综合	25
2.1 刚体平面运动矩阵及铰链点公式的推导	26
2.2 给定连架杆长度的三位置运动生成机构综合	28
2.3 给定连架杆夹角的三位置运动生成机构综合	30
2.4 给定连杆在第 1 位形瞬心点的三位置运动生成机构综合	32
2.5 计算示例	34

参考文献	38
第 3 章 四、五位置运动生成平面四杆机构综合	39
3.1 有限分离四位置问题布氏曲线方程式的推导	40
3.2 混合四位置问题布氏曲线方程式系数表达式的推导	41
3.3 布氏曲线的有序表示	47
3.4 角度映射关系的建立	50
3.5 五位置问题布氏点求解公式的推导	52
3.6 计算示例	56
参考文献	66
第 4 章 四位置运动生成平面六杆机构综合	69
4.1 基本理论	71
4.1.1 四杆机构的综合	71
4.1.2 RR 杆的添加	73
4.2 计算示例	77
参考文献	82
第 5 章 四、五精确点函数生成平面四杆机构综合	85
5.1 函数生成机构综合向运动生成机构综合的转换	86
5.2 函数生成平面四杆机构计算示例	90
参考文献	102
第 6 章 四、五位置运动生成球面 4R 机构综合	105
6.1 四位置问题球面布氏曲线方程式的推导	106
6.2 布氏曲线的生成	110
6.3 五位置问题球面布氏点表达式的推导	112
6.4 计算示例	115
参考文献	121
第 7 章 四、五精确点函数生成球面 4R 机构综合	123
7.1 函数生成机构综合向运动生成机构综合的转换	123
7.2 计算示例	126
参考文献	132
第 8 章 平面向无限接近运动几何学基础	133
8.1 基本概念	133
8.2 欧拉 - 萨瓦里 (Euler-Savary) 方程	135

8.3 曲率驻点曲线	139
参考文献	143
第 9 章 无限接近四位置直线轨迹生成平面四杆机构综合	145
9.1 基本理论	145
9.2 一般情况下的四点接触直线机构综合	146
9.2.1 综合公式	146
9.2.2 计算示例	151
9.3 特殊情况——鲍尔点位于连架杆所在直线上	155
9.3.1 综合公式	155
9.3.2 计算示例	156
9.4 特殊情况——等腰梯形直线机构	158
9.4.1 综合公式	158
9.4.2 计算示例	159
9.5 特殊情况——瞬心与一个固定铰链点重合	161
9.5.1 综合公式	161
9.5.2 计算示例	163
9.6 特殊情况——瞬心与一个固定铰链点重合且鲍尔点与机架共线	168
9.6.1 综合公式	168
9.6.2 计算示例	169
参考文献	175
第 10 章 无限接近五位置直线轨迹生成平面四杆机构综合	177
10.1 一般情况下的五点接触直线机构综合	177
10.1.1 综合公式	177
10.1.2 计算示例	181
10.2 特殊情况——布尔梅斯特点位于拐点圆极点	182
10.2.1 综合公式	182
10.2.2 计算示例	183
10.3 特殊情况——一个连架杆和机架共线	186
10.3.1 综合公式	186
10.3.2 计算示例	189
参考文献	192
第 11 章 混合四位置直线轨迹生成平面四杆机构综合	195
11.1 综合公式的推导	195
11.1.1 综合方程的建立	196

11.1.2	综合方程的求解	196
11.2	关键参数的确定	198
11.2.1	位置转角的求解	198
11.2.2	第三点线速度的求解	199
11.3	计算示例	200
11.4	机构性能分析	204
11.4.1	一般情况(连杆曲线为一般曲线)	204
11.4.2	特殊情况(连杆曲线为对称曲线)	207
	参考文献	210
第 12 章	机构稳健优化设计	211
12.1	稳健设计模型的建立	211
12.2	四位置导引机构稳健设计	212
12.2.1	结构参数的随机性分析	212
12.2.2	约束条件	213
12.2.3	机构输出稳健性评价方案	214
12.2.4	稳健设计示例及结果分析	215
12.3	给定两连架杆对应角位移机构的稳健设计	219
12.3.1	设计变量	219
12.3.2	约束条件	219
12.3.3	质量特性指标及目标函数	220
12.3.4	建立数学模型	220
12.3.5	稳健设计示例及结果分析	221
12.4	λ 形机构稳健设计	224
12.4.1	稳健性能评价数学模型	224
12.4.2	稳健设计示例及结果分析	225
	参考文献	227
第 13 章	机构综合软件的设计与实现	229
13.1	引言	229
13.2	软件的开发方式及总体构架	230
13.3	平面连杆机构综合软件系统介绍	233
13.4	球面 4R 机构综合软件系统介绍	236
13.5	无限接近四、五位置直线轨迹生成机构综合软件系统介绍	237
13.6	混合四位置“ λ ”形直线轨迹生成机构综合软件系统介绍	239
	参考文献	241

第 1 章 坐标变换基础

本章介绍用于机构综合的坐标变换的基础知识, 主要是坐标变换矩阵的推导及应用。这些内容适用于任何空间机构或平面机构的分析与综合, 包括串、并联机器人机构。首先从共原点的坐标变换开始研究刚体或构件的定点转动, 接着给出刚体或构件一般运动时的坐标变换及机构运动分析的计算公式。

1.1 共原点的坐标变换和刚体的定点转动

1.1.1 坐标变换矩阵的推导

设有共原点的两组右手直角坐标系 $Ox_iy_iz_i$ 和 $Ox_jy_jz_j$, i 系称为旧系, j 系称为新系, 如图 1.1 所示。

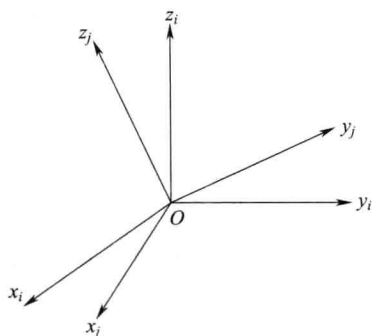


图 1.1 两个共原点的坐标系

x_j 轴、 y_j 轴和 z_j 轴关于 $Ox_iy_iz_i$ 的方向角分别是 α_1 、 β_1 、 γ_1 , α_2 、 β_2 、 γ_2 以及 α_3 、 β_3 、 γ_3 。用 i_1 、 i_2 、 i_3 和 j_1 、 j_2 、 j_3 分别表示两组坐标系的单位坐标矢量, 于是有

$$\begin{aligned}i_1 &= j_1 \cos \alpha_1 + j_2 \cos \alpha_2 + j_3 \cos \alpha_3 \\i_2 &= j_1 \cos \beta_1 + j_2 \cos \beta_2 + j_3 \cos \beta_3 \\i_3 &= j_1 \cos \gamma_1 + j_2 \cos \gamma_2 + j_3 \cos \gamma_3\end{aligned}\quad (1-1)$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{j}_1 &= \mathbf{i}_1 \cos \alpha_1 + \mathbf{i}_2 \cos \beta_1 + \mathbf{i}_3 \cos \gamma_1 \\
 \mathbf{j}_2 &= \mathbf{i}_1 \cos \alpha_2 + \mathbf{i}_2 \cos \beta_2 + \mathbf{i}_3 \cos \gamma_2 \\
 \mathbf{j}_3 &= \mathbf{i}_1 \cos \alpha_3 + \mathbf{i}_2 \cos \beta_3 + \mathbf{i}_3 \cos \gamma_3
 \end{aligned} \tag{1-2}$$

设空间有一点 P (矢径为 \mathbf{r}) 关于这两组坐标系的坐标分别是 (x_i, y_i, z_i) 和 (x_j, y_j, z_j) , 于是有

$$\mathbf{r} = x_i \mathbf{i}_1 + y_i \mathbf{i}_2 + z_i \mathbf{i}_3 = x_j \mathbf{j}_1 + y_j \mathbf{j}_2 + z_j \mathbf{j}_3 \tag{1-3}$$

分别用 \mathbf{i}_1 、 \mathbf{i}_2 、 \mathbf{i}_3 点乘式 (1-3) 可得

$$\begin{aligned}
 x_i &= x_j \cos \alpha_1 + y_j \cos \alpha_2 + z_j \cos \alpha_3 \\
 y_i &= x_j \cos \beta_1 + y_j \cos \beta_2 + z_j \cos \beta_3 \\
 z_i &= x_j \cos \gamma_1 + y_j \cos \gamma_2 + z_j \cos \gamma_3
 \end{aligned} \tag{1-4}$$

进一步用矩阵简写为

$$(\mathbf{r})_i = [C_{ij}](\mathbf{r})_j \tag{1-5}$$

其中 $(\mathbf{r})_i$ 和 $(\mathbf{r})_j$ 为同一点 P 分别在旧坐标系 i 及新坐标系 j 中的列阵, 即 $(\mathbf{r})_i = (x_i, y_i, z_i)^T$, $(\mathbf{r})_j = (x_j, y_j, z_j)^T$, 方阵 $[C_{ij}]$ 为

$$[C_{ij}] = \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 & \cos \alpha_2 & \cos \alpha_3 \\ \cos \beta_1 & \cos \beta_2 & \cos \beta_3 \\ \cos \gamma_1 & \cos \gamma_2 & \cos \gamma_3 \end{bmatrix} \tag{1-6}$$

右下角标表示该方阵是由坐标系 j 变换到坐标系 i 的坐标变换矩阵。方阵 $[C_{ij}]$ 中元素的表达式如表 1.1 所示, 可以看出 $[C_{ij}]$ 中每一元素都是方向余弦, 故 $[C_{ij}]$ 常称为方向余弦矩阵。对两个没有相对旋转的坐标系, 由于主对角线元素 $c_{11} = c_{22} = c_{33} = 1$ 而其余元素均为零, 这时的方向余弦矩阵 $[C_{ij}]$ 显然成为单位矩阵 $[I]$ 。

表 1.1 方阵 $[C_{ij}]$ 中元素的表达式

	x_j	y_j	z_j
x_i	$c_{11} = \cos(x_i, x_j)$	$c_{12} = \cos(x_i, y_j)$	$c_{13} = \cos(x_i, z_j)$
y_i	$c_{21} = \cos(y_i, x_j)$	$c_{22} = \cos(y_i, y_j)$	$c_{23} = \cos(y_i, z_j)$
z_i	$c_{31} = \cos(z_i, x_j)$	$c_{32} = \cos(z_i, y_j)$	$c_{33} = \cos(z_i, z_j)$

1.1.2 方向余弦矩阵的性质

1. 方向余弦矩阵 $[C_{ij}]$ 及 $[C_{ji}]$ 互为转置

由式 (1-4) 知, 在两个共原点直角坐标系 $Ox_iy_iz_i$ 和 $Ox_jy_jz_j$ 中, 点的坐标变换公式为

$$(\mathbf{r})_i = [C_{ij}](\mathbf{r})_j, \quad (\mathbf{r})_j = [C_{ji}](\mathbf{r})_i \quad (1-7)$$

式中, 方向余弦矩阵 $[C_{ij}]$ 及 $[C_{ji}]$ 是由坐标系 j 向 i 以及由坐标系 i 向 j 变换的矩阵。因此很容易由表 1.1 写出

$$[C_{ij}] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}, \quad [C_{ji}] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix} \quad (1-8)$$

显然, 方向余弦矩阵 $[C_{ij}]$ 及 $[C_{ji}]$ 互为转置矩阵, 即 $[C_{ji}] = [C_{ij}]^T$ 或 $[C_{ij}] = [C_{ji}]^T$ 。

2. 方向余弦矩阵中的九个元素只有三个是独立的

由于方向余弦矩阵中的各个元素分别代表着新、旧坐标轴间方向余弦, 所以有

$$\begin{cases} c_{11}^2 + c_{21}^2 + c_{31}^2 = 1 \\ c_{12}^2 + c_{22}^2 + c_{32}^2 = 1 \\ c_{13}^2 + c_{23}^2 + c_{33}^2 = 1 \end{cases} \quad (1-9)$$

而三个坐标轴又是两两垂直, 所以又有下面的关系

$$\begin{cases} c_{11}c_{12} + c_{21}c_{22} + c_{31}c_{32} = 0 \\ c_{12}c_{13} + c_{22}c_{23} + c_{32}c_{33} = 0 \\ c_{11}c_{13} + c_{21}c_{23} + c_{31}c_{33} = 0 \end{cases} \quad (1-10)$$

由此可见, 由于存在六个关系式, 只有三个不在同一行或同一列的元素才是独立的。

3. 方向余弦矩阵为正交矩阵

$$[C_{ij}][C_{ji}] = [C_{ji}][C_{ij}] = [I] \quad (1-11)$$

故有

$$[C_{ij}]^{-1} = [C_{ij}]^T \quad (1-12)$$

4. 方向余弦矩阵的行列式等于 1(对右手直角坐标系)

对式 (1-11) 两边均取行列式, 由于行列式 $|[C_{ij}]| = |[C_{ji}]|$, $|[I]| = 1$, 所以 $|[C_{ij}]||[C_{ji}]| = |[C_{ij}]|^2 = |[C_{ji}]|^2 = 1$, $|[C_{ij}]| = 1$, 因此方向余弦矩阵的行列式等于 1。

5. 方向余弦矩阵中每一元素都等于其代数余子式
 将行列式 $[[C_{ij}]] = 1$ 展开, 可以看出

$$\begin{aligned} c_{11} &= c_{22}c_{33} - c_{23}c_{32} \\ c_{12} &= c_{23}c_{31} - c_{21}c_{33} \end{aligned} \quad (1-13)$$

1.1.3 方向余弦矩阵的表示

1. 绕一个坐标轴旋转的坐标变换

1) 绕 z 轴旋转

设有两个共原点右手直角坐标系, 如图 1.2 所示, 对坐标系 $Ox_iy_iz_i$ (下称坐标系 i) 来说, 坐标系 $Ox_jy_jz_j$ (下称坐标系 j) 的坐标轴方向可认为是绕 z 轴旋转了一个角度 θ 。关于转角 θ 的正负, 通常系按右手法则规定, 即对着 z 轴看, 由 x_i 轴逆时针转至 x_j 轴为正, 而顺时针则为负, 坐标变换矩阵很容易由表 1.1 写出

$$[C_{ij}^{(\theta)}] = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1-14)$$

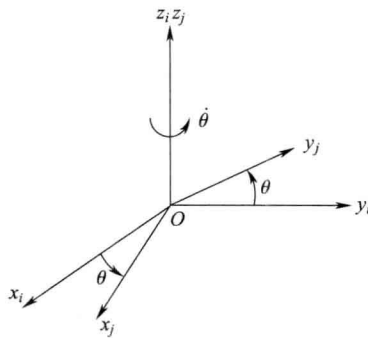


图 1.2 绕 z 轴旋转的坐标变换

方阵的上角标 (θ) 表示坐标系 j 是由坐标系 i 绕 z 轴转过 θ 角而得的。

2) 绕 x 、 y 坐标轴旋转

图 1.3 所示坐标系 j 可认为是坐标系 i 绕 x 轴转过角度 α 。图 1.4 所示坐标系 j 则为坐标系 i 绕 y 轴转过角度 β 。至于转角 α 和 β 的正负仍按右手法则来规定。同样, 利用表 1.1 可直接写出绕 x 轴旋转 α 及绕 y 轴旋转 β 的方向余弦矩阵

$$[C_{ij}^{(\alpha)}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (1-15)$$

$$[C_{ij}^{(\beta)}] = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \quad (1-16)$$

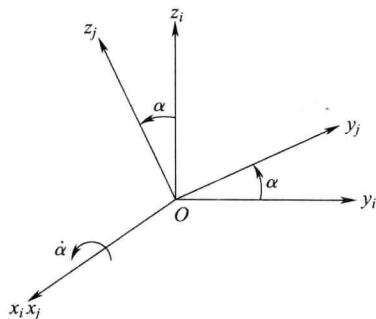


图 1.3 绕 x 轴旋转的坐标变换

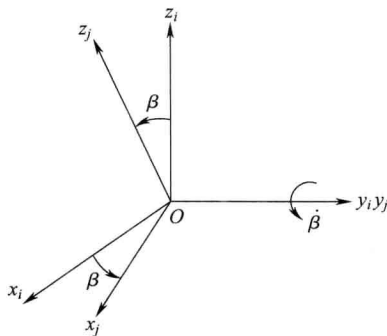


图 1.4 绕 y 轴旋转的坐标变换

2. 绕两个坐标轴旋转的坐标变换

图 1.5 所示坐标系 $Ox_jy_jz_j$ 对 $Ox_iy_iz_i$ 的方向可认为是先绕 $z_i(z_m)$ 轴转过角度 θ , 接着绕 $x_j(x_m)$ 轴转过角度 α 。将坐标系 $Ox_iy_iz_i$ 绕 z_i 轴转过 θ 到达 $Ox_my_mz_m$ 时坐标变换的矩阵关系式为

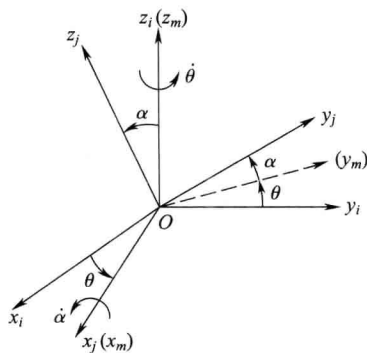


图 1.5 绕两个坐标轴旋转的坐标变换

$$(\mathbf{r})_i = [C_{im}^{(\theta)}](\mathbf{r})_m \quad (1-17)$$

式中, 方向余弦矩阵 $[C_{im}^{(\theta)}]$ 取式 (1-14) 的形式。

接着, 将坐标系 $Ox_my_mz_m$ 绕 x_m 转过角度 α 到达 $Ox_jy_jz_j$ 时, 坐标变换的矩阵关系式为

$$(\mathbf{r})_m = [C_{mj}^{(\alpha)}](\mathbf{r})_j \quad (1-18)$$

式中, 方向余弦矩阵 $[C_{mj}^{(\alpha)}]$ 取式 (1-15) 的形式。

由此得由坐标系 j 向坐标系 i 进行坐标变换的矩阵关系式为

$$(\mathbf{r})_i = [C_{im}^{(\theta)}](\mathbf{r})_m = [C_{im}^{(\theta)}][C_{mj}^{(\alpha)}](\mathbf{r})_j \quad (1-19)$$

式 (1-19) 表明, 运用方向余弦矩阵的连乘可进行坐标系的连续变换。为了便于应用, 可写出适合图 1.5 的方向余弦矩阵 $[C_{ij}^{(\theta, \alpha)}]$ 为

$$\begin{aligned} [C_{ij}^{(\theta, \alpha)}] &= [C_{im}^{(\theta)}][C_{mj}^{(\alpha)}] \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \cos \alpha & \sin \theta \sin \alpha \\ \sin \theta & \cos \theta \cos \alpha & -\cos \theta \sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1-20)$$

3. 任意旋转的坐标变换

从前面已经知道, 对于共原点坐标变换的一般情形, 方向余弦矩阵中的九个元素中仅有三个是独立的。因此任意给定不在同一行或同一列的三个元素, 其他元素就随之确定, 可根据前面给定的六个方程联立求出, 但用给定的三个独立的方向余弦来表示其余的六个是很困难的, 因为这样必须解六个联立二次方程式。因此, 人们通常选用其他参数。用来表示方向余弦矩阵中的各个元素, 下面介绍三种方法。

1) 用三个欧拉角表示的坐标变换矩阵

如图 1.6 所示, 坐标系 j 的方向可认为是由坐标系 i 连续进行三个欧拉角旋转而来。图中节线 ON 同时垂直于坐标轴 z_i 及 z_j , 这样, 坐标系 i 先绕 $z(z_i)$ 轴旋转一个角度 θ 使轴 x_i 与节线 ON 相重合, 接着绕轴 x (节线 ON) 旋转一个角度 α , 可使轴 z_i 转到 z_j 的方向, 最后绕轴 $z(z_j)$ 再旋转一个角度 δ , 可使轴 x_i 最后由节线 ON 转到 x_j 的方向。利用式 (1-20) 及式 (1-14), 根据三个欧拉角的连续旋转, 可得由坐标系 j 变换到坐标系 i 的方向余弦矩阵 $[C_{ij}^{(\theta, \alpha, \delta)}]$ 为

$$\begin{aligned}
& [C_{ij}^{(\theta, \alpha, \delta)}] \\
= & \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \cos \alpha & \sin \theta \sin \alpha \\ \sin \theta & \cos \theta \cos \alpha & -\cos \theta \sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \delta & -\sin \delta & 0 \\ \sin \delta & \cos \delta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
= & \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \delta - \sin \theta \cos \alpha \sin \delta & -\cos \theta \sin \delta - \sin \theta \cos \alpha \cos \delta & \sin \theta \sin \alpha \\ \sin \theta \cos \delta + \cos \theta \cos \alpha \sin \delta & -\sin \theta \sin \delta + \cos \theta \cos \alpha \cos \delta & -\cos \theta \sin \alpha \\ \sin \alpha \sin \delta & \sin \alpha \cos \delta & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (1-21)
\end{aligned}$$

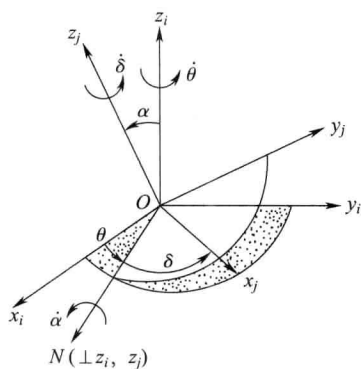


图 1.6 三个欧拉角表示的坐标变换

2) 用绕三个坐标轴旋转角表示的坐标变换矩阵

对于旋转次序作如下规定, 先绕 z 轴旋转 θ 角, 再绕 y 轴旋转 β 角, 最后绕 x 轴旋转 α 角。此旋转变换矩阵展开后为

$$\begin{aligned}
[C_{ij}^{(\theta, \beta, \alpha)}] &= \begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & 0 & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha & -s\alpha & 0 \\ 0 & s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1-22) \\
&= \begin{bmatrix} c\theta c\beta & c\theta s\beta s\alpha - s\theta c\alpha & c\theta s\beta c\alpha + s\theta s\alpha & 0 \\ s\theta c\beta & s\theta s\beta s\alpha + c\theta c\alpha & s\theta s\beta c\alpha - c\theta s\alpha & 0 \\ -s\beta & c\theta s\alpha & c\theta c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

此即绕三个坐标轴的旋转变换, 有的书中亦称为广义欧拉角变换。

3) 用绕某一轴的旋转角表示的坐标变换矩阵

如图 1.7 所示, 坐标系 j 的方向可认为将坐标系 i 绕 \mathbf{u} 轴旋转角度 φ 而得, 该轴在坐标系 i 中则有一定的方向角 (α, β, γ) 。